５　軸力を受ける棒とトラス構造（truss structure）

５．１　棒状部材と骨組構造体

断面に対して長さが十分に大きい棒状部材だけから成る構造物を骨組構造物という。棒状部材は、図５．１に示すように、軸力、せん断力、モーメントの３種の荷重に対して抵抗力を持っている。骨組構造体には次の２種類がある。

(1)トラス（truss）構造体

トラス構造体は棒状部材に軸力だけが作用するように、部材端どおしは摩擦のないヒンジで連結されている（図５．２）。トラス構造体の例として図５．３のような鉄橋が挙げられる。

(2)剛節構造物（ラーメン構造物）

剛節構造物は、上記の３種の荷重を受けることが想定された部材（このような部材を梁という）の組み合わせから構成され、部材端は一般に溶接されている。骨組構造物としては、剛節構造物の方が一般的である。

本章ではトラス構造体が外力を受けたときに生じる変形を計算する方法について学ぶ。なお構造体には各部材が弾性的に挙動するような外力しか作用しないものとする。

５．２　軸力を受ける棒に生じる荷重と変位の関係

図 5.4 に示すように、長さ l、断面積 A、ヤング率Ｅである棒部材が、その一端 ①で軸荷重F_1、他端 ②でF_2を受けており、①で軸変位u_1、②で軸変位u_2が生じているとき、軸荷重（F_1、F_2）と軸変位（u_1、u_2）の関係を求める。

軸方向の直ひずみεは次式で表される相対的な軸変位により発生する。

$$\varepsilon=(u_1-u_2)/l$$

直ひずみεに対応して軸応力σが生じ、それに断面積をかけたものが軸力になる。つまり、軸力Ｆは次のように表される。

$F=A\sigma=AE(u_1-u_2)/l$

したがって、①における荷重F_1は次式で与えられる。

$$F_1=AE(u_1-u_2)/l \tag{5.1}$$

この部材の軸方向の合力は０なので$F_1+F_2=0$より、②における荷重F_2が次式のように求まる。

$$F_2=-AE(u_1-u_2)/l \tag{5.2}$$

以上をまとめると次式が得られる。

$$F_1=Ku_1-Ku_2$$

$$F_2=-Ku_1+Ku_2 \tag{5.3}$$

$$K=(AE)/l \tag{5.4}$$

(6.4)式を matrix で表すと次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} K & K \\ -K & K \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{5.5}$$

上記の荷重ー変位の関係は部材の剛性方程式と呼ばれる。

問題 : ①が固定されており、②に荷重Ｆが作用するときの変位を求めなさい。②が固定されており、①に荷重Ｆが作用するときの変位を求めなさい。

問題 : 棒の断面積Ａが長さ方向に変化する場合の荷重ー（端面）変位を求めなさい。

解 : 棒の軸に一致させて x 軸をとる。x における断面積を A(x)とする。この x を含む微小長さ Δx の領域を考えると、ここに作用する軸応力は荷重をＦとして

$\sigma=F/A$

対応するひずみεは

$\varepsilon=\sigma/E$

微小領域の変位Δu は

$$\Delta u = \varepsilon \Delta x = F \Delta x / (AE)$$

棒の長さをＬとすれば、（端面）変位ｕは

$$u = \int \Delta u = (F/E) \int 1/A(x) \Delta x$$

５.３　トラス構造体の解き方

　トラス構造体では構造体を構成する直線部材は変形後も直線を保つので、軸力、軸変位、軸応力、軸ひずみだけが重要である。構造体が所与の荷重を受けたときの各部材に生じる軸ひずみ、軸応力、部材端変位などは、次に述べることがらを利用することにより求めることができる。なお、部材端はしばしば節点と呼ばれる。

⑴力の釣り合い・・・ある節点に注目したとき、その節点に外力が作用していなければそこに接続している各部材に働く力の合力は０になる（２次元の場合、ｘ方向、ｙ方向の合力とも０になる）。注目する節点に外力Ｆが作用していれば、各部材端に働く力の合力はＦに等しい。

⑵適合条件・・・１つの節点に接続している各部材端の変位は同一（２次元の場合、ｘ 方向、ｙ方向の変位成分とも同一）である。

⑶構造物が剛体変位を起こさないために、いくつかの節点は拘束された（変位が０になった）状態になっている。

⑷対称性があれば、対称軸に沿う節点では変位成分の１つまたは２つが０になっている。

⑸⑴,⑵を利用する際には、全体座標系を指定し、各部材の力や変位成分はこの座標に変換して記述するとよい。

５.４　簡単なトラス構造物

　図5.5のように２部材から成るトラス構造物が荷重を受けているとき、各部材に生じる力と変位を求める。部材１，２は同一の断面積Ａとヤング率Ｅを持ち、部材２の長さをl、部材１，２の成す角をθとする。部材１の長さＬは$l / \cos\theta$である。この構造物には部材端が３つ

ある（以下、節点と呼ぶ）。

(1) 部材に生じる力と節点力

部材１，２に生じる力をF_1、F_2とする。節点②におけるｙ方向、ｘ方向の力の釣り合いは次のようになる。

ｙ方向：$F_2 \sin\theta = F$

ｘ方向：$F_2 \cos\theta + F_1 = 0$

以上より、

$F_2 = F / \sin\theta$ （引張力）

$F_1 = -F\cos\theta / \sin\theta$ （圧縮力）

節点③で壁が受ける反力（X_1、Y_1）は

$X_1 = F_2 \cos\theta = F\cos\theta / \sin\theta$

$Y_1 = -F_2 \sin\theta = -F$

節点①で壁が受ける反力（X_2、Y_2）は

$X_2 = F_1 = -F\cos\theta / \sin\theta$

$Y_2 = 0$

このように部材力は釣り合い条件だけから完全に定まる。このような構造物を静定トラスという。

(2) 変位

変位も簡単に求まる。部材１はΔlだけ縮み、$\Delta\theta$だけ（右回りに）回転するものとする。部材１の軸ひずみε_1は$-\Delta l / l$なので

$F_1 = -F\cos\theta / \sin\theta = -(\Delta l / l)(AE)$

これから

$\Delta l = \{ l / (AE) \} \cdot (F\cos\theta / \sin\theta) = l F\cos\theta / (AE \sin\theta)$

部材２はΔLだけ伸びるものとすれば、軸ひずみε_zは$\Delta L / L$なので

$F_2 = F/\sin\theta =(\Delta L/L)(AE)$

これからΔLが次のように評価できる。

$\Delta L = FL/(AE\sin\theta) = Fl/(AE\sin\theta\cos\theta)$

$\Delta\theta$は構造物が変形した後の３角形ＡＢＣにおける辺と角の関係から求めることができる：

$(L+\Delta L)^2 = (l\tan\theta)^2 + (l-\Delta l)^2 - 2(l\tan\theta)(l-\Delta l)\cos(\pi/2+\Delta\theta)$

ここで、$\Delta\theta$が小さいときには$\cos(\pi/2+\Delta\theta) = -\Delta\theta$であり、上式で、２時の微小項を省略すると次式が得られる。

$L\Delta L + l\Delta l = l^2\tan\theta\Delta\theta$

したがって、$\Delta\theta$は次のように評価される。

$\Delta\theta = F/(AE)\{(1+\cos^2\theta)/\sin^3\theta\}$

点②のｘ方向、ｙ方向への移動量をU，Vとすれば

$U = (l-\Delta l)\cos\Delta\theta - l = -\Delta l = -(lF/AE)\cot\theta$

$V = -(l-\Delta l)\sin\Delta\theta = -l\Delta\theta = -(lF/AE)\{(1+\cos^2\theta)\sin^3\theta\}$ (5.6)

問：図5.6のようなトラス構造体が荷重を受けるときの節点３の変位を求めなさい。

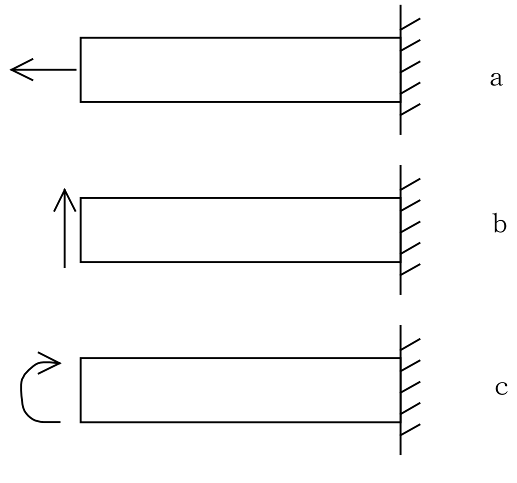

図5.1　棒に作用する荷重

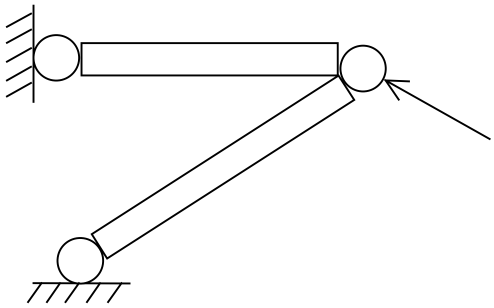

図 5.２　トラス構造の例

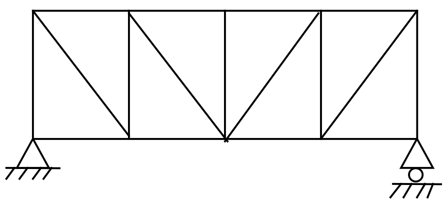

図 5.３　トラス構造（鉄橋）

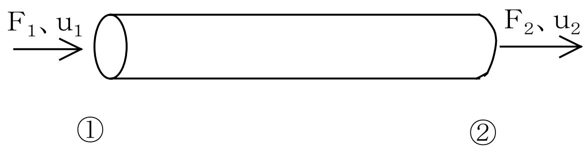

図 5.４　軸荷重を受けて軸変位をする棒

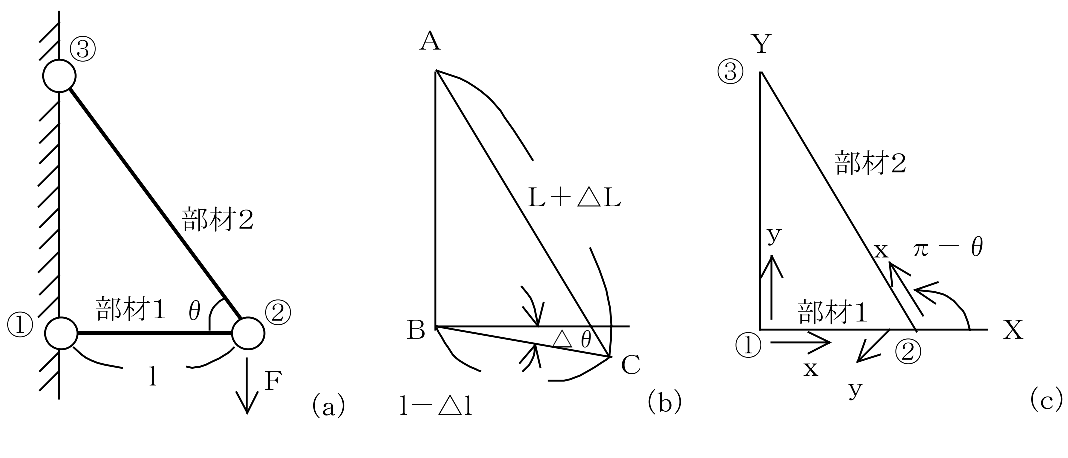

図 5.５　２部材から成るトラス（その１）

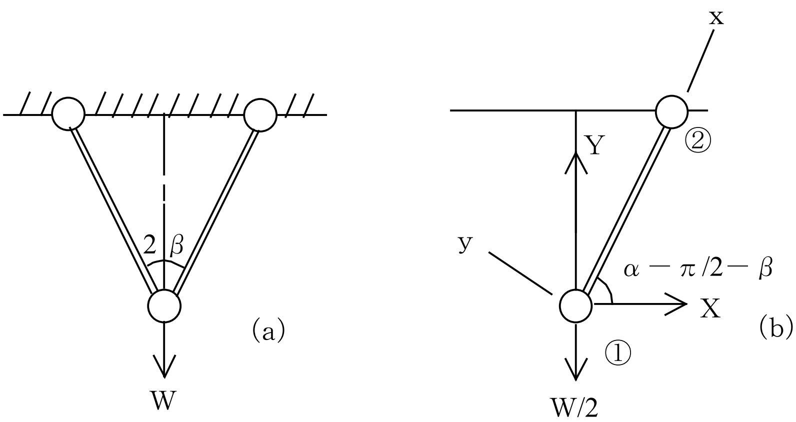

図５.６　２部材から成るトラス（その２）