２．　力と応力

２．１　力の平衡と内力

いま、構造物が外力を受け、（力学的な）平衡状態を保っているものとする。（力）の平衡状態というのは、力の合力が０になって（静止して）いることを意味しており、次式が成り立つ。

合力＝０

ここでは力が平衡状態にある場合しか扱わないことにする。この力の平衡条件を満たしている構造物では、その中にどのような閉じた領域をとった場合でも、その境界上では力の合力が０になっていなければならない。簡単な例で説明してみよう。

いま、台に乗った境界Γを持つ物体Ωが外力Ｆを受けて平衡状態にあるものとする（図２．１ａ参照）。台は物体が剛体変位しないように変位を拘束する役目をしているが、この場合、物体は台から反力Ｒを受けている。そうすると、物体の境界Γにおける力の平衡条件は次のように表される。

$$F+R=0 \tag{2.1}$$

今度は、物体Ωの一部の領域Ω^*を考えてみる。ただし、領域Ω^*の境界Γ^*の一部には、外力Ｆの着力点を含む境界が入っているものとする。この領域の境界（面）Γ^*上では、次の式で表される力の平衡条件を満たすために、外力Ｆに対抗して力（R_1、R_2、R_3・・）が発生しているはずである（図ｂ）。

$$F+R_1+R_2+R_3\cdots=0$$

力（R_1、R_2、R_3・・）は、領域の内部に分布しているので、（外力と区別して）内力と呼ぶ。この内力の大きさや作用方向については（現時点では知識が足りないために）、具体的に評価することはできないが、構造物の中には、外力に対抗して至る所で内力が発生していることは理解されよう。

２．２　応力の定義と２つの応力成分

２．２．１　応力の定義

構造物の内部に分布している内力の大きさ・状態を表すには、内力そのものよりも、次に導入する「応力（stress）」という量の方が、ずっと便利で優れている。

応力は次のように定義される。外力を受けて平衡状態にある物体Ω内の任意の微小な面δS に発生している内力をδRとしたとき、

$$\delta R/\delta S \tag{2.2}$$

を応力という（図２．２b）。

２．２．２　ある点の応力

構造物の中に分布する内力はしばしば激しく変化している。そういった場所でも応力を正確に表現できるように、内力の作用する面δSは十分小さく取った方がよい。

いま、ある点Ｐを内部に含む一つの面δSを考え、このときδSに作用する内力をδRとする。次に、面δSの中に点Ｐを内部に含むδSより小さな面δS'を考える。δS'はδS'＜δSを満たしているが、δS'に作用する内力δR'は当然δRより小さい。つまりδR'＜δRを満たす。このため、

$$\delta R'/\delta S'$$

の値は、δR/δS と大差ない。例えば、もし、内力が均一に作用していれば、

$\delta R' = \delta R\,(\delta S'/\delta S)$ したがって、

$$\delta R'/\delta S' = \delta R/\delta S$$

このために、考える面δSを小さくしていっても、応力の値は一般には発散せず、一定の値に収束する。δS'を十分に小さくしたときの応力を点Ｐにおける応力と呼ぶことにする。換言すれば、ある「点」の応力を改めて表現すれば次のようになる。

$$\lim (\delta R/\delta S) \quad (\delta S \to 0)$$

この面δSは向きを持っている。したがって、同じ場所でも向きが異なれば応力も異なってくる。力は作用点さえ指定すれば決まるが、応力は点と向きを指定してはじめて決まる。力は周知のように、数学的にベクトルと呼ばれる量であるが、応力はテンソルと呼ばれる量である。

○ある点の応力が向きにより異なることの重要性：いま、0℃の大気中において棒状のチョコレートを軸方向に引張る。破面は軸に垂直になるであろう。このように特定の面が破面になる。破面の存在は、この面の応力が他の面の応力よりも破壊しやすいことを意味し、同じ点でも面が異なると応力も異なっていることが理解できるであろう。破面の向きや性状は破壊の機構を考える上で重要である。応力を使えば破面の解釈や予測が可能になることが理解できるであろう。

2.2.3　2つの応力成分ー直応力とせん断応力

構造物の境界Γでは外力Ｆや反力Ｒが分布している。この上で応力と同じような量、すなわち、$\delta R/\delta S$や$\delta F/\delta S$を定義することができる。これらは応力と区別して、表面力（traction）という。注意すべきは、このδSは境界面の一部になっているので、任意の向きは持たない。この点が応力と異なる。

内力δRはベクトルなので、 内力の作用面δSに垂直な成分δR_nと平行な成分δR_sに分けることができる（図２．２c）。 $\delta R_n/\delta S$、$\delta R_s/\delta S$をそれぞれ直応力（normal stress)、せん断応力（shear stress）と呼ぶ。普通、次式のように直応力はσ、せん断応力はτの記号で表す。

$$\sigma = \delta R_n / \delta S$$

$$\tau = \delta R_s / \delta S \qquad (2.3)$$

いま、考えている面δSがｘ軸に垂直のとき（面の法線がｘ軸の＋に一致するとき）、その面に作用する直応力をσ_xと記す（図２．３）。この面に作用するせん断力δR_sは、向きがｙ

軸、ｚ軸に一致する２成分、すなわちδR_{sy}、δR_{sz}に分解することができる。δR_{sy}、δR_{sz}に対応するせん断応力をτ_{xy}、τ_{xz}と記す（図２．３）。同様に、σ_y、τ_{yz}、τ_{yx}、σ_z、τ_{zx}、τ_{zy}が定義される。また、各軸の負の方向を法線とする面に作用する応力として、

τ_{xb}、τ_{xyb}、τ_{xzb} が定義される。

２．３　応力の性質と符号および単位

２．３．１　応力成分の性質

（１）表裏の応力

いま、構造物内に微小で極端に薄い直方体要素を考える。面積の大きい２面に垂にｘ軸をとると、この表面と裏面に作用する直応力σ_x、σ_{xb}の間には、ｘ方向の力の釣り合いから次式が成立する。

$$\sigma_x = \sigma_{xb} \tag{2.4}$$

が同様に、この表面と裏面に作用するせん断応力τ_{xy}、τ_{xyb}との間には、ｙ方向の力の釣り合いから次式が成立する。

$$\tau_{xy} = \tau_{xyb}$$

また、

$$\tau_{xz} = \tau_{xzb}$$

以上述べた検討により、表裏の関係にある応力成分は、絶対値が等しく、向きが互いに反対であることがわかる。この性質は常に成立するので、ある面に作用する応力を考えるとき、この応力の代わりに裏面に作用する応力で考えても何ら問題はない。

（２）応力は一般に連続的に変化するものとする。つまり、座標の連続関数になっているものとする。多くの場合、この仮定は正しい。

（３）対のせん断応力

同様に、 構造物内に対の２面がｘ軸、ｙ軸、ｚ軸に垂直であるような微小な直方体要素を

考える（図２．４ｂ）。この要素にはせん断応力τ_{zy}、τ_{zyb}、τ_{yz}、τ_{yzb}以外の応力は作用していないものとする。ｘ軸のまわりのモーメントは釣り合っていなければならないので、次式が得られる。

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} \tag{2.5}$$

ｘ’軸を回転軸とする力のモーメントも釣り合っていなければならないので、

$$\tau_{zyb} = \tau_{yz}$$

同様に、力のモーメントの釣り合いから次式が得られる。

$$\tau_{zy} = \tau_{yzb}$$

$$\tau_{zyb} = \tau_{yzb}$$

以上より、次式が得られる。

$$\tau_{zy} = \tau_{zyb} \quad 、\tau_{yz} = \tau_{yzb} \tag{2.6}$$

(2.4)、(2.6)式から、表・裏の対応する応力成分は直応力もせん断応力も等しく、両者は区別する必要がないことがわかる。したがって、以後、″b″のsuffixは使わないことにする。また、対応する表裏の応力は直応力、せん断応力とも片側だけ存在することはなく、必ず対になって存在することがわかる。特に、せん断応力については、４つの応力成分が対になって存在する。

（４）独立な応力成分の数

以上より、微小な直方体要素の各面に作用する応力成分は合計 6×3＝18 あるが、これらの内で

$$\sigma_x、\sigma_y、\sigma_z、\tau_{yz}、\tau_{zx}、\tau_{xy} \tag{2.7}$$

の６つが独立である（図２．５）。後で、任意の面の応力は(2.7)式に示した６つの応力成分の一次式で表されることを示す。 このことから、 構造物中における任意の「点」の応力状態は(2.7)式の６つの成分によって完全に決まることがわかる。

２．３．２　応力の符号

対で作用している直応力については、図２．５ のように引張を＋、圧縮をーと約束する。せん断応力については＋ーを図のように約束する（反対の約束をする場合もあるので、文献を読むときには注意しなければならない）。

２．３．３　応力の単位

(1)標準的な国際単位（ＳＩ単位）

応力は定義から、力/面積の単位を持つ。国際単位では応力の標準的な単位として、Pa（パスカル）が使われる。

$$1\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{N/m^2} \tag{2.8}$$

1N：質量1kgの物体が1m/s^{2}の加速度を生じるような力の大きさ。なお、1N=10^{5}dyn

1Paは工学の分野で通常扱われる量としてはかなり小さいので、しばしば、次の補助単位が用いられる。

G（10^9：ギガ）、M（10^6：メガ）、k（10^3：キロ）、h（10^2：ヘクト）。

例：5GPa。

barは応力の補助単位として使われる。

$$1\,\mathrm{bar} = 10^5\,\mathrm{N/m^2} = 10^5\,\mathrm{Pa} = 0.1\,\mathrm{MPa} = 10^3\,\mathrm{hPa} \tag{2.9}$$

(2)工学でしばしば用いられる単位

従来はしばしば、kgf/cm^2、kgf/mm^{2}が用いられてきた。

1kgfは質量が1kgの物体に9.806m/s^{2}の大きさの加速度（重力加速度）を与えるような力の大きさで、定義から

$$1\,\mathrm{kgf} = 9.806\,\mathrm{N}$$

である。したがって、次式の関係が得られる。

$$1\,\mathrm{kgf/cm^2} = 9.806\,\mathrm{N/cm^2} = 0.0981\,\mathrm{MPa} \fallingdotseq 0.1\,\mathrm{MPa} = 1\,\mathrm{bar}$$

ヤード・ポンド単位を用いてきた英国・アメリカでは、応力の単位として従来、psi（ポン

ド/in^2）が使われてきた。

２．４　一点Ｐの応力状態－点Ｐにおける任意の面上の応力と座標軸方向の応力との関係

任意の一点の極く近傍では（２．４．１で述べたｎが十分に大きい面積S_{Pn}内では）、応力が一様になっていると仮定しても誤差は小さい。このような領域に、図２．６に示すように小さな薄い３角柱領域を考える。ただし、３角形断面は直角３角形とし、一面はｘ軸（の負）、一面はｙ軸（の負）を向き、斜面は法線（ｎ）の傾きがｘ軸に対してθで（すなわち、面に立て垂線がｘ軸から反時計廻りにθ傾いているような面）、断面の法線はｚ軸を向いているものとする。この微小領域に作用する内力の釣り合いについて検討する。この微小領域は小さいために、この中の応力は一様（一定）と仮定できるものとし、その応力は次式のようになっているものとする。

$$(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$$

z方向の力の釣り合いに関係するのは、$(\sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx})$であるが、釣り合いの条件が常に満たされているのは明らかである。次に、ｘｙ面内の力の釣り合いについて検討する。斜面に作用する直応力を$\sigma(\theta)$、せん断応力を$\tau(\theta)$とする。なお、$\tau(\theta)$は図ｂで示されている向きを＋に取るものとする。ｎ方向とｎに垂直な方向について力の平衡を考えると次式が導かれる。

$$\begin{aligned}\sigma(\theta) &= (\sigma_x+\sigma_y)/2 \quad + \{(\sigma_x-\sigma_y)/2\}\cos2\theta+\tau_{xy}\sin2\theta \\ \tau(\theta) &= \qquad\qquad\qquad -\{(\sigma_x-\sigma_y)/2\}\sin2\theta+\tau_{xy}\cos2\theta \qquad (2.10)\end{aligned}$$

(2.10)式には要素の寸法が含まれていない。したがって、要素は幾ら小さくしてもかまわない。その極限として、上式は任意点での(xy)面内における応力状態が（σ_x、σ_y、τ_{xy}）であるとき、法線ｎがθである面に作用している応力状態（$\sigma(\theta)$、$\tau(\theta)$）を与えているといえる。この関係は(xy)面内以外の任意の面内で成立することは明らかである。

問題：一軸引っ張りを受ける細長い薄板中に生じる応力で、直応力の最大値、せん断応力の最大値を求めよ。

問題：岩石と鉄について細長い供試体を作り、一軸引っ張りをしたところ、図２．７のような破面ができた。破面は応力に関してどのような状態であったか。

　岩石の場合、破壊するときの荷重、つまり強度は引張と圧縮とでは異なり、圧縮強度の方が引張強度よりもはるかに強い結果が得られる。同じ形状の材料に同じ力を加える場合でも、応力の向きにより強度が異なる。

問題：直交座標（0-ｘｙ）で定義されている応力（$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$）を極座標（0-ｒθ）で表示される応力（$\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$）に変換しなさい(図２．８参照)。

答：ｘ軸から（反時計回りに）θ方向の応力成分は、

$$\sigma_r=\sigma(\theta),\ \sigma_\theta=\sigma(\theta+\pi/2),\ \tau_{r\theta}=\tau(\theta)$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= (\sigma_x+\sigma_y)/2 + \{(\sigma_x-\sigma_y)/2\}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \\
\sigma_\theta &= (\sigma_x+\sigma_y)/2 - \{(\sigma_x-\sigma_y)/2\}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta \\
\tau_{r\theta} &= -\{(\sigma_x-\sigma_y)/2\}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

２．５　応力のMohr円と主応力

２．５．１　応力のMohr円

　(2.10)式は、応力が発生している構造物中の任意点でのθの向きを持つ面上の応力状態を（σ_x、σ_y、τ_{xy}）によって表現したものである。これから、一つの点の応力状態が考えている面の向きによってどのように異なるかを、もう少し詳しく調べてみよう。

　このため、(2.11) 式に従う($\sigma(\theta), \tau(\theta)$)は、θが変化したときに、($\sigma-\tau$)座標でどのような軌跡を描くかを明らかにする。(2.10)式を次のように変形する。

$$\sigma(\theta) - (\sigma_x+\sigma_y)/2 = \{(\sigma_x-\sigma_y)/2\}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau(\theta) = -\{(\sigma_x - \sigma_y)/2\}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

各式を２乗した後、両式をたし合わせると、次のようになる。

$$\{\sigma(\theta) - (\sigma_x + \sigma_y)/2\}^2 + \tau(\theta)^2 = \{(\sigma_x - \sigma_y)/2\}^2 + \tau_{xy}^2 \qquad (2.12)$$

これは図２．９に示すように、中心が（σ_m、0）、半径ｒの円を表す。ただし、

$$\sigma_m = (\sigma_x + \sigma_y)/2, \quad r^2 = \{(\sigma_x - \sigma_y)/2\}^2 + \tau_{xy}^2 \qquad (2.13)$$

この円を応力のMohr円という。任意点における各方向の応力状態はMohr円上の一点として表される。

２．５．２　Mohr円上におけるθ方向の応力成分の位置とMohr円の描き方

次に、θ方向の応力成分（$\sigma(\theta)$, $\tau(\theta)$）は、このMohr円でどの点になるかを調べてみよう。まず、$\theta=0$ 方向の（$\sigma(\theta)$, $\tau(\theta)$）は、$\theta=0$を(2.11)式に代入すればわかるように、（σ_x、τ_{xy}）となる。（$\sigma-\tau$）座標におけるこの点は、Mohr円上のどこかに位置している。いま、図２．10ａに示すように、この点から円上を時計廻りに2θ進んだ点の（σ、τ）値をみてみる。参考角として図のように2αを導入する。明らかに、

$$\sigma - \sigma_m = r\cos(2\alpha - 2\theta)$$

$$\tau = r\sin(2\alpha - 2\theta)$$

である。そこで、

$$\cos 2\alpha = (\sigma_x - \sigma_m)/r = \{(\sigma_x - \sigma_y)/2\}/r, \quad \sin 2\alpha = \tau_{xy}/r$$

$$\cos(2\alpha - 2\theta) = \cos 2\alpha \cdot \cos 2\theta + \sin 2\alpha \cdot \sin 2\theta$$

$$\sin(2\alpha - 2\theta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\theta - \cos 2\alpha \cdot \sin 2\theta$$

を用いて上式を変形すれば、次式が得られる。

$$\sigma - \sigma_m = +(\sigma_x - \sigma_y)/2 \cdot \cos 2\theta + \tau_{xy} \cdot \sin 2\theta$$

$$\tau = -(\sigma_x - \sigma_y)/2 \cdot \sin 2\theta + \tau_{xy} \cdot \cos 2\theta$$

これは(2.11)式に等しい。つまり、法線がｘ軸から反時計廻りに測ってθを向く面に作用する

応力（σ、τ）は、Mohr 円では（σ_x、τ_{xy}）の点から時計廻りに２θ進んだ点に対応することがわかる（図 2.10ａ，ｂ）。

さて、法線の傾きθが$\pi/2$である面に作用する応力は(2.11)式から、（σ_y、$-\tau_{xy}$）である。また、法線が$\theta=0$の面に作用する応力（σ_x、τ_{xy}）とはMohr円上では$2x（\pi/2）=\pi$だけ離れており、２点はMohr円上で１つの直径上の点の関係になっている（図a）。

以上の知見を基に、次のようにしてMohr円を描くことができる。

$\sigma-\tau$座標に、（σ_y、$-\tau_{xy}$）、（σ_x、τ_{xy}）の２点を直径とするような円を描けば、それが求めるMohr円で、中心は（σ_m、０）となる。

２．５．３　主応力σ_1、σ_2 と主応力の向き

Mohr円がσ軸を切る２点（σ_1、０）、（σ_2、０）の応力状態はせん断応力が０になっている（図2.10ａ）。また、これらの直応力σ_1、σ_2は、取り得る直応力の最大、最小値を与えている。σ_1、σ_2を主応力という。

最大主応力σ_1が作用する面の法線の（ｘ軸から反時計廻りに測った）向きαは図２．１０から次のようになる。

$$\tan 2\alpha=2\tau_{xy}/(\sigma_x-\sigma_y) \tag{2.14}$$

あるいは、Mohr円から角度αを読んでもよい。

主応力は各点で必ず２つ存在し、互いに９０°離れていることは、図２．１０ａから明かであろう。なお、２つの主応力σ_1、σ_2は式で表現すれば次のようになる。

$$\sigma_{1,2}=\sigma_m\pm\{r\}^{1/2}$$

$$=(\sigma_x+\sigma_y)/2\pm[\{(\sigma_x-\sigma_y)/2\}^2+\tau_{xy}^2]^{1/2} \tag{2.15}$$

上記の主応力は(xy)面で定義された値である。任意の面で２つの主応力が存在する。主応力の中で最大、最小のものを、最大主応力σ_1、最小主応力σ_3という。この２つの主応力が存在する面に(OXY)座標を取り（最大主応力の向きをX軸に一致させる）、面に垂直な方向にZ軸を

取る。(XZ)面の主応力の一つは最大主応力σ_1であるが、もう一つをσ_2とすれば、σ_2は

$$\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$$

の関係がある。σ_2は中間主応力という。

例題

σ_x＝−6、σ_y＝−4、τ_{xy}＝−2（MPa）の主応力と方向を求めなさい。

解：　σ_1=2.8、σ_2＝−7.3（MPa）

σ_1の作用する面の法線の方向αは：$2\alpha=243°$

例：２枚の・同一材質の長方形の紙を用意する。一方の幅ｂの紙の中央には外から長さａの切れ目を入れ、この部分の幅をｂ－２ａにしておく。他方の紙の幅はｂ－２ａとする（図２．１１参照）。両方の紙について、上端を持ち、下端を引張る。どちらが小さい力で破れるか。

切れ目の入った紙の方がより小さい力で破れる。しかも、破壊はかならず、切れ目の端から発生する。紙の強度はどこでも同じなので、紙の中央部の断面上に分布している応力は場所毎に異なり、切れ目の端で大きくなっていると考えれば上記の現象の説明が付く。このように、連続体または構造物中の破壊を検討するには、構造物内部の応力分布を知ることが重要になる。

２．５．４　３次元場の主応力

ある１点の応力を表すとき、独立な応力成分は６つあることを述べた。（以下は証明なしに、結論だけを述べる。）これに対応して、主応力も３つあり、作用面は互いに直交している。大きい順にσ_1, σ_2, σ_3 としたとき、それぞれ、最大主応力、中間主応力、最小主応力と呼ばれる。

中間主応力の作用方向をｚ軸としたとき、最大・最小主応力（σ_1, σ_3）はｘｙ面内に存在する。これと（σ_x, σ_x, τ_{xy}）の間の関係は上述したとおりである。

問題　立方体状の側面にｐの圧力をかけつつ、それに垂直な方向（ｚ方向）から単位面積辺り σ の大きさの圧縮力を作用させ、荷重の大きさを最初０の状態から次第に大きくしていくものとする。$\sigma=0$,　$\sigma=-p$,　$\sigma=-5p$の各段階におけるｘｚ面に作用する応力のモール円を $\sigma-\tau$ 座標に示しなさい。

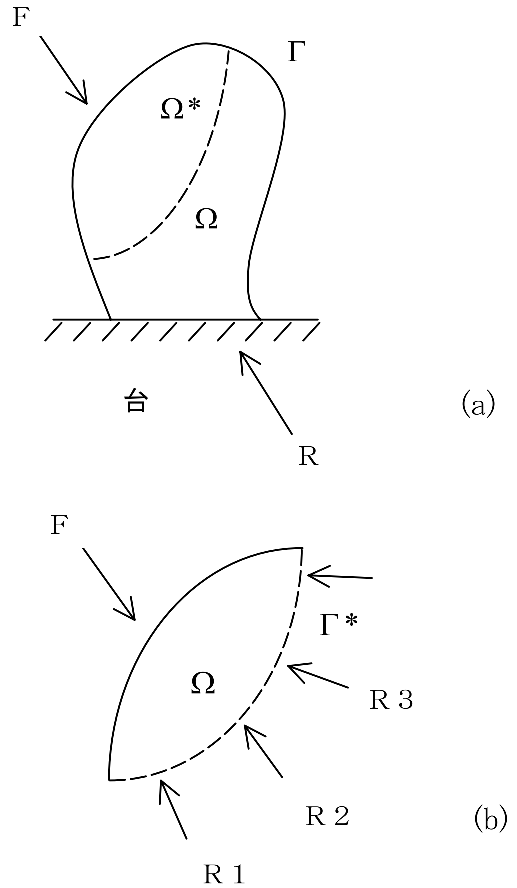

図２．１　外力Ｆと内力R

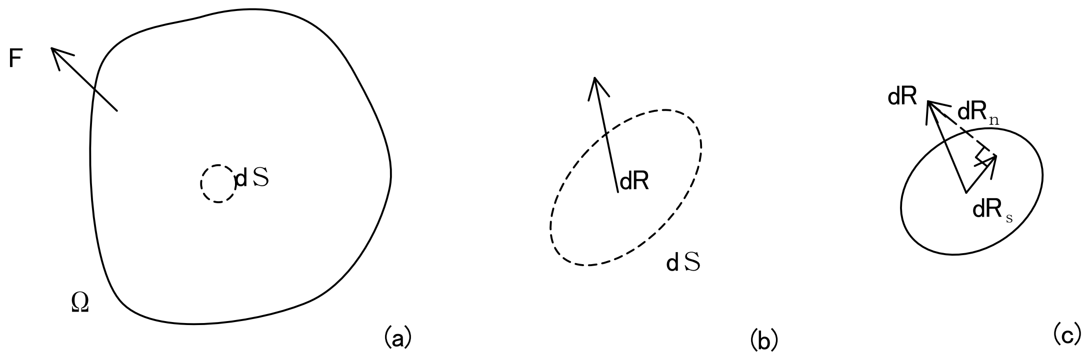

図２．２　物体中に考えた微小な面ｄＳに作用する内力

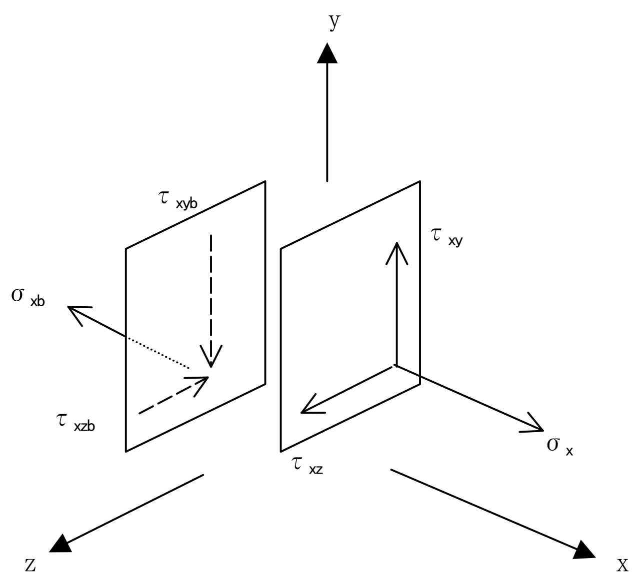

図２．３　応力成分σ_x、τ_{xy}、τ_{xz}、τ_{xb}、τ_{xyb}、τ_{xzb}の定義

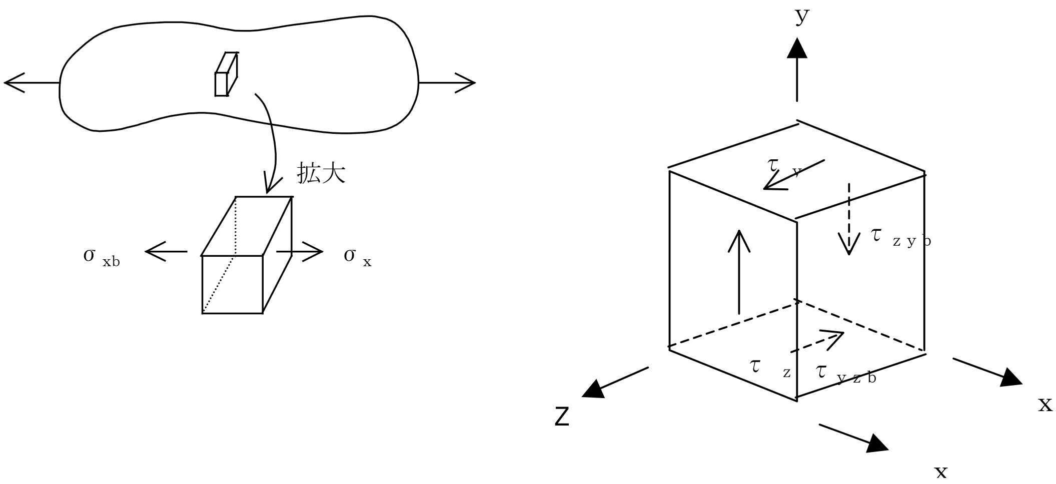

図２．４　立方体状の要素に作用するせん断応力成分

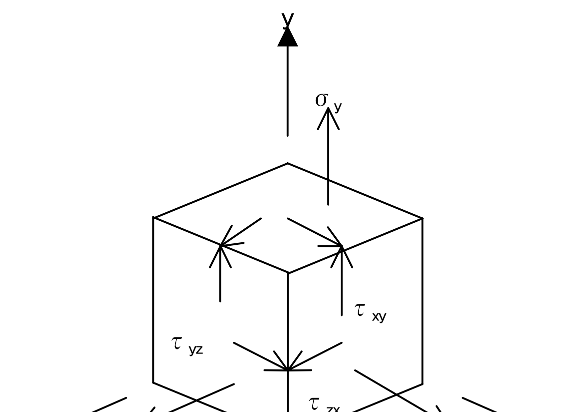

図２．５　６つの応力成分

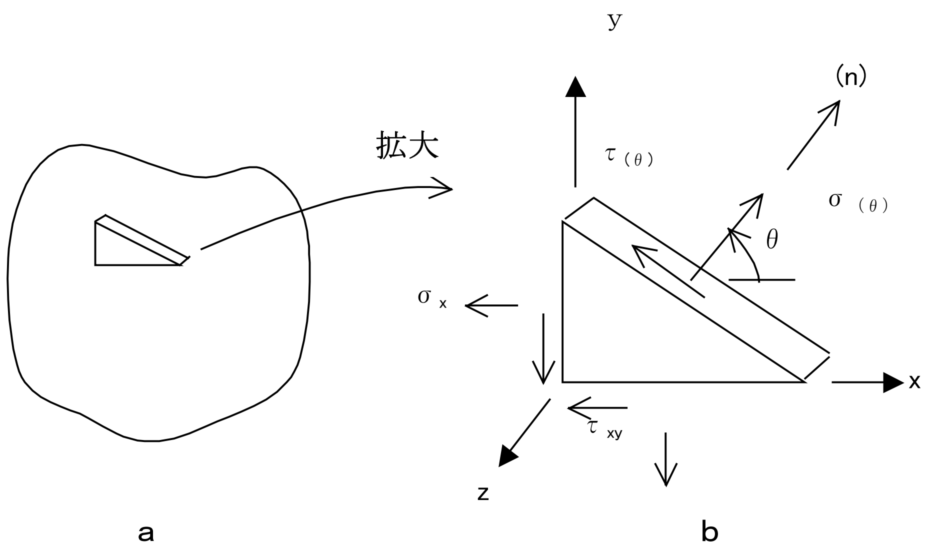

図２．６　物体中の微小な３角柱要素（ａ）に作用する応力（ｂ）

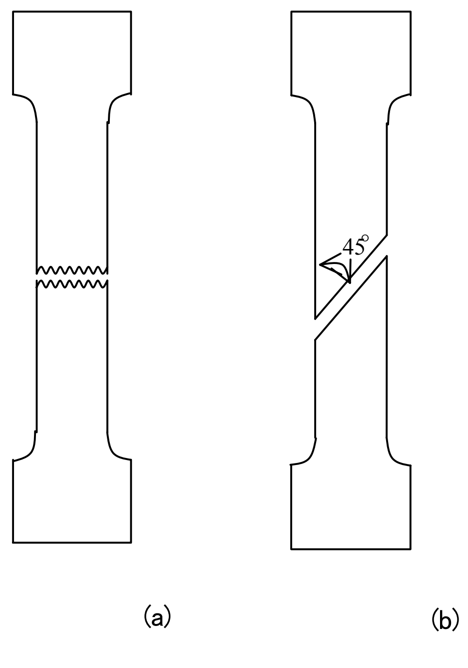

図２．７　供試体を一軸引張した時の破断面の形状。（a）：岩石（b）：金属

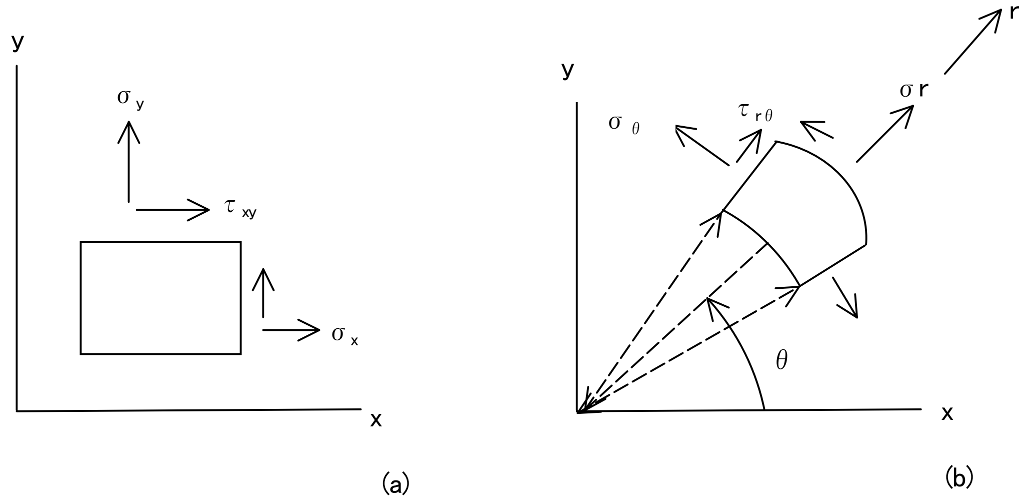

図２．８　直交座標（ａ）極座標（ｂ）で表示した応力成分

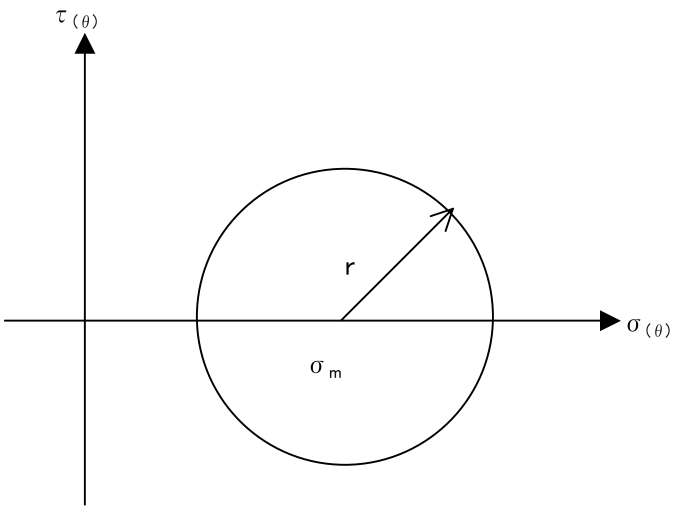

図２．９　応力のモール円

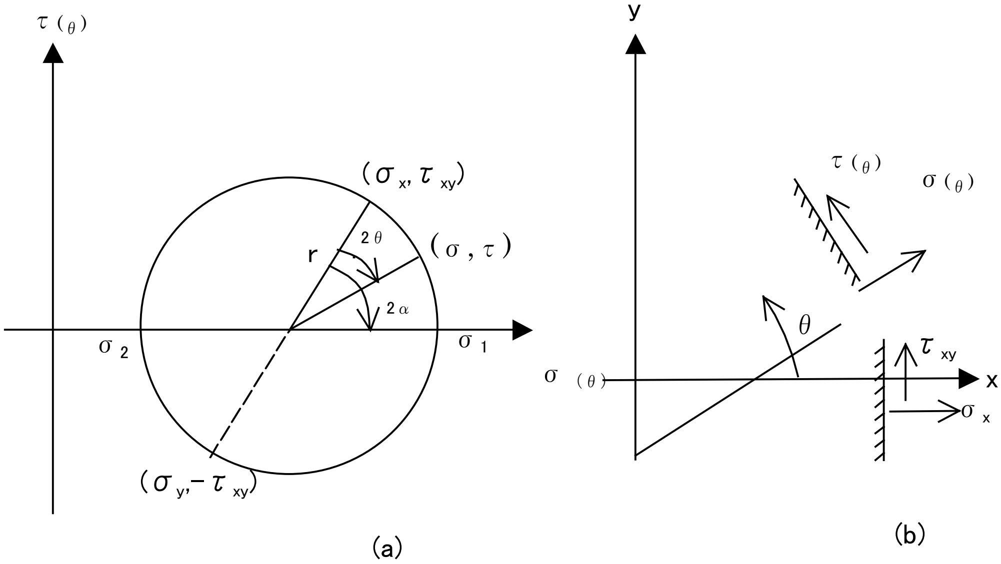

図2.10　応力モール円上の点 (a)と物理場における応力状態 (b)の関係

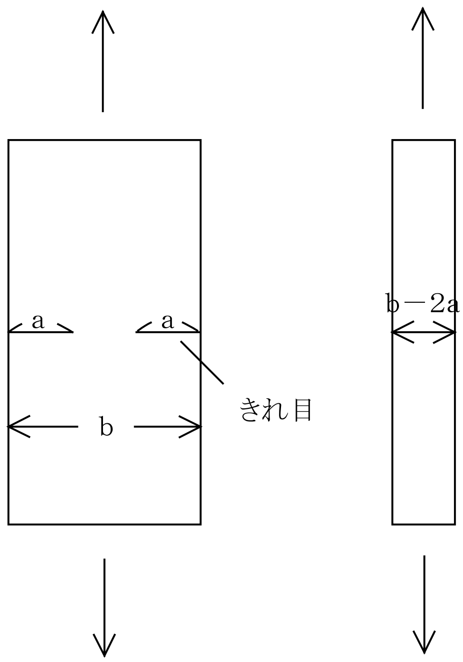

図2.11　同一の材料でできた（ａ），（ｂ）を一様な表面力σで引張るとき、どちらの強度が

小さいか