

演習問題

第 1 問 (N 個の量子力学的 3 次元調和振動子)

振動数 ω の量子力学的 3 次元調和振動子が N 個あるとします。各調和振動子は独立で、各々の振動子の x, y, z 方向の運動も独立です。

- (1) 1 つの 3 次元調和振動子の量子状態はいくつの量子数で表すことができるでしょうか？
- (2) 適当な量子数を用いて、一つの 3 次元調和振動子のエネルギー ε を表す式を示して下さい。
- (3) この系、すなわち N 個の調和振動子から成る系の量子状態は、いくつの量子数で表すことができるでしょうか？
- (4) 適当な量子数を用いて、全系のエネルギー E を表す式を示して下さい。

(ミクロカノニカル分布を使って解く)

- (5) 全系のエネルギーを E とします。このとき量子数が満たすべき条件を示して下さい。
- (6) (5) の条件を満たす量子状態の数 W を求めて下さい。
- (7) (6) の結果を用いて、系のエントロピー S をエネルギー E の関数として表して下さい。ただし、 $N \gg 1, E/\hbar\omega \gg 1$ とします。
- (8) エネルギー E と温度 T の関係を求めて下さい。

(カノニカル分布を使って解く)

- (9) 一つの 3 次元調和振動子の分配関数 z を示し、自由エネルギー ϕ を求めて下さい。
- (10) 全系の分配関数 Z を示し、自由エネルギー F を求めて下さい。
- (11) (10) の自由エネルギーを用いて、系のエネルギー E を求めて下さい。
- (12) $T \gg \hbar\omega$ の場合のエネルギーの近似式を求めて下さい。
- (13) 系のエントロピーを求めてください。

第 2 問 ($3N$ 個の量子力学的 1 次元調和振動子)

$3N$ 個の量子力学的 1 次元調和振動子の問題を、第 1 問と同様に解いて下さい。得られた結果を第 1 問の結果と比較して下さい。

第 3 問 (縮退のある 2 準位系)

N 個の区別できる粒子を考えます。各粒子は 2 つのエネルギー状態をとることが出来ます。基底状態のエネルギーを 0、励起状態のエネルギーを $\varepsilon > 0$ とします。ただし、励起状態は g 重に縮重しています。

- (1) 一つの粒子が取り得る量子状態の数はいくつですか？
- (2) 全系のエネルギー E を適当な変数を用いて表して下さい。

(ミクロカノニカル分布を使って解く)

- (3) 全系のエネルギーが E の場合に、全系の可能な量子状態の数 W を求めて下さい。
- (4) 全系のエントロピー S を求めて下さい。
- (5) エネルギー E と温度 T の関係を求めて下さい。

(カノニカル分布を使って解く)

- (6) 温度が T の場合の一粒子の分配関数 z を示し、自由エネルギー ϕ を求めて下さい。
- (7) 同じく全系の分配関数 Z を示し、自由エネルギー F を求めて下さい。
- (8) 自由エネルギーを用いて、系のエネルギー E を求めて下さい。
- (9) 同じく系のエントロピー S を求めてください。

第4問 (N 個の古典力学的 3 次元調和振動子)

振動数 ω 、質量 m の古典力学的 3 次元調和振動子が N 個あるとします。各調和振動子は独立で、各々の振動子の x, y, z 方向の運動も独立です。温度を T とします。

- (1) 一つの調和振動子のハミルトニアン h を示して下さい。
- (2) 全系のハミルトニアン H を示して下さい。
- (3) 古典力学系の分配関数 Z を、ハミルトニアン H を使って表す式を示して下さい。自由度は f とします。
- (4) 全系の分配関数 Z を求めて下さい。
- (5) 全系の自由エネルギー F を求めて下さい。
- (6) 全系のエントロピー S を求めて下さい。
- (7) 全系のエネルギー E を求めて下さい。また得られた結果を第1問(12)の結果と比較して下さい。

(ヒント) $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\pi/a}$

第5問 統計力学が対象とする系はどのような系ですか？またそれをどのような手法を用いて説明しようとしているのでしょうか？

第6問 統計力学の基礎となる最も重要な考えの呼称を示し、それを簡潔に説明して下さい。

第7問 ミクロカノニカル分布とカノニカル分布が適用できるのはどのような系ですか？またそれぞれの分布はどのような分布か説明して下さい。

以上