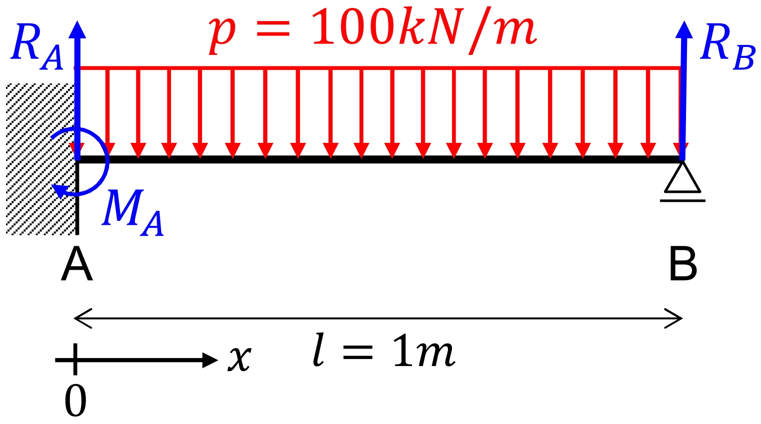
下図に示す一端固定・他端移動支点はりのたわみ分布を、微分方程式による解法で求めなさい。ただし、はりの曲げ剛性$EI = 1.0 \times 10^6\ N \cdot m^2$とする。



等分布荷重の場合の微分方程式は、

$$Q = -px + C_1$$

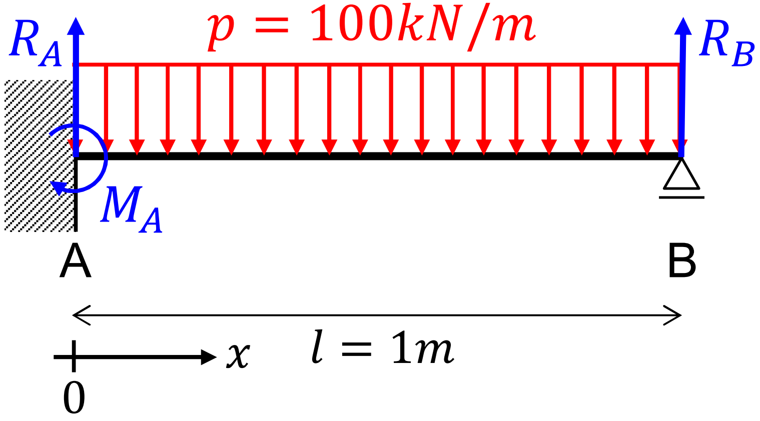
$$M = -\frac{p}{2}x^2 + C_1 x + C_2$$

$$\theta = -\frac{1}{EI}\left(-\frac{p}{6}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3\right)$$

$$y = -\frac{1}{EI}\left(-\frac{p}{24}x^4 + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3 x + C_4\right)$$

Sample Answer (5)

下図に示す一端固定・他端移動支点はりのたわみ分布を、微分方程式による解法で求めなさい。ただし、はりの曲げ剛性$EI = 1.0 \times 10^6\ N \cdot m^2$とする。



未知数：$R_A,\ M_A,\ R_B,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$の7個

条件式：

$$\left.\begin{aligned} &x = 0 \text{で} \theta = 0 \\ &x = 0 \text{で} y = 0 \\ &x = l \text{で} y = 0 \\ &x = 0 \text{で} Q = R_A \\ &x = 0 \text{で} M = M_A \\ &x = l \text{で} Q = -R_B \\ &x = l \text{で} M = 0 \end{aligned}\right\} \text{の7個}$$

$x=0$で$\theta=y=0$より、$C_3=C_4=0$

$x=l$で$M=0$より、$-\frac{pl^2}{2}+C_1 l+C_2=0$ ・・・①

$x=l$で$y=0$より、$-\frac{pl^4}{24}+\frac{C_1 l^3}{6}+\frac{C_2 l^2}{2}=0$ ・・・②

①②より、$C_1=\frac{5pl}{8}, C_2=-\frac{pl^2}{8}$

したがって、たわみ角分布とたわみ分布は、

$$\theta=-\frac{1}{EI}\left(-\frac{p}{6}x^3+\frac{1}{2}\cdot\frac{5pl}{8}x^2-\frac{pl^2}{8}x\right)=\frac{p}{48EI}x(8x^2-15lx+6l^2)$$

$$y=-\frac{1}{EI}\left(-\frac{p}{24}x^4+\frac{1}{6}\cdot\frac{5pl}{8}x^3-\frac{1}{2}\cdot\frac{pl^2}{8}x^2\right)=\frac{p}{48EI}x^2(2x^2-5lx+3l^2)$$

yが最大となる位置は、$\theta=0$になるときのxだから 忘れずに！

$$8x^2-15lx+6l^2=0 \qquad \therefore x=\frac{l}{16}\left(15-\sqrt{33}\right)\approx 0.578l$$

したがって、$y_{max}=\frac{p}{48EI}(0.578l)^2(2(0.578l)^2-5l(0.578l)+3l^2)\approx 0.0054\frac{pl^4}{EI}$

値を代入すると(N, mで統一)、

$$y_{max} = 0.0054 \times \frac{100000 \times 1^2}{1.0 \times 10^6} = 0.00054m = 0.54mm$$

$$x = 0.578l = 0.578 \times 1 = 0.578m$$