

4. 均質・等方弾性体の応力とひずみの関係(構成方程式)およびひずみエネルギー

4.1 はじめに

材料が応力を受けると、それに応じてひずみが発生する。この応力とひずみの関係は、応力-ひずみの関係または構成方程式と呼ばれ、一般に材料によって異なる。しかも同一の材料でも、応力やひずみを負荷する速度によって発生するひずみ(または応力)の大きさが異なる。すなわち、ゆっくりと負荷すれば、粘性的な性質が強く現れ、速く負荷すると固体の性質が強く現れる。

以下に述べる背景があるために、ここでは等方・均質な線形弾性材料の応力-ひずみ関係だけを扱う。

(1) 関係式が簡潔なために、数学的な扱いが簡単である。

(2) 多くの(固体の)材料は、少なくとも応力が小さい間は、弾性に近い挙動をする。後の章で扱うトラス構造体や梁などではこの等方・均質な線形弾性を仮定しており、有用である。

なお、種々の力学的条件や環境の下で現れる材料の応力-ひずみ関係を調べる学問分野は、レオロジー (Rheology) と呼ばれる。

4.2 線形弾性・等方性・均質

線形弾性・・・ 或る状態から載荷し、次に載荷の分だけ除荷したとき、載荷時と同一の応力-ひずみ経路をたどり、材質や寸法・形状などが全く元の状態に戻る性質を弾性といい、このような性質を持った材料を弾性体という。弾性体の中で、応力(σ)-ひずみ(ϵ)の関係が $\sigma = E \epsilon$ のように線形になっているものを、線形弾性体という(図4.1参照)。

等方性・・・ 荷重に対する変形応答が方向によらない性質を等方性といい、このような性質を持った材料を等方性体と呼ぶ。変形応答が方向によって異なる性質を異方性といい、このような性質を持った材料は異方性体と呼ばれる。

均質・・・ 非均質に対するもので、材料中のどの場所でも応力-ひずみ関係が同一である性質は均質と呼ばれ、このような性質を持った材料は均質体と呼ばれる。場所毎に応力-ひずみ関係が異なる材料は非均質体と呼ばれる。

問題: 非均質材料の例を挙げよ。例: 鉱体と母岩から成る岩盤は非均質である。この場合、鉱体は介在物 (inclusion) と呼ばれる。なお、母岩と鉱床は均質なものもあり得る。花崗岩はmオーダーではほぼ均質といえるが、mmのスケールでは各種の鉱物の集合体であり、非均質である。このように、均質・不均質はスケールによって異なり得る。

4.3 材料試験

4.3.1 材料試験とは

材料の応力－ひずみの関係や強度を明らかにするために、その材料で作成した供試体(試験体)に荷重を負荷し、そのときのひずみ挙動や強度を調べる作業を材料試験という。材料試験では、供試体に一樣な応力が発生することが望ましい。「一樣な応力」とは、至るところ、あるいは広い範囲で応力が同一状態になっていることをいう。一樣な応力の下で材料が破壊した場合、強度は達成された最大応力の値として評価される。

一樣な応力が生じる標準的な試験法として、一軸引張(圧縮)試験、三軸試験がある。一樣な応力状態は均質な材料でしか実現することができない。

4.3.2 一軸引張(圧縮)試験下で得られる線形弾性体の応力－ひずみ関係

縦方向に長い棒状の弾性体を軸方向に引張る(圧縮する)一軸引張(圧縮)試験により得られる応力－ひずみの関係について検討する。図4.1は辺が x 、 y 、 z 軸に平行な立方体を x 軸方向に引張ったときの様子を示したものである。この場合、供試体には σ_x (軸応力)だけが生じ、残りの応力成分は発生しない。

弾性体中に発生するひずみは次のようになる。 σ_x が次第に増加するにつれ、これに比例して軸方向のひずみ ε_x が増加する。つまり、 ε_x と σ_x の関係は $\sigma - \varepsilon$ 座標で図に示すように直線になり、式で表すと次のようになる。

$$\varepsilon_x = (1/E) \cdot \sigma_x \quad (4.1)$$

式中の比例定数 $E = \sigma / \varepsilon$ はヤング率(または、縦弾性係数)と呼ばれる。ヤング率は応力と同一単位を持っている。

σ_x (つまり ε_x)とともに、 x 軸に垂直な y 、 z 方向の直ひずみ ε_y 、 ε_z が発生するが、これらのひずみは ε_x と符号が異なり、 σ_x が+のときには、 ε_y 、 ε_z は-になる(軸方向の伸びはそれに直交する断面の縮みを伴い、軸方向の圧縮はそれに直交する断面の膨れを伴う)。 ε_y 、 ε_z と ε_x の関係を式で表すと、次のようになる。

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x \quad (4.2)$$

比例定数 ν はポアソン比と呼ばれ、無次元の値で、0～0.5の範囲の値を取る。

これら以外のひずみは生じない。以上をまとめると、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= (1/E) \cdot \sigma_x \\ \varepsilon_y &= -(\nu/E) \cdot \sigma_x, \quad \varepsilon_z = -(\nu/E) \cdot \sigma_x \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

4.4 重ね合わせの原理と解の唯一性

ある弾性体に荷重Aが作用したときに生じる応力・変位 ϕ_A はただ一通りに決まる。これを解の唯一性という。

弾性体に、①荷重Aをかけてから荷重Bをかける場合、②荷重Bをかけてから荷重Aをかける場合、③荷重A,Bを同時にかける場合のいずれにおいても、生じる応力・変位は、荷重Aだけが作用したときに生じる応力・変位を ϕ_A 、荷重Bだけが作用したときに生じる応力・変位を ϕ_B とすれば、

$$\phi_A + \phi_B$$

で与えられる。つまり、複数の荷重が作用するときに生じる応力・変位は、荷重のかけ方によらず、単独の荷重の下で得られる応力・変位を単純にたし合わせたものに等しい。これを重ね合わせの原理という。弾性体においてはこの原理が成り立つ。

例：2組の方向の異なる一軸引張の重ね合わせ(図4.2参照)

荷重(A) : $[\sigma_x \neq 0, \text{残り全て} 0]$ の下で生じるひずみ:

$$\varepsilon_x = 1/E \cdot \sigma_x, \quad \varepsilon_y = -\nu/E \cdot \sigma_x, \quad \varepsilon_z = -\nu/E \cdot \sigma_x, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

荷重(B) : $[\sigma_y \neq 0, \text{残り全て} 0]$ の下で生じるひずみ:

$$\varepsilon_x = -\nu/E \cdot \sigma_y, \quad \varepsilon_y = 1/E \cdot \sigma_y, \quad \varepsilon_z = -\nu/E \cdot \sigma_y, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

荷重(A)、(B)を加えたときのひずみは重ね合わせの原理から次のようになる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 1/E \cdot (\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad \varepsilon_y = 1/E \cdot (-\nu \sigma_x + \sigma_y), \quad \varepsilon_z = -\nu/E \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \end{aligned}$$

4.5 種々の弾性定数の導入とそれらの間の関係

(1) 剛性率(G)の導入

板状の弾性体が次のような応力状態になっているものとする(図4.3a)。

$$\sigma_x = \sigma, \quad \sigma_y = -\sigma, \quad \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (4.4)$$

発生するひずみ ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$) は次のようになる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \{ (1 + \nu) \sigma \} / E = \varepsilon_0 \\ \varepsilon_y &= -\varepsilon_0 \\ \varepsilon_z &= \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

板中の正方形要素 PQRS に生じるひずみと応力に注目する。ただし、 $P(da, 0), Q(0, da), R(-da, 0), S(0, -da)$ とする。この要素の各辺のひずみおよび辺に作用する応力は次のようになる。

a) ひずみ

向きが $3\pi/4$ の PQ の直ひずみ(長さの変化)は $\varepsilon_\theta = 0$ 、せん断ひずみ($\angle SPQ$ の変化)は $\gamma_\theta = 2\varepsilon_0$

向きが $5\pi/4$ の QR の直ひずみは $\varepsilon_\theta = 0$ 、せん断ひずみは $\gamma_\theta = -2\varepsilon_0$

向きが $7\pi/4$ の RS の直ひずみは $\varepsilon_\theta = 0$ 、せん断ひずみは $\gamma_\theta = 2\varepsilon_0$

向きが $\pi/4$ の SP の直ひずみは $\varepsilon_\theta = 0$ 、せん断ひずみは $\gamma_\theta = -2\varepsilon_0$

b) 応力

法線が $\pi/4$ の PQ 面に作用する直応力は $\sigma_\theta = 0$ 、せん断応力は $\tau_\theta = -\sigma$

法線が $3\pi/4$ の QR 面に作用する直応力は $\sigma_\theta = 0$ 、せん断応力は $\tau_\theta = \sigma$

法線が $5\pi/4$ の RS 面に作用する直応力は $\sigma_\theta = 0$ 、せん断応力は $\tau_\theta = -\sigma$

法線が $7\pi/4$ の SP 面に作用する直応力は $\sigma_\theta = 0$ 、せん断応力は $\tau_\theta = \sigma$

図4.3(b)に示すように、正方形要素 PQRS には、せん断応力 (σ) のみが作用し、せん断変形のみ生じていることがわかる。これからせん断応力のみが作用したときにはせん断ひずみのみが生じ、直応力は生じないことがわかる。そして、せん断応力とせん断ひずみの関係は次のようになる。

$$\gamma_\theta = 2\varepsilon_0 = \{2(1+\nu)\sigma\}/E = \{2(1+\nu)/E\}\tau_\theta \quad (4.6)$$

上記の関係式は次のような定数を導入すれば：

$$G = E/[2(1+\nu)] \quad (4.7)$$

次式のように表すことができる。

$$\gamma_\theta = (1/G)\tau_\theta \quad (4.8)$$

定数 G はせん断応力とせん断ひずみを結びつける係数で、剛性率と呼ばれ、応力やヤング率と同じ単位を持つ。

四辺形 PQRS に作用する応力はせん断応力だけであり、このせん断応力によって生じるひずみはせん断ひずみだけである。したがって、(4.9)式は弾性体にせん断応力が発生したときの応力とひずみを結びつける関係式、つまり、せん断応力－せん断ひずみの関係式である。なお、せん断応力は直ひずみはもたらさないこともわかる。

四辺形 PQRS を 45° 回転させ、かつ辺 SP を元の辺に一致させたものが図(d)である。これから、変形は次のような特徴を持っていることがわかる。変形前の正方形は変形後ひし形となる。変形前後で辺長は変わらない。

a) 変形前の正方形の中心は変形後のひし形の中心と一致し、 x 、 y 方向への移動はない。

b) 変形前の点 Q は SP に対して次のような移動をする。

$$\text{辺 SP と平行方向に } a \cdot \sin \gamma = a \gamma, \text{ 垂直方向に } a \cdot \cos \gamma = 0 \quad (4.9)$$

(2) 完全な応力－ひずみ関係式

上述の結果と重ね合わせの原理を用いれば、次式が得られる。

$$\varepsilon_x = 1/E \cdot (\sigma_x - \nu \sigma_y - \nu \sigma_z)$$

$$\varepsilon_y = 1/E \cdot (-\nu \sigma_x + \sigma_y - \nu \sigma_z)$$

$$\varepsilon_z = 1/E \cdot (-\nu \sigma_x - \nu \sigma_y + \sigma_z)$$

$$\gamma_{xy} = 1/G \cdot \tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = 1/G \cdot \tau_{yz}$$

$$\gamma_{zx} = 1/G \cdot \tau_{zx} \quad (4.10)$$

この式は一般化されたHookeの法則、または、弾性体の完全な応力-ひずみ関係式と呼ばれる。

(3) 体積弾性率(K)の導入

いま、弾性体が

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p \quad (p > 0), \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx}$$

の静水圧的荷重を受けるとき、生じるひずみは(4.11)式より次のようになる。

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -(1-2\nu)/E \cdot p, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

次式のように定義される体積ひずみ ε_v :

$$\varepsilon_v = (\text{変形後の体積} - \text{元の体積}) / \text{元の体積}$$

は、2次以上の高次の微小量を無視すると次のようになる。

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (4.11)$$

今の場合、

$$\varepsilon_v = -3(1-2\nu)/E \cdot p$$

となるが、

$$\varepsilon_v = -1/K \cdot p$$

とおけば、

$$K = E / \{3(1-2\nu)\} \quad (4.12)$$

となる。Kは体積弾性率と呼ばれ、ヤング率Eや剛性率Gと同じ単位を持つ。

E、 ν 、G、K は弾性定数と呼ばれる。(4.8),(4.13)式からG、K は E、 ν の関数になっている。4つの弾性定数から任意に2つの弾性定数を選んだ場合、これを基に残り2つの弾性定数が決まる。つまり等方線形弾性体の独立な弾性定数は2個である。

4.6 種々の拘束条件下における応力とひずみの関係

(1) 平面応力状態(図4.4a参照)

z軸に垂直な薄板が面内(xy面)でのみ载荷されている場合には、次の条件が満たされている。

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \quad (4.13)$$

この条件を満たす応力状態は平面応力状態と呼ばれる。これを、(4.11)式の一般化された応力とひずみに代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 1/E \cdot \sigma_x - \nu/E \cdot \sigma_y \\ \varepsilon_y &= -\nu/E \cdot \sigma_x + 1/E \cdot \sigma_y \\ \gamma_{xy} &= 1/G \cdot \tau_{xy} \\ \varepsilon_z &= -\nu/E \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned} \quad (4.14)$$

物体の表面で平らになっており、そこに荷重が作用していなければ(自由面になっていれば)、面に垂直方向にz軸を取ると $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ なので、面を含み面に平行な薄肉の領域では平面応力状態になっている。表面におけるひずみ ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$) が測定されれば、これに対応する(面内)応力は次のように評価される。

$$\sigma_x = E/(1-\nu^2) \cdot \varepsilon_x + \nu E/(1-\nu^2) \cdot \varepsilon_y$$

$$\sigma_y = \nu E/(1-\nu^2) \cdot \varepsilon_x + E/(1-\nu^2) \cdot \varepsilon_y$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

(2) 平面ひずみ状態(図4.4b参照)

構造物中の至るところで次の条件が満たされているときの応力状態は、平面ひずみ状態と呼ばれる。

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{zy} = 0 \quad (4.15)$$

構造物がz軸に沿って長く、かつどのz断面でも断面形状が同一で、しかも同一の面内(xy面)荷重を受けるとき、この状態が実現される。このとき、 $\varepsilon_z = 0$ を(4.11)式に代入すれば次式が得られる。

$$\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y) \quad (4.16)$$

これを(4.10)式の一般化された応力-ひずみの関係式に代入すれば次式が得られる。

$$\varepsilon_x = \{(1-\nu^2)/E\} \cdot \sigma_x - \{\nu(1+\nu)/E\} \cdot \sigma_y$$

$$\varepsilon_y = -\{\nu(1+\nu)/E\} \cdot \sigma_x + \{(1-\nu^2)/E\} \cdot \sigma_y$$

$$\gamma_{xy} = (1/G) \cdot \tau_{xy} \quad (4.17)$$

この式は平面ひずみ条件における面内応力-ひずみの関係を与える。

4.7 演習問題

- (1) 図4.5(a)に示すように、直方体状の弾性体に対し周囲から圧力pをかけつつ軸応力 σ を負荷するときに生じるひずみは？ただし、弾性体のヤング率をE, ポアソン比を ν とする。
- (2) 図4.5(a)に示す直方体状の弾性体がぴったりと収まる剛な容器(図4.5b)に入れた後、軸応力 σ (ただし圧縮)を負荷するときに生じる応力は？
- (3) 図4.6に示すような荷重を受けているヤング率 $E=1 \times 10^4 \text{MPa}$ 、ポアソン比 $\nu=0.2$ の板状をした弾性体の(平面状の)表面にロゼットひずみゲージを貼付した後、除荷したところ次のようなひずみの測定値を得た。ゲージ付近の構造物中に生じていた応力は？

$$\varepsilon_0 = 60 \times 10^{-6}, \quad \varepsilon_{45} = 80 \times 10^{-6}, \quad \varepsilon_{90} = 20 \times 10^{-6}$$

4.8 ひずみエネルギー

4.8.1 仕事とエネルギー

縮んだバネは仕事をする能力を持っている。同様に、歪んだ状態にある弾性体は仕事をする能力

を持っており、この能力の大きさをエネルギーという。仕事とエネルギーは次のように定義される。

(1) 仕事：

力 F の作用の下で S だけ移動したとき、力 F は

$$W = F \cdot S = F S \cos \theta \quad (4.18)$$

の大きさの仕事をしたという。 $\cos \theta$ は力と変位のなす方向余弦である。

仕事の単位は $J = N \cdot m$ である。1 J (ジュール) は 1 N の力で物体を力の作用方向に 1 m 動かすときの仕事量と定義される (1 N は質量 1 kg の物体に働き $1 m/s^2$ の加速度を生じるような力の大きさである)。小さなエネルギーを表す単位として erg ($1 \text{ erg} = 10^{-7} J$) がある。また、kgfm も使われる (g は重力加速度で、 $1 g = 9.81 m/s^2 = 9.81 N/kg$)。1 kgfm と J の間には次の関係がある。

$$1 \text{ kgfm} = 1 \text{ kg} \cdot g \cdot m = 1 \cdot 9.81 N \cdot m = 9.81 J$$

dW/dt は仕事率 (工率) と呼ばれる。仕事率の単位は $W = J/s$

(2) エネルギー：

縮んだバネの持つエネルギーは位置エネルギーの一種である。

ここでは、主に弾性体に作用する外力が弾性体に対してなす仕事と、それによって弾性体に貯えられるエネルギーの大きさ、およびエネルギーに関する法則について述べる。

4.8.2 ひずみエネルギー

図4.7aに示すように、弾性体に薄い氷板を次々に乗せていくときに弾性体が見せる挙動を考える。弾性体に作用する荷重は0から次第に大きくなるが、荷重が F になったとき、載荷点は $u(F)$ だけ変位するものとする。この場合、荷重 F のなす仕事 W は(4.18)式の定義から次式のように評価される。

$$W = \int F du \quad (4.19)$$

荷重が F_0 に達したとき、氷の載った弾性体を室温が数 °C の部屋に放置すれば、氷は次第に融け、荷重が小さくなる。これにつれて、弾性体は元の形状に向かって変形する。このとき氷に注目すると、氷は (重力に逆らい) 上方に移動するので、弾性体は (氷に対して) 仕事をしていることがわかる。氷の荷重が F から $F - dF$ になる過程で、 du だけ変位したとすれば、この変位をする間に弾性体がなした仕事は

$$W = F du$$

で与えられる。弾性体はひずむことによって仕事をする能力をつまりエネルギーを蓄えていたことがわかる。このエネルギーは「弾性ひずみエネルギー」と呼ばれる。

氷が完全に溶けるまでに弾性体が (氷に対して) のなした仕事は、明らかに

$$W = \int F du$$

である (図4.8参照)。氷が溶けた段階で、弾性体は元の形状に復帰し、もはや仕事をする能力はな

い。したがって、荷重が F_0 に達したとき弾性体に蓄えられた弾性ひずみエネルギー U は、

$$U=W \quad (4.20)$$

であることがわかる。(4.21)式を導く際に、荷重 F として氷の重量を考えたが、外力であればどのようなものでもかまわないことは明らかである。

4.8.3 単軸荷重に伴って生じるひずみエネルギー

図4.7(a)に示すように、断面積が S 、長さが L 、ヤング率が E であるような線形弾性体が荷重 F_0 を受けた場合、この弾性体に発生するひずみエネルギー U は、明らかに

$$U=(1/2) F_0 u_0 \quad (4.21)$$

である(図4.8参照)。図の弾性体の場合、

$$F_0 = \sigma_0 S, \quad u_0 = L \varepsilon_0 = L (\sigma_0 / E)$$

なので、 U は次のようにも表現できる。

$$\begin{aligned} U &= (1/2) F_0 u_0 = 1/2 (\sigma_0 S) (L \varepsilon_0) = (1/2) (\sigma_0 \varepsilon_0) (S L) \\ &= (1/2) (\sigma_0 \varepsilon_0) V \end{aligned}$$

ここに、 $V=SL$ (体積)

上式において、

$$U_0 = (1/2) (\sigma_0 \varepsilon_0) \quad (4.22)$$

は単位体積当たりの弾性ひずみエネルギーである。 U_0 はまた次のようにも表すことができる。

$$U_0 = (1/2) (\sigma_0 \varepsilon_0) = (1/2) E (\varepsilon_0^2) = (1/2 E) (\sigma_0^2) \quad (4.23)$$

4.8.4 せん断応力に伴って生じるひずみエネルギー

せん断応力 τ によって1辺が a (奥行きが1) であるような正方形断面をした剛性率が G であるような弾性体に生じるひずみエネルギーを考える(図4.3c参照)。せん断応力の下でせん断ひずみのみが発生するが、その大きさは(4.9)式から次のようになる。

$$\gamma = (1/G) \tau$$

弾性体にこのひずみを生じさせるために、弾性体の辺QRには大きさが τa の外力が作用し、それによって、辺QRは γa だけ移動する。したがって、外力のなした仕事 W は

$$W = (1/2) (\tau a) (\gamma a) = (1/2) (\tau \gamma) a^2$$

上式で係数(1/2)は、弾性体に作用する外力は0から τa に増加することに対応している。また、この弾性体の体積は a^2 であることに注意すると、(4.21)式から、弾性体に生じている単位体積当たりのひずみエネルギー U_0 は次式で与えられることがわかる。

$$U_0 = W = (1/2) (\tau \gamma) \quad (4.24)$$

なお、弾性体の辺RS、PQの辺に平行な方向への変位量(移動量)は(4.10)式から無視できるほど小さいので、これらの辺に作用する外力のなす仕事は無視し得る。したがって、ひずみエネルギー量は(4.

24) 式だけとなる。

4. 8. 5 組み合わせ応力に伴って生じるひずみエネルギー

いま、立方体状の弾性体に

$$(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$$

なる応力が作用し、ひずみ

$$(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$$

が生じているとき、弾性体に生じるひずみエネルギーは個々の応力の下で発生するひずみエネルギーを加え合せばよい。

まずx方向に作用する応力 σ_x がなす仕事を考える。x方向の変位に対して(4.24)式で与えられる仕事をする。y、z方向の変位はx方向に直交するのでこれらの変位に対しては仕事をしない。また、せん断応力が作用しても立方体は伸縮しないので(4.5(1)参照)、せん断応力により生じる変位に対しても仕事をしない。

次に、せん断応力 τ_{xy} は(4.25)式で与えられる仕事をするが、他のせん断応力は、せん断応力 τ_{xy} の作用方向と直交する変位しかもたらさないで、これらの変位に対しては仕事をしない。また、直応力によりもたらされる立方体を構成する各面の中心の変位は0である。したがって、これらの変位に対してもせん断応力 τ_{xy} は仕事をしない。

以上の考察から、応力： $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$ の下で発生するひずみエネルギーは次式のようにになる。

$$U=1/2 (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \quad (4.25)$$

問題：(4.25)式をひずみの関数として表現しなさい。

例題1：単位体積当たりの弾性ひずみエネルギーを応力で表示しなさい。

解：弾性体のヤング率をE、ポアソン比を ν とすれば、一般化されたHookeの法則から、ひずみは次のように応力の関数として表すことができる。

$$\varepsilon_x = (\sigma_x - \nu \sigma_y - \nu \sigma_z)/E \cdots, \quad \gamma_{xy} = \tau_{xy}/G \cdots \quad (4.26)$$

(4.26)式を(4.25)式に代入すれば次式が得られる。

$$U_o = \{ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) \} / (2E) \\ + (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) / (2G) \quad (4.27)$$

問題1 単位体積当たりの弾性ひずみエネルギーをひずみで表示しなさい。

解 一般化されたHookeの法則から、応力は次のようにひずみの関数として表すことができる。

$$\sigma_x = \{ (1-\nu) \varepsilon_x + \nu \varepsilon_y + \nu \varepsilon_z \} \{ E / (1-\nu-2\nu^2) \} \cdots, \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy} \cdots \quad (4.28)$$

(4.28) 式を (4.25) 式に代入すれば次式が得られる。

$$U_0 = \{ (1-\nu) (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + 2\nu (\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x) \} E / \{ 2(1-\nu-2\nu^2) \} \\ + (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) G / 2 \quad (4.29)$$

問題2 $\partial U_0 / \partial \varepsilon_x = \sigma_x$ ……を証明しなさい。

解 (4.30) 式において、

$$\partial U_0 / \partial \varepsilon_x = \{ (1-\nu) \varepsilon_x + \nu (\varepsilon_y + \varepsilon_z) \} E / (1-\nu-2\nu^2)$$

(4.10) 式から、これは σ_x に等しい。

例題2：質量 W (kg)、高さ h (m) 半径 r (m) の円錐体が天井に固定されているとき(図4.9)、この物体に蓄えられているひずみエネルギーを求めなさい

解：頂点からの長さを x 、そこの半径を y とすれば ($y = rx/h$)、

$$x \text{ における断面積 } S \text{ は、 } S = \pi y^2 = \pi (r/h)^2 x^2$$

また、この断面積に作用する力 F は $F = W(x/h)^3 g$

発生している応力は一軸的で σ_x のみが0でない。

$$\text{応力 } \sigma_x = F/S = Wg(x/h)^3 / (\pi y^2)$$

$$= Wgx / (\pi h r^2)$$

$$\text{ひずみエネルギー } U = (1/2E) \int S \sigma_x^2 dx$$

$$= (Wg)^2 / (2E \pi h^4 r^2) \cdot \int x^4 dx$$

$$= (Wg)^2 h / (10E \pi r^2)$$

問題 (応力-ひずみの関係) 質量 W (kg)、高さ h (m) 半径 r (m) の円柱形をした弾性体 (ヤング率 E , ポアソン比 ν) の端面が天井に固定されている(図)。以下の問いに答えなさい。

- ① この物体は元の長さに比べてどれくらい伸びているか、②弾性体に蓄えられているひずみエネルギーの大きさはいくらか、③絶対値が最大の直応力はいくらか

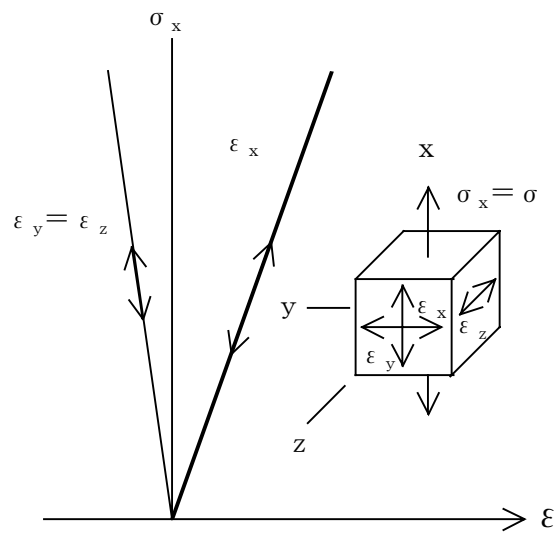


図4.1 線形弾性体の一軸引張によって得られる応力-ひずみ線図

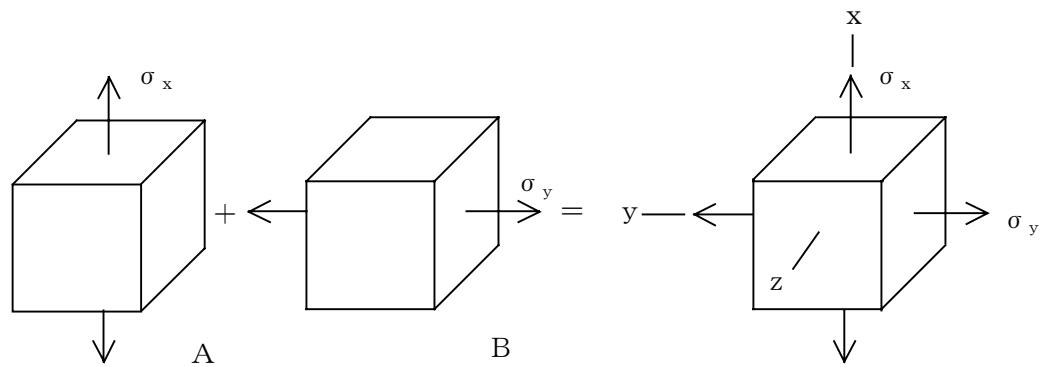


図4.2 重ね合せの原理

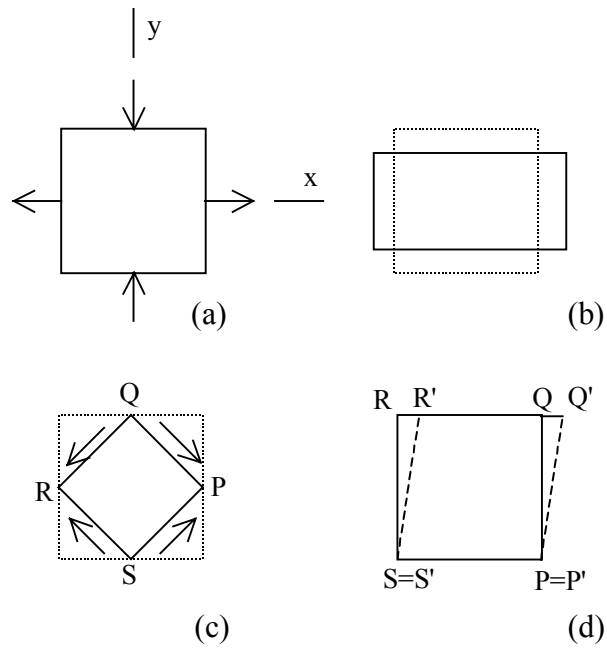


図4.3 $(\sigma_x = \sigma, \sigma_y = -\sigma, \tau_{xy} = 0)$ の応力状態 (a) とこれによって生じるひずみ状態 $(\epsilon_x = \epsilon, \epsilon_y = -\epsilon, \gamma_{xy} = 0)$ (b)。正方形PQRSに注目すると、この辺にはせん断応力しか作用していない (c)。変形前の正方形PQRSは変形後P'Q'R'S'に変わる (d)。図はSPとS'P'を一致させて表した。

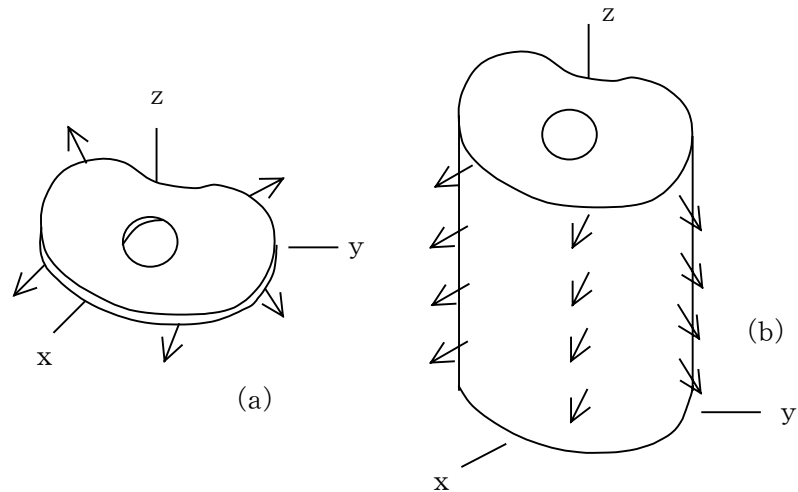


図4.4 平面応力状態 (a) と平面ひずみ状態 (b)

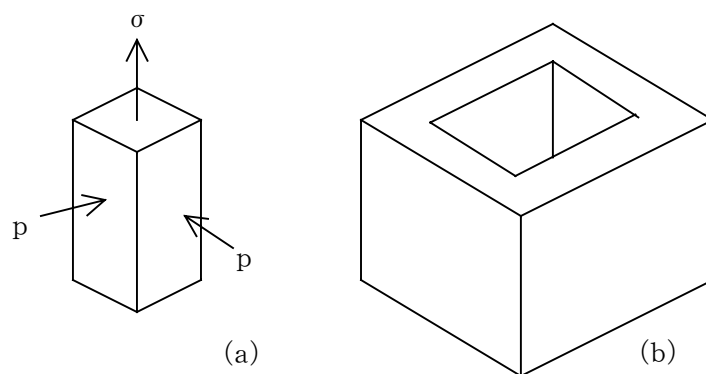


図4.5 演習問題 (1), (2)

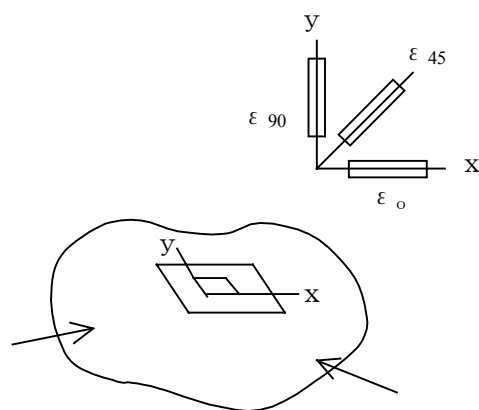


図4.6 演習問題 (3)

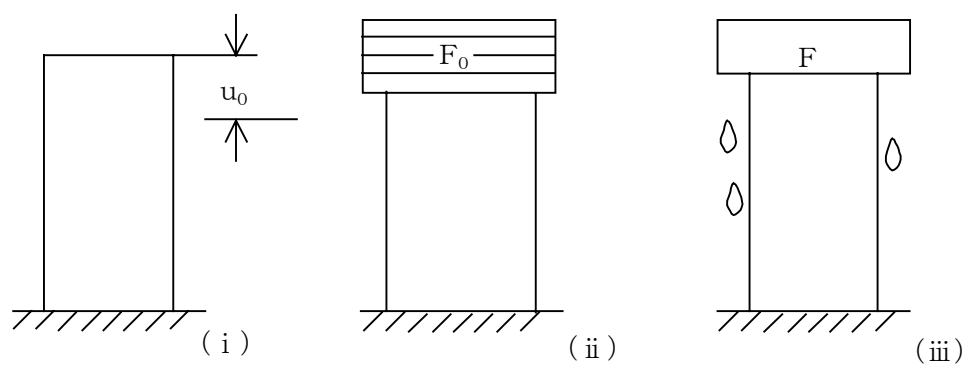


図4.7 矩形の弾性体に重量が F になるまで氷板を載せてゆき、その後、室温に放置するとき弾性体を示す挙動。

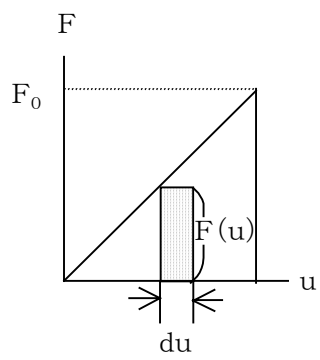


図4. 8 載荷過程で外力 F が弾性体に対してなした仕事 W

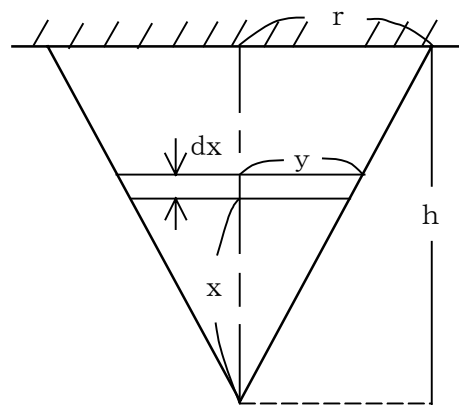


図4. 9 天井に固定された円錐