

3. 変位とひずみ

3.1 変位関数

構造物は外力の作用の下で変形する。いま、この変形により構造物内の任意の点P(x, y, z)が P'(x', y', z')に移動したものとする(図3.1参照)。(x, y, z)は変形前の点Pの座標、(x', y', z')は変形後の座標である。このとき、次式で示される変形前後の座標の差

$$\begin{aligned}u_x &= x' - x \\u_y &= y' - y \\u_z &= z' - z\end{aligned}\tag{3.1}$$

を変位成分と呼ぶ。変位(u_x, u_y, u_z)は向きを持っておりベクトル量である。構造物が連続体であれば、変位成分 $u_x(x, y, z)$ 、 $u_y(x, y, z)$ 、 $u_z(x, y, z)$ は連続関数になっている(変位関数と呼ばれる)。

3.2 ひずみ

3.2.1 変形とひずみ

構造物が外力を受けると、構造物中の各点は移動(変位)する。また、外力を受ける前と後では、構造物の形状は一般には一致しない。この差異が変形である。変形は一見複雑そうに見える。しかし、後で証明するように、構造物の微小な領域に注目すると、変形は、長さの変化(伸縮)と角の変化の2つから成り立っており、これが場所ごとに違うために、構造物全体としてみると変形が複雑であるように見えるのである*。変形をもたらす長さの変化および角の変化の程度をひずみという。

所与の向きを持った長さ1の線分が、変形後、長さが $1+\Delta l$ になったものとする(図3.1参照)。この線分の伸縮の程度を、直ひずみと呼び、次式のように定義する。

$$\{(1+\Delta l) - 1\} / 1 = \Delta l / 1\tag{3.2}$$

この直ひずみには ϵ という記号を用いるのが普通である。

変形に伴い、所与の向きを持った線分とその一端から出た法線方向の線のなす角度が、直角から γ だけ減少し、 $\pi/2 - \gamma$ になったものとする。このとき、角の変化量 γ をせん断ひずみと呼ぶ。

せん断ひずみには γ という記号を用いるのが普通である。

~~~~~

\*構造物にあらかじめ格子状の線を細かく引いておけば、変形後、元の正方形は平行四辺形に変わっていることがわかるであろう。変形の成分は、長さと角の変化であることが理解される。

### 3.2.2 1点におけるひずみの定義（その1）－ $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$ の定義

ひずみは、構造物の中で変化しているのが一般的である。このために、応力と同様に、構造物内の任意の点で定義できるようにした方がよい。また、応力と同様に、一つの点に注目しても、ひずみは向きによって値が異なる。これらを勘案し、ある任意点Pにおけるひずみ成分 $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$ を以下のように定義する\*。

いま、構造物中の任意の1点Pに注目する（図3.2参照）。変形前のこの点の座標を $P(x, y)$ とする。点Pの近傍に2つの点 $Q(x+\delta x, y)$ ,  $R(x, y+\delta y)$ を考える。ここに、 $\delta x$ ,  $\delta y$ は十分に小さい寸法とする。変形により、これら3点は変位し、 $P'$ 、 $Q'$ 、 $R'$ に移ったものとする。点Pにおけるx方向のひずみ成分 $(\varepsilon_x, \gamma_{xy})$ は次のように定義される。

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \lim_{Q \rightarrow P} \{ (Q'P') - (QP) \} / (QP) \\ \gamma_{xy} &= \lim_{Q \rightarrow P, R \rightarrow P} \{ \angle QPR - \angle Q'P'R' \} \quad (3.3)\end{aligned}$$

また、点Pにおけるy方向の直ひずみ成分 $\varepsilon_y$ は次のように定義される。

$$\varepsilon_y = \lim_{R \rightarrow P} \{ (R'P') - (RP) \} / (RP) \quad (3.3)'$$

ひずみ成分 $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$ の向きを示すと図3.4(a)のようになる。

\* $\gamma_{yx}$ は定義しないことにする。

### 3.2.3 ひずみと変位の関係

$(x, y)$ 座標で定義される変位関数を $(u_x, u_y)$ とする。図3.2に示す3点P, Q, Rの変位後の座標は次のように表される。

$$\begin{aligned}P' : & \begin{array}{ll} x \text{ 座標} & x + u_x(x, y) \\ y \text{ 座標} & y + u_y(x, y) \end{array} \\ Q' : & \begin{array}{ll} x \text{ 座標} & x + \delta x + u_x(x + \delta x, y) \\ y \text{ 座標} & y + u_y(x + \delta x, y) \end{array} \\ R' : & \begin{array}{ll} x \text{ 座標} & x + u_x(x, y + \delta y) \\ y \text{ 座標} & y + \delta y + u_y(x, y + \delta y) \end{array} \quad (3.4)\end{aligned}$$

なお、点P'からx軸に平行に引いた線上に点Q'から降ろした垂線と線の交点を点Q'', 点P'からy軸に平行に引いた線上に点R'から降ろした垂線と線の交点を点R''とする。

#### (a) 直ひずみ $\varepsilon_x$ と変位の関係

$Q''P'$ のx方向成分は、(3.4)式から

$$Q''P' = \delta x + u_x(x + \delta x, y) - u_x(x, y)$$

これを(3.3)式に代入すれば次式が得られる。

$$\varepsilon_x = \lim_{Q \rightarrow P} \{ (u_x(x + \delta x, y) - u_x(x, y)) / \delta x \}$$

ここで、 $u_x(x + \delta x, y)$ はTaylor展開を用い、一次微小項まで取るものとすれば、次のように表すことができる。

$$u_x(x + \delta x, y) = u_x(x, y) + \partial u_x(x, y) / \partial x \cdot \delta x$$

これを上式に代入すると次式が得られる。

$$\varepsilon_x = \partial u_x(x, y) / \partial x \quad (3.5)$$

(b) せん断ひずみ  $\gamma_{xy}$  と変位の関係

(3.3) 式のせん断ひずみの定義から、

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \lim(\pi/2 - \angle Q'P'R') \\ &= \lim(\angle Q'P'Q' + \angle R'P'R') \\ \angle Q'P'Q' &= \tan^{-1}[(Q'-P' \text{ の } y \text{ 座標}) / (Q'-P' \text{ の } x \text{ 座標})] \\ \angle R'P'R' &= \tan^{-1}[(R'-P' \text{ の } x \text{ 座標}) / (R'-P' \text{ の } y \text{ 座標})] \end{aligned}$$

$Q'-P'$  の  $y$  座標および  $Q'-P'$  の  $x$  座標は、

$$\begin{aligned} Q'-P' \text{ の } y \text{ 座標} &= u_y(x + \delta x, y) - u_y(x, y) \\ Q'-P' \text{ の } x \text{ 座標} &= \delta x + u_x(x + \delta x, y) - u_x(x, y) \end{aligned}$$

$R'-P'$  の  $y$  座標、 $R'-P'$  の  $x$  座標は、

$$\begin{aligned} R'-P' \text{ の } y \text{ 座標} &= \delta y + u_y(x, y + \delta y) - u_y(x, y) \\ R'-P' \text{ の } x \text{ 座標} &= u_x(x, y + \delta y) - u_x(x, y) \end{aligned}$$

ここで、 $u_y(x, y + \delta y)$  は Taylor 展開を用い、一次微小項まで取るものとすれば、次のように表すことができる。

$$u_y(x, y + \delta y) = u_y(x, y) + \{\partial u_y(x, y) / \partial y\} \cdot \delta y$$

これを定式に代入すると次式が得られる。

$$(Q'-P' \text{ の } y \text{ 座標}) / (Q'-P' \text{ の } x \text{ 座標}) = [u_y(x + \delta x, y) - u_y(x, y)] / [\{1 + \partial u_x(x, y) / \partial x\} \delta x]$$

$\partial u_x(x, y) / \partial x$  は 1 に比べて十分小さいと仮定できるので、

$$\begin{aligned} (Q'-P' \text{ の } y \text{ 座標}) / (Q'-P' \text{ の } x \text{ 座標}) &= [u_y(x + \delta x, y) - u_y(x, y)] / \delta x \\ \angle Q'P'Q' &= [\tan^{-1} \{(Q'-P' \text{ の } y \text{ 座標}) / (Q'-P' \text{ の } x \text{ 座標})\}] \\ &\doteq \lim[u_y(x + \delta x, y) - u_y(x, y)] / \delta x \\ \lim[\angle Q'P'Q'] &= \partial u_y(x, y) / \partial x \end{aligned}$$

同じように、

$$\begin{aligned} (R'-P' \text{ の } x \text{ 座標}) / (R'-P' \text{ の } y \text{ 座標}) &= [u_x(x, y + \delta y) - u_x(x, y)] / \delta y \\ \lim[\angle R'P'R'] &= \partial u_x(x, y) / \partial y \end{aligned}$$

(3.3) 式から

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \lim\{\angle Q'P'Q' + \angle R'P'R'\} \\ &= \partial u_y(x, y) / \partial x + \partial u_x(x, y) / \partial y \end{aligned} \quad (3.5)'$$

得られた結果を纏めて示すと次のようになる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \partial u_x(x, y) / \partial x \\ \gamma_{xy} &= \partial u_y(x, y) / \partial x + \partial u_x(x, y) / \partial y \end{aligned} \quad (3.5)''$$

ひずみは 2 成分とも変位の 1 次微分になっている。せん断ひずみは元々角の変化として定義され

ているが、変化量が微小であれば、(長さの変化/長さ)に等しいので、直ひずみと同じ単位になっていることに注意されたい。

### 3.2.4 変位とひずみの単位と符号

変位の単位は長さで、ひずみの単位は定義から (変位) / 長さ = (長さ) / 長さなので、無次元である。

変位成分の符号は、座標軸の正の向きになっていれば+、逆向きであれば-とする。ひずみの符号は、直ひずみの場合、伸びを+、縮みを-とする。せん断ひずみは直角の減少を+、増加を-と約束する。ひずみは、応力と同様に、考える点と向きを指定して初めて定まる(テンソル量である)。

### 3.3 任意点Pにおける $\theta$ 方向( $x$ 軸から反時計回りに測って)の2つのひずみ成分( $\varepsilon_\theta, \gamma_\theta$ )とひずみ成分( $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ )との関係

#### 3.3.1 任意点P(x,y)における( $\varepsilon_\theta, \gamma_\theta$ )の定義

点Pから $x$ 軸から反時計回りに測って $\theta$ 方向の線上において点Pの近傍に1点Qを、 $\theta + \pi/2$ 方向の線上において点Pの近傍に1点Rを取る(図3.3参照)。また、PQ、PRに平行に(局座標OXY)をとる。この局座標を用いると各点は次のように表される。

$$P(0, 0)$$

$$Q(dX, 0)$$

$$R(0, dY)$$

点Pの $\theta$ 方向のひずみ( $\varepsilon_\theta, \gamma_\theta$ )を次のように定義する(図3.4(b)参照)。

$$\varepsilon_\theta = \lim_{(Q \rightarrow P)} \frac{\{(Q'P') - (QP)\}}{(QP)}$$

$$\gamma_\theta = \lim_{(Q \rightarrow P, R \rightarrow P)} \{ \angle Q'P'R' - \angle QPR \} \quad (3.6)$$

#### 3.3.2 任意点P(x,y)における( $\varepsilon_\theta, \gamma_\theta$ )と( $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ )との関係

明らかに、( $\varepsilon_\theta, \gamma_\theta$ )は次のように表現できる。

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_X$$

$$\gamma_\theta = \gamma_{XY} \quad (3.7)$$

(3.5)式より、次式が成立する。

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_X = \partial U_X(X, Y) / \partial X$$

$$\gamma_\theta = \gamma_{XY} = \partial U_Y(X, Y) / \partial X + \partial U_X(X, Y) / \partial Y \quad (3.8)$$

ここに、( $U_X, U_Y$ )は(0, XY)座標で定義される(X, Y)方向の変位成分である。

2つの直交座標：(0-x y)と(0-XY)の間には、

$$\begin{aligned}
X &= x \cos \theta + y \sin \theta \\
Y &= -x \sin \theta + y \cos \theta
\end{aligned} \tag{3.9}$$

が成立する。あるいは、

$$\begin{aligned}
x &= X \cos \theta - Y \sin \theta \\
y &= X \sin \theta + Y \cos \theta
\end{aligned} \tag{3.9}'$$

また、(0-XY) 座標で定義される変位成分 ( $U_x, U_y$ ) についても、( $u_x, u_y$ ) との間に

$$\begin{aligned}
U_x &= u_x \cos \theta + u_y \sin \theta \\
U_y &= -u_x \sin \theta + u_y \cos \theta
\end{aligned} \tag{3.10}$$

が成立する。

(3.8)式に(3.9)、(3.10)式を代入すれば次式が得られる。

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_X = \partial U_x / \partial X = \partial U_x / \partial x \cdot \partial x / \partial X + \partial U_x / \partial y \cdot \partial y / \partial X$$

ここで(3.9)'式から、

$$\partial x / \partial X = \cos \theta, \quad \partial y / \partial X = \sin \theta \tag{3.11}$$

これと(3.9)式を利用して上式を整理すると、以下の評価が得られる。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\theta &= \partial U_x / \partial x \cdot \partial x / \partial X + \partial U_x / \partial y \cdot \partial y / \partial X \\
&= \{ \partial u_x / \partial x \cdot \cos \theta + \partial u_y / \partial x \cdot \sin \theta \} \cos \theta \\
&\quad + \{ \partial u_x / \partial y \cdot \cos \theta + \partial u_y / \partial y \cdot \sin \theta \} \sin \theta \\
&= \{ \varepsilon_x \cdot \cos \theta + \partial u_y / \partial x \cdot \sin \theta \} \cos \theta \\
&\quad + \{ \partial u_x / \partial y \cdot \cos \theta + \varepsilon_y \cdot \sin \theta \} \sin \theta \\
&= \varepsilon_x \cos^2 \theta + (\partial u_y / \partial x + \partial u_x / \partial y) \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta \\
&= \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta \\
&= (\varepsilon_x + \varepsilon_y) / 2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_y) / 2 \cdot \cos 2\theta + \gamma_{xy} / 2 \cdot \sin 2\theta
\end{aligned} \tag{3.12}$$

同様に、次式が導かれる。

$$\begin{aligned}
\gamma_{\theta/2} &= \gamma_{XY} / 2 \\
&= -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) / 2 \cdot \sin 2\theta + \gamma_{xy} / 2 \cdot \cos 2\theta
\end{aligned} \tag{3.13}$$

このひずみの関係式に、対応する応力：

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\theta &\longleftrightarrow \sigma_\theta \\
\gamma_{\theta/2} &\longleftrightarrow \tau_\theta \\
\varepsilon_x &\longleftrightarrow \sigma_x \\
\varepsilon_y &\longleftrightarrow \sigma_y \\
\gamma_{xy} / 2 &\longleftrightarrow \tau_{xy}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

を代入すれば、先に求めた応力の関係式が得られる。このように応力とひずみの間には、完全な対

応関係がある。したがって、応力で得られた性質はひずみにも成立する。

問：次の関係式が成立することを確認しなさい。

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\theta}(\theta=0) &= \varepsilon_x, \quad \gamma_{\theta}(\theta=0)/2 = \gamma_{xy}/2, \\ \varepsilon_{\theta}(\theta=\pi/2) &= \varepsilon_y, \quad \gamma_{\theta}(\theta=\pi/2)/2 = -\gamma_{xy}/2\end{aligned}\quad (3.15)$$

### 3.4 主ひずみ、最大せん断ひずみ、ひずみのMohr円

#### 3.4.1 ひずみのMohr円 (図3.4参照)

(3.12)式を次のように変形する。

$$\varepsilon_{\theta} - (\varepsilon_x + \varepsilon_y)/2 = (\varepsilon_x - \varepsilon_y)/2 \cdot \cos 2\theta + \gamma_{xy}/2 \cdot \sin 2\theta \quad (3.12)'$$

(3.12)' と (3.13)式をそれぞれ2乗した後、和をとると次式が得られる。

$$\{\varepsilon_{\theta} - (\varepsilon_x + \varepsilon_y)/2\}^2 + (\gamma_{\theta}/2)^2 = \{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)/2\}^2 + (\gamma_{xy}/2)^2$$

これは、ある点の $\theta$ 方向のひずみ $(\varepsilon_{\theta}, \gamma_{\theta}/2)$ は、 $(\varepsilon - \gamma/2)$ 座標で円上の1点として表されることを意味する。この円の中心 $(\varepsilon_m, 0)$ と半径 $r$ は次のようになる。

$$\varepsilon_m = (\varepsilon_x + \varepsilon_y)/2, \quad r = [\{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)/2\}^2 + (\gamma_{xy}/2)^2]^{1/2} \quad (3.16)$$

この円はひずみのMohr円と呼ばれる。

$\theta=0$ の方向のひずみ $(\varepsilon_{\theta}, \gamma_{\theta}/2)$ は、(3.15)式より $(\varepsilon_x, \gamma_{xy}/2)$ で与えられるが、もちろんこの点はMohr円上に位置する。任意の $\theta$ 方向のひずみ $(\varepsilon_{\theta}, \gamma_{\theta}/2)$ は、Mohr円では、2.5節(2)より、Mohr円上の点 $(\varepsilon_x, \gamma_{xy}/2)$ から時計周りに $2\theta$ 回転した円上の点に対応する(図3.4©参照)。

#### 3.4.2 ひずみのMohr円の描き方

$\theta=\pi/2$ 方向のひずみは、(3.12)式より $(\varepsilon_y, -\gamma_{xy}/2)$ で与えられる。このひずみは、上述したように、ひずみのMohr円では $\theta=0$ の $(\varepsilon_x, \gamma_{xy}/2)$ から $\pi$ だけ回転した点に位置する。このことから、ひずみのMohr円は、 $(\varepsilon - \gamma/2)$ 座標において、2点：

$$(\varepsilon_x, \gamma_{xy}/2), (\varepsilon_y, -\gamma_{xy}/2) \quad (3.17)$$

を直径の両端とする円として与えられる。

#### 3.4.3 主ひずみとその向き

特に、ひずみのMohr円が $\varepsilon$ 軸と交わる2つの点では、せん断ひずみが0となっており、直ひずみは、最大・最小値を取る。これらの最大・最小の直ひずみを主ひずみ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ と呼ぶ。両者の値は明らかに、次式で与えられる。

$$\varepsilon_{1,2} = (\varepsilon_x + \varepsilon_y)/2 \pm [\{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)/2\}^2 + (\gamma_{xy}/2)^2]^{1/2} \quad (3.18)$$

ひずみのMohr円上で、主ひずみ  $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$ に対応する点は互いに  $\pi$  だけ離れている。これは3.4.1で述べたように、物理場では、 $\pi/2$  だけ離れていることを意味する。つまり、2つの主ひずみは直交している。また、ひずみのMohr円において、 $x$  軸方向のひずみに対応する点  $(\varepsilon_x, \gamma_{xy}/2)$  から時計周りに  $\varepsilon$  軸の正の向きまで測った角度を  $2\alpha$  とすれば、主ひずみ  $\varepsilon_1$  は  $x$  軸から反時計周りに  $\alpha$  だけ傾いている。

主ひずみ  $\varepsilon_1$  の方向  $\alpha$  ではせん断ひずみ  $\gamma_\theta$  が0なので、(3.13)式から

$$\tan 2\alpha = \gamma_{xy} / (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \quad (3.19)$$

を満たさなければならない。このように計算で  $\alpha$  を求めることもできる。ただし、(3.19)式を満たす  $\alpha$  は多数あるので、その中から正解を探す必要がある。

問題：最大せん断ひずみ  $\gamma_{\max}$  の大きさとそれが生じる向きを求めなさい。

答え：ひずみのMohr円から、明らかに

$$\gamma_{\max}/2 = [ \{ (\varepsilon_x - \varepsilon_y) / 2 \}^2 + \{ \gamma_{xy} / 2 \}^2 ]^{1/2}$$

が得られる。ひずみのMohr円において、点  $(\varepsilon_x, \gamma_{xy}/2)$  から時計周りに円の頂点まで測った角度を  $2\beta$  とすれば、最大せん断ひずみは  $x$  軸から反時計周りに  $\beta$  だけ傾いている。

問題：広い板に外力が作用し、下記のような変位場になっているものとする。このとき点(1cm, 1cm)上の最大主ひずみの大きさと向きを求めよ。

$$u_x = axy, \quad u_y = bx + cy, \quad a = 5 \times 10^{-6} / \text{cm}, \quad b = 3 \times 10^{-6}, \quad c = -2 \times 10^{-6}.$$

解： $\varepsilon_x = \partial u_x(x, y) / \partial x = ay$ ,  $\varepsilon_y = \partial u_y(x, y) / \partial y = c$ ,

$$\gamma_{xy} = \partial u_y(x, y) / \partial x + \partial u_x(x, y) / \partial y = b + ay$$

$$\varepsilon_x(1, 1) = a = 5 \times 10^{-6}, \quad \varepsilon_y(1, 1) = c = -2 \times 10^{-6}, \quad \gamma_{xy}(1, 1) = b + a = 8 \times 10^{-6}$$

$$\text{最大主ひずみ } \varepsilon_1(1, 1) = (\varepsilon_x + \varepsilon_y) / 2 \pm [ \{ (\varepsilon_x - \varepsilon_y) / 2 \}^2 + \{ \gamma_{xy} / 2 \}^2 ]^{1/2} = 6.82 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_1 \text{ の向き } \alpha = 0.5 [ \tan^{-1} \{ \gamma_{xy} / (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \} ] = 24.4^\circ$$

( $\varepsilon_1$  は  $x$  軸から反時計回りに  $24.4^\circ$  方向を向いている)

### 3.5 ひずみの計測： $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$ の決定方法

一般に、角変化（せん断ひずみ  $\gamma$ ）よりも、長さの変化（直ひずみ  $\varepsilon$ ）の方が測定しやすい。後述する抵抗線型ひずみゲージはその典型例である。以下に示すように、相異なる3方向の直ひずみを計測すれば、せん断ひずみを測らなくても、ひずみの状態  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$  が決まる。

例えば、図3.5に示すように、 $\theta_1 = 0$ 、 $\theta_2 = \pi/4$ 、 $\theta_3 = \pi/2$  の3方向の直ひずみを  $\varepsilon_{\theta_1}$ 、 $\varepsilon_{\theta_2}$ 、 $\varepsilon_{\theta_3}$  とすれば、(3.9)式より、

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\theta 1} &= (\varepsilon_x + \varepsilon_y) / 2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_y) / 2 = \varepsilon_x \\
\varepsilon_{\theta 2} &= (\varepsilon_x + \varepsilon_y) / 2 + \gamma_{xy} / 2 \\
\varepsilon_{\theta 3} &= \varepsilon_y
\end{aligned} \tag{3.20}$$

が得られる。したがって、これらの式から  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$  が次のように求められる。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \varepsilon_{\theta 1} \\
\varepsilon_y &= \varepsilon_{\theta 3} \\
\gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{\theta 2} - (\varepsilon_{\theta 1} + \varepsilon_{\theta 3})
\end{aligned} \tag{3.21}$$

小さな構造物のひずみの計測には、しばしば抵抗線型ひずみゲージが用いられる。これは直ひずみの発生（長さの変化）に伴い、金属製の線の電気抵抗が変化することを利用したものである。抵抗変化  $(\Delta R)$  とひずみ  $\varepsilon$  の間には次のような関係式が成立する。

$$\Delta R / R = K \cdot \varepsilon \tag{3.22}$$

上式中の定数Kはゲージ率 (gage factor) と呼ばれ、その値は理論的には2であるが、実際は1.7～2.3になる。

3方向に抵抗線型ひずみゲージが配置されたロゼットゲージは、測点の（完全な）ひずみ状態を決定するのに用いられる。

大きな領域に生じているひずみを測定対象とする場合には、3角測量や3辺測量が用いられる。

### 3.6 補足 体積ひずみ $\varepsilon_v$

いま、長さが  $(dx, dy)$  である長方形 PQRS が変形後、四辺形  $P'Q'R'S'$  になったものとする（図3.6参照）。次式が成立するので、四辺形  $P'Q'R'S'$  は平行四辺形である。

$$\begin{aligned}
\angle S'P'Q' &= \pi/2 - \gamma_{xy}, \quad \angle P'Q'R' = \pi/2 + \gamma_{xy}, \quad \angle Q'R'S' = \pi/2 - \gamma_{xy}, \quad \angle R'S'P' = \pi/2 + \gamma_{xy} \\
P'Q' &= (1 + \varepsilon_x) dx, \quad Q'R' = (1 + \varepsilon_y) dy, \quad R'S' = (1 + \varepsilon_x) dx, \quad S'P' = (1 + \varepsilon_y) dy
\end{aligned}$$

面積は

$$(1 + \varepsilon_x) dx \cdot (1 + \varepsilon_y) dy - dx dy = (\varepsilon_x + \varepsilon_y) dx dy$$

だけ増える。

これらから次のことがわかる。面積の増減は直ひずみにだけ関係し、せん断ひずみには関係しない。また形状の変化はせん断ひずみに関係し、直ひずみには関係しない。直ひずみは形状の変化を伴わず、せん断ひずみは面積の増減を伴わない。

次に、長さが  $(dx, dy, dz)$  である直方体を考えると、上と同様の考察から、体積は

$$(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) dx dy dz$$

だけ増える。

変形後の体積増加量を元の体積で割った値を体積ひずみ  $\varepsilon_v$  という。この量は

$$\varepsilon_v = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) dx dy dz / dx dy dz = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$



1 体積ひずみの単位も直ひずみせん断ひずみと同様に、無次元であることがわかる。また、体積ひずみはせん断ひずみに無関係、あるいは角の変化に依存しないことがわかる。せん断ひずみが生じても体積の増減は伴わない。

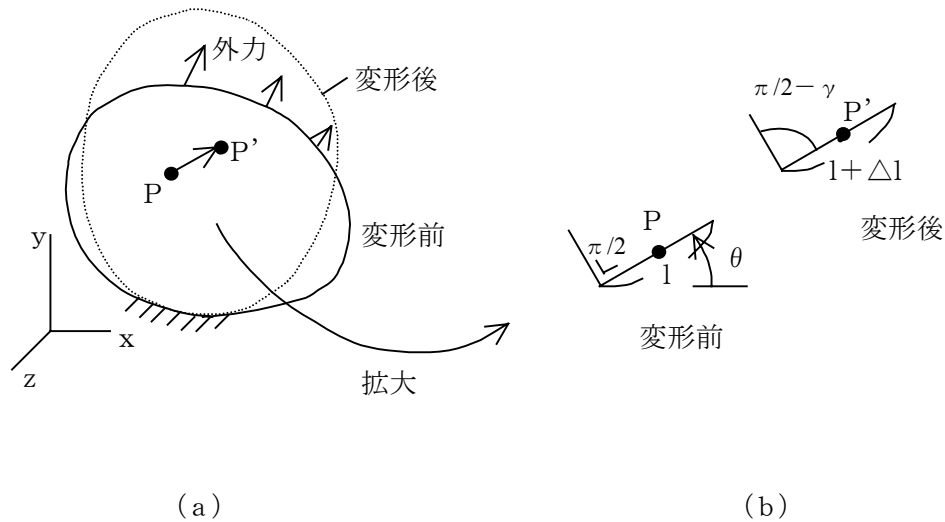


図3. 1 構造物の载荷に伴う変位 (a) と点Pの近くの線分  $l$  と角の変化 (b)

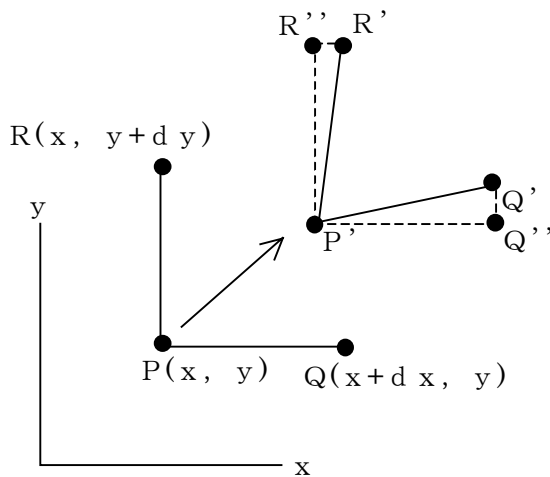


図3. 2 構造物の変形に伴う構造物中の1点Pとその近傍の2点Q, Rの変位

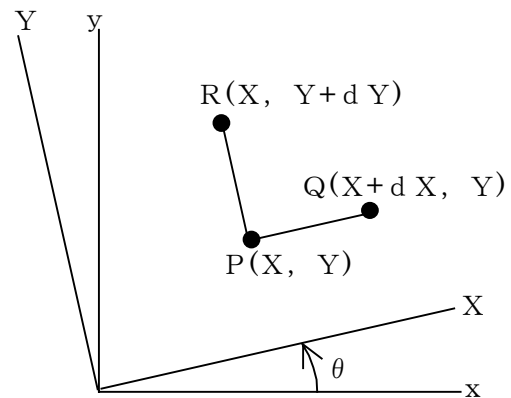


図3. 3 構造物中の1点Pとその近傍の2点Q, R。0- $xy$ 座標と0- $XY$ 座標表示

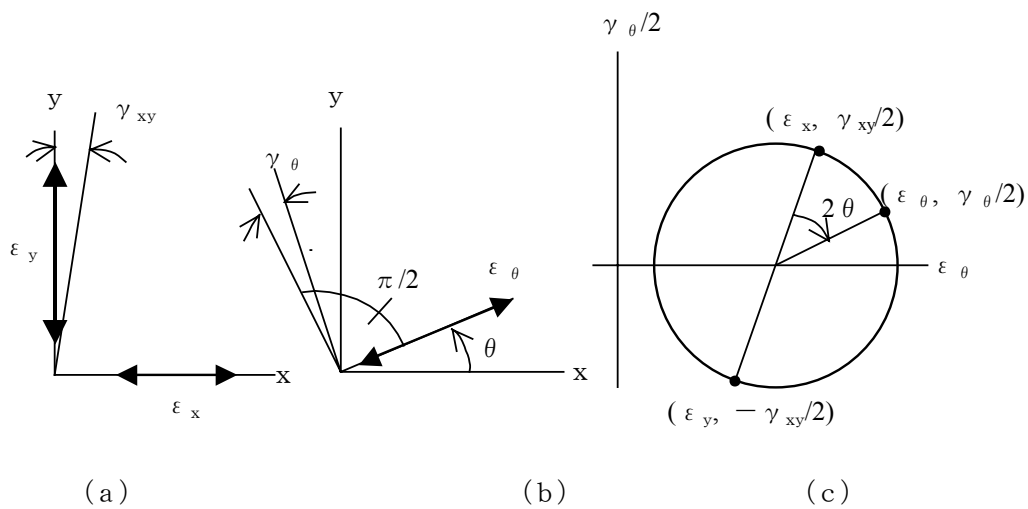


図3.4 ひずみの成分( $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ ) (a) と( $\varepsilon_\theta, \gamma_\theta$ ) (b) およびひずみのモール円 (c)

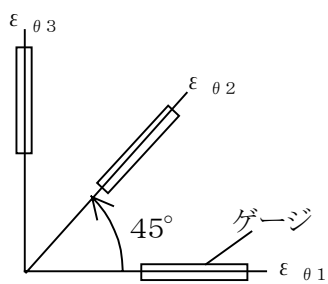


図3.5 ロゼットひずみゲージ (3方向の直ひずみを測定するセンサ)

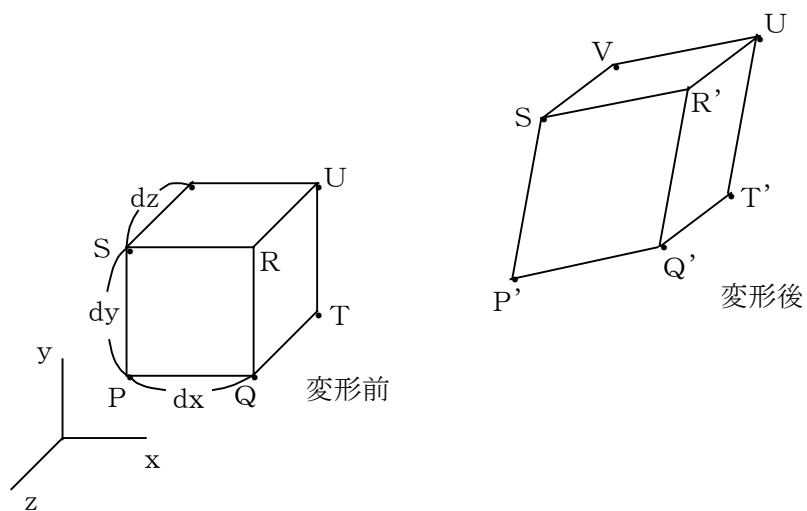


図3.6 構造物中の微小な直方体要素の载荷に伴う変形