

6 梁 (Beam)

6.1 梁の定義

5.1で述べたように、軸に垂直に作用する外力やモーメントを受ける棒状部材を梁 (beam) という。梁はまっすぐなもの (直線梁という) が多いが、場合によっては、曲率を持ったもの (曲り梁という) もある。この章では直線梁が外力を受けたときに生じる変形や梁内に発生する応力・ひずみの分布について学ぶ。

梁の長さ方向に x 、垂直に y 座標を取るものとする。

6.2 梁に作用する外力と拘束条件—境界条件

6.2.1 梁が受ける外力

梁が受ける外力には、軸に垂直な外力と (力の) モーメントの2つがある。図 6.1 は梁上の任意点 P に作用する2種類の荷重を示したものである。この内、点 P に作用するモーメント M は、例えば、点 P から出した長さ l の剛な腕の先端に大きさ $F=M/l$ の力を作用させたることによって与えられる。

6.2.2 拘束条件

梁は適当な所の変位を拘束 (0) にしないと剛体変位を起こしてしまう。梁を拘束する仕方 (梁を支持する仕方) には、次に述べるような2つがある (図 6.2)。

①固定支持 (埋め込み)・・・その点の変位 (たわみ) v とともにたわみ角 dv/dx も 0 になる (なお、たわみやたわみ角の定義は 6.3 で述べる)。

②単純支持・・・・・・・その点のたわみは 0 ($v=0$) になる。

梁は支持方法と部材の数によってさまざまな呼ばれ方をする (図 6.2)。

単純梁 (2点で単純支持された梁)

片持ち梁（一端だけが固定支持された梁）

固定梁（両端が固定支持されているか、一端が固定支持、他端が単純支持された梁）

連続梁（単純支持点の数が3以上ある梁）

6.3 梁の変位と変形およびひずみ

6.3.1 梁が受ける変形とひずみ

梁は外力を受けるとたわむ（湾曲する）。たわんだ後も梁の軸に垂直な断面は平面が保たれるものとする。図6.3に示すように、梁の任意点に長さが $d x$ の（矩形）要素を考える。今述べた仮定から、梁が変形したわんだ後も要素の両端の断面が平面を保つには、断面は最初の鉛直方向から僅かに傾斜し、両断面は「ハ」の字または逆「ハ」の字になる。変形後の両断面の延長線の交点をO、両断面のなす角度を Δ とする。

「ハ」の字に変形した場合、要素の中に軸に平行な線素を考えると、変形に伴い上部の線素は縮み、下部の線素は伸びる。この線素の伸縮に対応した x 方向のひずみ ε_x は、断面が変形後も直線を保つという仮定から、中心軸から離れる（ y の絶対値が増す）にしたがって増加する。そうすると、ひずみが0になる場所があるはずである。これをつないだ線を中立軸という。中立軸は梁の断面の重心に一致することがわかっている。中立軸の長さは、定義から、たわんだ前後で変化しない。

要素内の軸に平行な線素のひずみ ε_x は次のように評価できる。中立軸と点O間の距離を ρ とする（ ρ は曲率半径と呼ばれる）。中立軸から y 離れた線素の変形後の長さは $(\rho + y) \Delta$ なので、ひずみ ε_x は次のように評価される。

$$\varepsilon_x = \{(\rho + y) \Delta - d x\} / d x = \{(\rho + y) \Delta - \rho \Delta\} / \rho \Delta = y / \rho \quad (6.1)$$

6.3.2 梁の変位（たわみ）

梁は外力を受けると y 方向に変位 v を生じる。梁の場合、この変位成分はたわみと呼ばれる

(たわみは y 座標の負の向きを+にする)。梁がたわんだ後の梁に引いた各点の接線が x 軸となす角

$$i = \tan^{-1}(dv/dx) \quad (6.2)$$

をたわみ角 i という。

解析幾何学に基づけば、たわみ v は曲率半径 ρ と次の関係がある。

$$\rho = -\{1 + (dv/dx)^2\}^{3/2} / (d^2v/dx^2) \quad (6.3)$$

上式において dv/dx は(6.2)式よりたわみ角に等しいが、通常、この値は1に比べて十分に小さいので、(6.3)式は次のように評価できる。

$$\rho = -1 / (d^2v/dx^2) \quad (6.4)$$

6.4 梁に生じる内力と応力

6.4.1 梁に生じる内力 (図 6.4)

梁が外力を受けると梁の内部には2種類の内力、一つはせん断荷重、もう一つは曲げモーメント、が梁内の至る所で発生する。具体的な例によって発生する内力を示す。

a) いま、梁上の点 P に軸に垂直な荷重 W が作用しているとき、点 P から x 離れた点 Q に生じる内力を考える：

①まず、 y 方向の力の釣り合いから点 Q には大きさが $-W$ の力が y 方向に生じている。この内力はせん断力 (shear force) と呼ばれる。

②点 Q はまた、荷重 W によりモーメント $M=Wx$ を受ける。モーメントも釣り合っていないので、内力としてモーメント $-Wx$ が生じる。曲げモーメント (bending moment) と呼ばれるこの内力は、後で示すように (6.4.3 参照)、梁の断面に軸方向の圧縮応力と引張応力 (両者は曲げ応力と呼ばれる) が分布することによって発生する。

b) 梁上の点 P にモーメント M が作用している場合、点 Q には釣り合いの条件から $+M$ の曲げモーメントが生じる。

せん断力や曲げモーメントは図 6.5 のような向きを+と約束する。

6.4.2 せん断力線図(SFD, Shear Force Diagram)、曲げモーメント線図 (BMD, Bending Moment Diagram)

梁に発生するせん断力と曲げモーメントの分布を横軸に梁の軸方向の座標、縦軸に荷重をとって表した線図を、それぞれ、せん断力線図(SFD, Shear Force Diagram)、曲げモーメント線図 (BMD, Bending Moment Diagram)という。

例題 1 図 6.6 の SFD、BMD を記せ (解は図 6.8)。

問題 1 図 6.7 の SFD、BMD を記せ。また、曲げモーメントの最大値とそれを取る場所を示せ (解は図 6.9)。

6.4.3 梁に発生する応力

梁には一般にせん断応力と軸 (方向の直) 応力の 2 つが発生する。

(1) せん断応力 τ

内力の一つであるでせん断力 W 対応してせん断応力 τ が発生する。せん断応力 τ の大きさは考える梁の断面における断面積を S とすれば

$$\tau = W/S$$

で表される。

(2) 軸応力 (曲げ応力)

ひずみ ε_x に対応して発生する応力 σ_x は次のようになる。

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = E y / \rho \quad (6.5)$$

上記のひずみ ε_x や応力 σ_x は直線的に変わり、中立軸を挟んで符号が変化する。このような特徴を持った応力を曲げ応力という。この応力が内力の一つである曲げモーメント M をもたらす。曲げモーメント M と曲げ応力の関係は次のようになる。

$$M = \int \sigma_x y b(y) dy = EI / \rho \quad (6.6)$$

$$I = \int y^2 b(y) dy \quad (\text{断面 2 次モーメント}) \quad (\text{次元は } L^4) \quad (6.7)$$

$b(y)$: 梁の y 点における幅

(6.7) 式において EI は梁のたわみに対する剛性を表し、曲げこわさと呼ばれる。

(6.7) 式を (6.1), (6.5) 式に代入すれば次の評価が得られる。

$$\varepsilon_x = y M / EI$$

$$\sigma_x = y M / I \quad (6.8)$$

曲げ応力の最大値 $\sigma_{\max}$ (最大曲げ応力と呼ばれる) は、梁断面における端の $y = \pm h/2$ で取り、(6.8) 式から

$$\sigma_{\max} = hM / (2I) \quad (6.9)$$

で与えられる。

例題 1 幅 b 、高さ h も矩形断面の断面 2 次モーメントを求めよ。

問題 1 半径 r の断面の円形断面の断面 2 次モーメントを求めよ。

6.5 曲げモーメント M とたわみ v の関係

(6.4) 式を (6.6) 式に代入すれば次式が得られる。

$$M = -EI (d^2v/dx^2) \quad (6.10)$$

例題 1 図 6.6 に示す片持ち梁のたわみを求めよ。

解：曲げモーメント M は

$$M = -Wx \quad (0 \leq x \leq 1)$$

なので、これを (6.10) 式に代入し、次の微分方程式が得られる。

$$(d^2v/dx^2) = \{W/(EI)\} x$$

1 回積分すると次式が得られる。

$$(dv/dx) = \{W/(2EI)\} x^2 + C_1$$

さらに、もう一回積分すると、たわみ v について次の評価が得られる。

$$v = \{W/(6EI)\} x^3 + C_1 x + C_2$$

ここに、 C_1 、 C_2 は定数で、次の境界条件から定まる。

$$x = 1 \text{ においてはたわみ } v=0, \text{ たわみ角 } i = dv/dx = 0$$

これより 2 つの定数が次のように求まる。

$$C_1 = -\{W/(2EI)\} 1^2, \quad C_2 = \{W/(3EI)\} 1^3$$

したがって、 v について次の評価が得られる。

$$v = \{W/(6EI)\} (x^3 - 3x^2 + 2)$$

問題 2 図 6.10(a) に示す問題のたわみを求めよ。

解

(a) $0 \leq x \leq a$ のとき

$$M = (b/l) W x$$

微分方程式は

$$-(b/l) W x = EI (d^2 v / dx^2)$$

これを解くと次のようになる。

$$dv/dx = -\{(bW)/(2lEI)\} x^2 + C_1$$

$$v = -\{(bW)/(6lEI)\} x^3 + C_1 x + C_2 \quad (6.11)$$

(b) $a \leq x$ のとき

$$M = (b/l) W x - W(x-a) = -(a/l) W x + W a$$

微分方程式は

$$(a/l) W x - W a = EI (d^2 v / dx^2)$$

これを解くと次のようになる。

$$dv/dx = \{(aW)/(2lEI)\} x^2 - \{(Wa)/(EI)\} x + D_1$$

$$v = \{(aW)/(6EI)\} x^3 - \{(aW)/(2EI)\} x^2 + D_1 x + D_2 \quad (6.12)$$

境界条件： $x=0$ で $v=0$, $x=1$ で $v=0$ より

$$C_2=0$$

$$D_2 = - \{(aW)/(6EI)\} 1^3 + \{(aW)/(2EI)\} 1^2 = D_1 \quad (6.13)$$

また $x=a$ では(6.11)、(6.12)式の dv/dx , v が一致するので、

$$\begin{aligned} C_1 - \{(bW)/(21EI)\} a^2 &= \{(aW)/(21EI)\} a^2 - \{(Wa)/(EI)\} a + D_1 \\ -\{(bW)/(61EI)\} a^3 + C_1 a &= \{(aW)/(61EI)\} a^3 - \{(aW)/(2EI)\} a^2 + D_1 a + D_2 \end{aligned}$$

(6.13) 式の第1式より

$$C_1 = - (W/2EI) a^2 + D_1 \quad (6.14)$$

(6.15)、(6.13) 式を (6.14) 式の第2式に代入し整理すると次式が得られる。

$$D_1 = \{aW (21^2 + a^2)\} / (61EI) \quad (6.15)$$

これを (6.13) 式に代入すれば D_2 の評価が得られる。

$$D_2 = - (a^3 W) / (6EI) \quad (6.16)$$

(6.16) 式を (6.15) 式に代入することにより C_1 が次のように求まる。

$$C_1 = abW (21-a) / (61EI) \quad (6.17)$$

最大のたわみ $v_{\max}$ は $a > b$ とすれば左端と荷重点の間の x_1 で生じる。

x_1 は $\partial v / \partial x = 0$ より (6.11) 式から

$$0 = - \{(bW)/(21EI)\} x^2 + abW (21-a) / (61EI)$$

これを解けば

$$x_1^2 = a (21-a) / 3 \quad (6.18)$$

これを (6.11) 式に代入し、次の評価を得る。

$$\begin{aligned} v_{\max} &= \{bW/(61EI)\} x_1 \{a(21-a) - x_1^2\} \\ &= \{bW/(31EI)\} \{ (a(21-a)/3) \}^{3/2} \end{aligned} \quad (6.19)$$

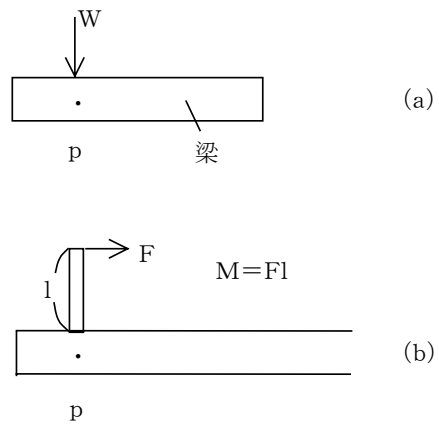


図 6.1 梁に作用する 2 種類の外力。(a) 軸に垂直な荷重 (b) モーメント (偶力)

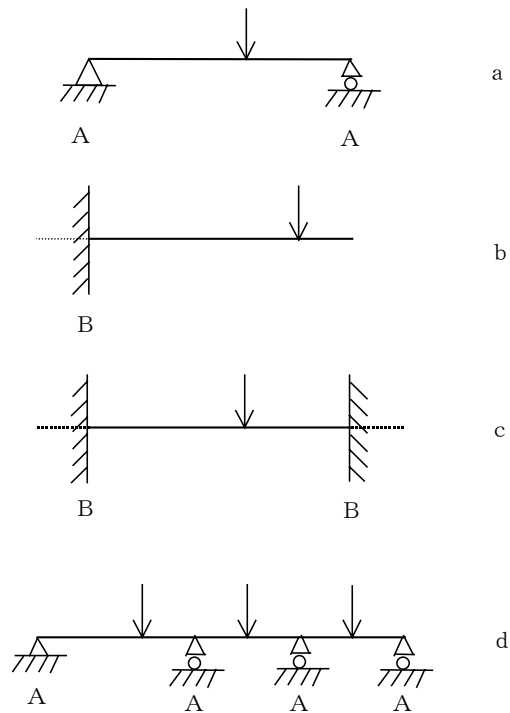


図 6.2 梁の支持方法と支持方法による梁の分類。A は単純支持、B は固定支持。a) 単純梁、b) 片持ち梁、c) 両端固定梁 d) 連続梁

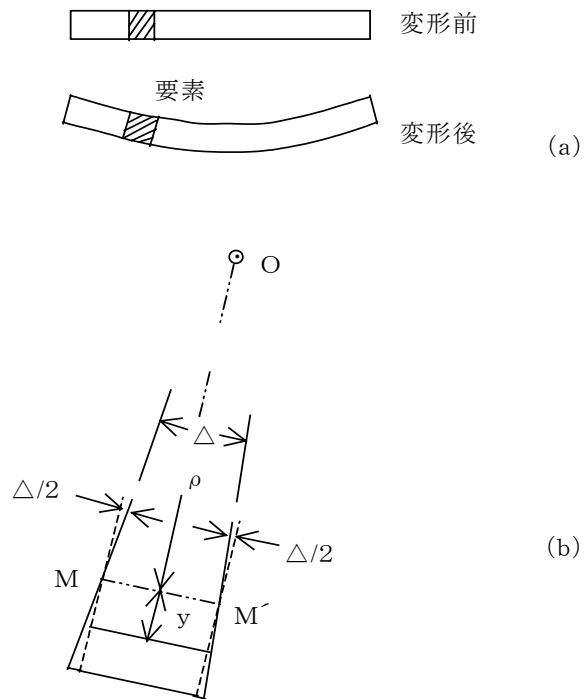


図 6.3 梁の変形、(a)梁と考えている要素 (b)要素の拡大図。点線は変形前、実線は変更後を表す。MM' は中立線

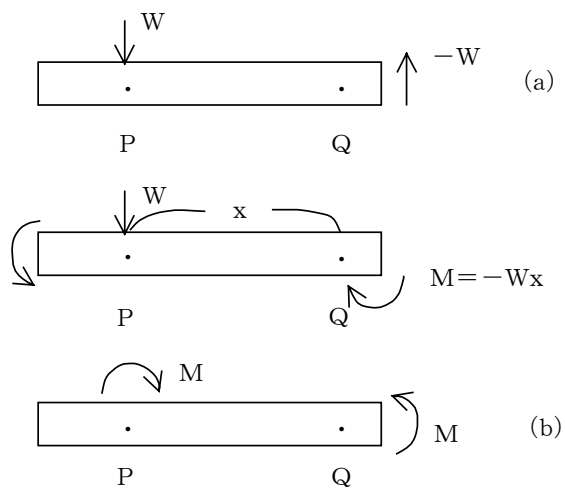


図 6.4 梁の一点 P に外力が作用する時に点 Q に生じる内力。(a) 梁に垂直な荷重 W に対応して生じる内力 (b) モーメント M に対応して生じる内力

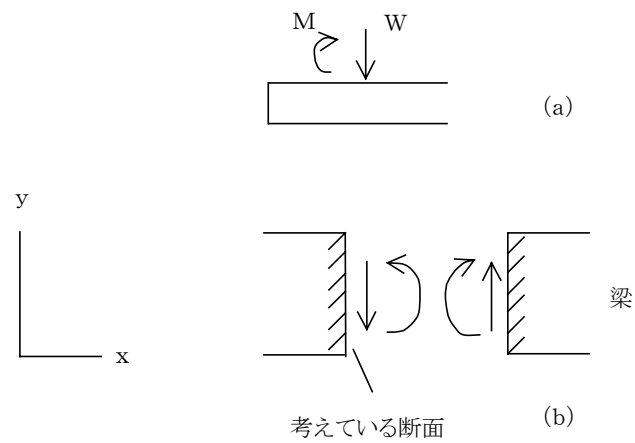


図 6.5 梁に作用する外力 (a) と梁の断面に生じる符号 (b)。矢印の方向を+にする

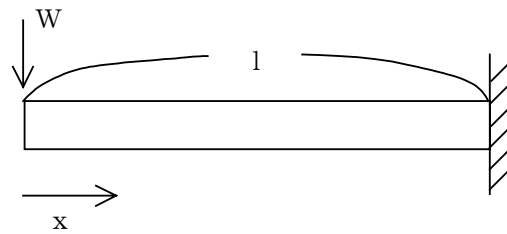


図 6.6 一端に荷重を受ける片持梁

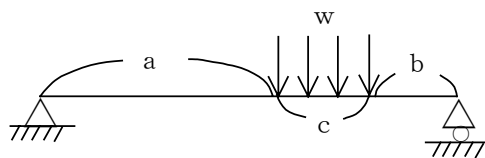


図 6.7 単位長さあたり w の荷重を受ける単純支持梁

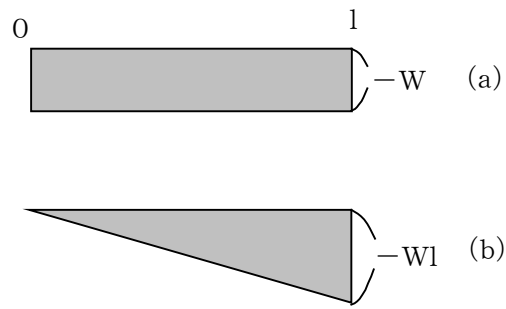


図 6.8 図 6.6 に対応した SFD(a)、BMD(b)

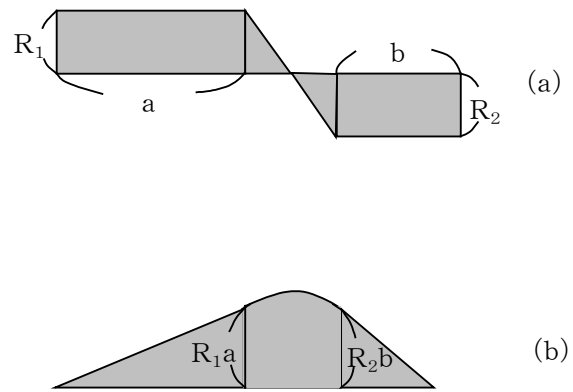


図 6.9 図 6.7 に対応した SFD(a)、BMD(b)

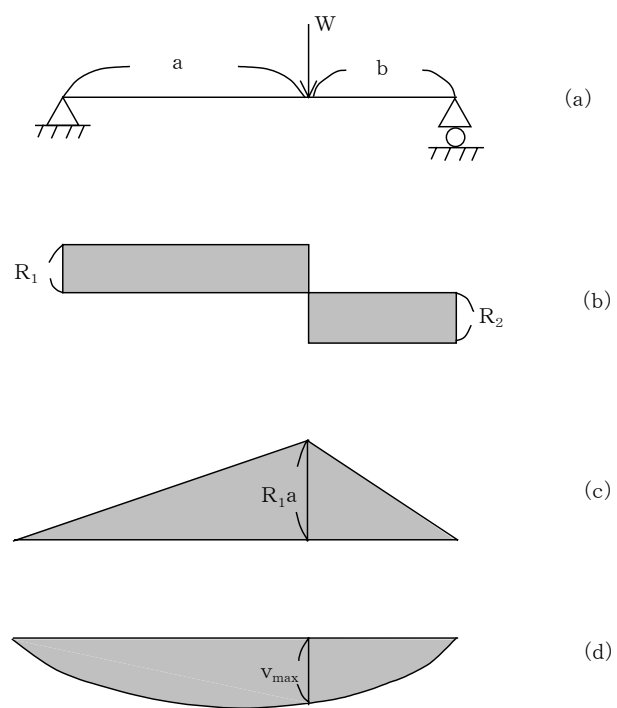


图 6.10 境界条件(a)。SFD(b)、BMD(c)、 v (d)