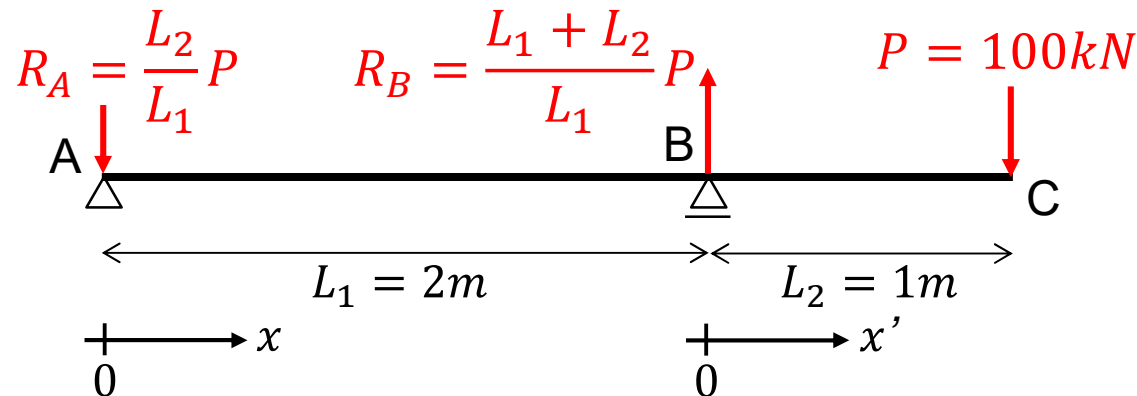


下図に示すはりのたわみ分布を描け。 最後にちゃんと図を描くこと！

ただし、はりの曲げ剛性 $EI = 1.0 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2$ とする。



点Aを0として右向きに x 軸、点Bを0として右向きに x' 軸を定義する。

区間ABの曲げモーメント分布 $M_{AB}(x) = -\frac{L_2}{L_1} Px$

区間BCの曲げモーメント分布 $M_{BC}(x') = P(x' - L_2)$

区間ABのたわみ曲線 $y_{AB}(x) = -\frac{1}{EI} \int \int M_{AB}(x) dx^2$

$$= \frac{PL_2}{EIL_1} \left(\frac{1}{6} x^3 + C_1 x + C_2 \right)$$

$$\begin{aligned}\text{区間BCのたわみ曲線 } y_{BC}(x') &= -\frac{1}{EI} \int \int M_{BC}(x') dx'^2 \\ &= -\frac{P}{EI} \left(\frac{1}{6} x'^3 - \frac{1}{2} L_2 x'^2 + D_1 x' + D_2 \right)\end{aligned}$$

積分定数 C_1, C_2, C_3, C_4 を定めるための境界条件

① $x=0$ で $y=0$

② $x=L_1$ で $y=0$

③ $x'=0$ で $y=0$

④ $x=L_1$ の θ と $x'=0$ の θ が一致 $\rightarrow$ たわみ角を求める必要がある

$x'=0$ で $\theta=0$ としてしまうミスが散見された。

$$\text{区間ABのたわみ角分布 } \theta_{AB}(x) = \frac{PL_2}{EIL_1} \left(\frac{1}{2} x^2 + C_1 \right)$$

$$\text{区間BCのたわみ角分布 } \theta_{BC}(x') = -\frac{P}{EI} \left(\frac{1}{2} x'^2 - L_2 x' + D_1 \right)$$

①③より、 $C_2 = D_2 = 0$

②より、 $\frac{1}{6} L_1^3 + L_1 C_1 = 0$

$$\therefore C_1 = -\frac{1}{6} L_1^2$$

$$\textcircled{4}\text{より、}\frac{PL_2}{EIL_1}\left(\frac{1}{2}L_1^2 - \frac{1}{6}L_1^2\right) = -\frac{P}{EI}D_1$$

$$\therefore D_1 = -\frac{1}{3}L_1L_2$$

たわみ曲線は、

$$y_{AB}(x) = \frac{PL_2}{6EIL_1}(x^3 - L_1^2x)$$

$$y_{BC}(x') = -\frac{P}{6EI}(x'^3 - 3L_2x'^2 - 2L_1L_2x')$$

たわみ角分布は、

$$\theta_{AB}(x) = \frac{PL_2}{EIL_1}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}L_1^2\right)$$

$$\theta_{BC}(x') = -\frac{P}{EI}\left(\frac{1}{2}x'^2 - L_2x' - \frac{1}{3}L_1L_2\right)$$

区間ABで、たわみ角が0になる位置(=たわみの変曲点)を求める。

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}L_1^2 = 0 \quad \therefore x = \frac{1}{\sqrt{3}}L_1$$

この位置におけるたわみは、

$$\begin{aligned} y_{AB}(x = \frac{1}{\sqrt{3}}L_1) &= \frac{PL_2}{6EIL_1} \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}L_1^3 - \frac{1}{\sqrt{3}}L_1^3 \right) \\ &= -\frac{PL_1^2L_2}{9\sqrt{3}EI} \end{aligned}$$

ここで、具体的な数字を代入する。(単位はm, N)

$$-\frac{100000 \times 2^2 \times 1}{9\sqrt{3} \times 1.0 \times 10^6} \approx -0.0257m = -25.7mm$$

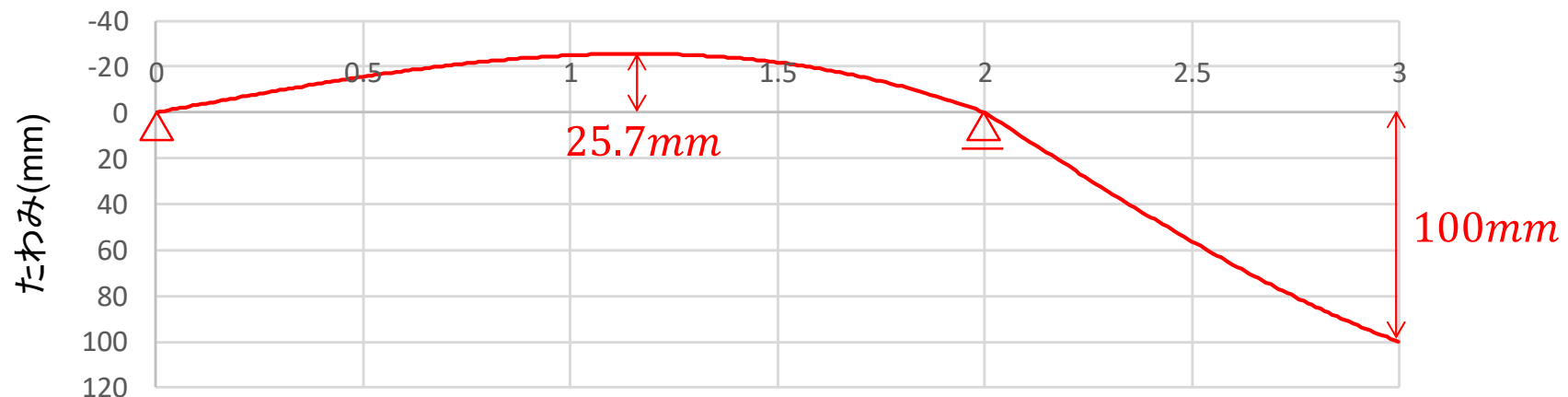
区間BCで、たわみが最大になるのは右端 ($x' = L_2$)
 この位置におけるたわみは、

$$y_{BC}(x' = L_2) = -\frac{P}{6EI} (L_2^3 - 3L_2^3 - 2L_1L_2^2)$$

$$= \frac{PL_2^2}{3EI} (L_1 + L_2)$$

ここで、具体的な数字を代入する。(単位はm, N)

$$\frac{100000 \times 1^2}{3 \times 1.0 \times 10^6} \times (2 + 1) = 0.1m = 100mm$$



想像してみよう

鋼の弾性係数 E は約 $200\text{kN/mm}^2 = 2.0 \times 10^{11} \text{N/m}^2$

$EI = 1.0 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2$ だから、上記の E で割ると、
 $I = 5.0 \times 10^{-6} \text{ m}^4 = 5.0 \times 10^6 \text{ mm}^4$

断面が一片の長さ a の正方形とすると、

$$I = \frac{a^4}{12} = 5.0 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\therefore a \approx 88 \text{ mm}$$

