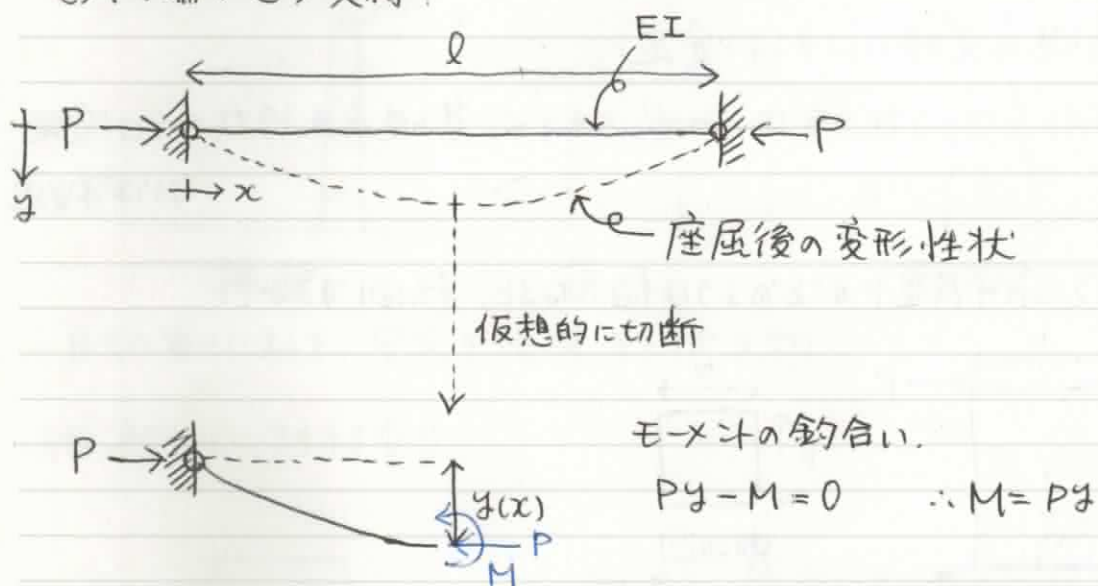


座屈荷重 (オイラーの公式) の導出

座屈は、端部の境界条件の影響を受ける。

① 両端がピン支持



たわみの微分方程式 $M = -EI \frac{d^2 y}{dx^2}$ に代入すると、

$$P y = -EI \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \therefore y'' + \alpha^2 y = 0 \quad \text{ただし } \alpha^2 = \frac{P}{EI}$$

$$y = e^{\lambda x} \text{ と仮定すると, } y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$\therefore y'' + \alpha^2 y = \lambda^2 e^{\lambda x} + \alpha^2 e^{\lambda x} = 0 \quad \therefore \lambda^2 + \alpha^2 = 0 \\ \lambda = \pm i\alpha$$

したがって、

$$y = A e^{i\alpha x} + B e^{-i\alpha x}$$

ここで、オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を使う。

3ページ先へ

$$\begin{aligned} y &= A(\cos(\alpha x) + i \sin(\alpha x)) + B(\cos(-\alpha x) + i \sin(-\alpha x)) \\ &= A(\cos(\alpha x) + i \sin(\alpha x)) + B(\cos(\alpha x) - i \sin(\alpha x)) \\ &= (A+B)\cos(\alpha x) + (A-B)i \sin(\alpha x) \end{aligned}$$

$A+B=C$, $(A-B)i = D$ とおけば、

$$y = C \cos(\alpha x) + D \sin(\alpha x)$$

ここで、境界条件を考えよう。

$x=0$ のとき $y=0$ より、 $C=0$ 。

$x=l$ のとき $y=0$ より、 $D \sin(\alpha l) = 0$ 。

$D=0$ だと、 y は常に 0 ... あり得ない。

$$\therefore \sin(\alpha l) = 0$$

$$\alpha l = n\pi \quad \text{ただし、} n=1, 2, 3, \dots$$

$$\alpha^2 = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$$

$$\alpha^2 = \frac{P}{EI} \quad \text{だから、}$$

$$P = \frac{\pi^2 n^2 EI}{l^2}$$



n は座屈モードを表す。

(右図)

現実的には $n=1$ で座屈。

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (\text{オイラーの座屈荷重})$$