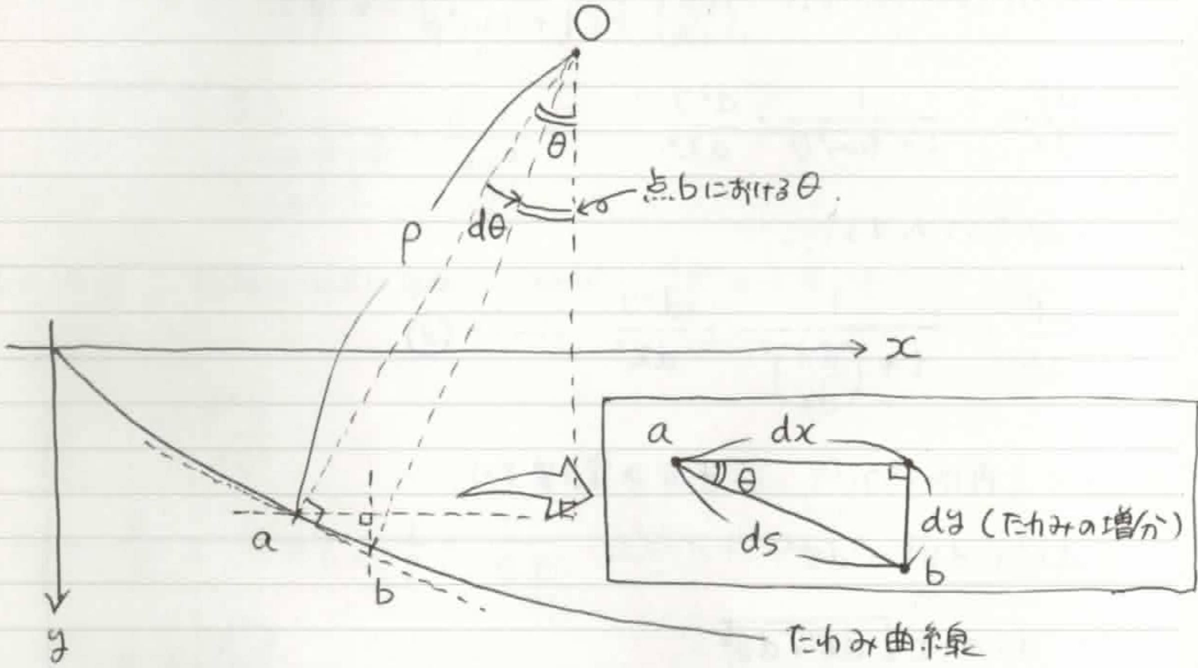
No.
Date.

はりのたわみの微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$ の導出.

前回「はりの応力とひずみ」資料の3枚目「はりの曲げ応力」の式②.

$$M = \frac{E}{\rho} I$$ （ρは曲率半径）



※区間abは微少
→円弧で近似可能
→円弧の長さ ≒ 直線abの長さds.

θを「たわみ角」という.

$$ds = -\rho\, d\theta$$ ※$d\theta$は負値のため、マイナスが付く.
※θはラジアン

したがって、$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\theta}{ds}$ ……①

図から、$\tan\theta = \frac{dy}{dx}$ ……②

No.
Date.

両辺をxについて微分する。θもxの関数（合成関数）

$$\frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\therefore \frac{d\theta}{dx} = \cos^2\theta \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

三角関数の関係式 $\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta}$ を使う.

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{1+\tan^2\theta} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

式②を代入すると、

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{-----} ③$$

図の三角形について. 三平方の定理より.

$$dx^2 + dy^2 = ds^2$$

$$\therefore ds = \pm\sqrt{dx^2+dy^2}$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\pm dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$$

$$= \frac{\pm 1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \quad \text{----} ④$$

式①を次のように書く。

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\theta}{ds} = -\frac{d\theta}{dx}\cdot\frac{dx}{ds}$$

式③と式④を代入すると、

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\times\frac{\mp 1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

$$= \frac{\mp 1}{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}$$

たわみ角 θ は非常に小さいため、$\tan\theta = \frac{dy}{dx}$ の2乗項 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \fallingdotseq 0$.

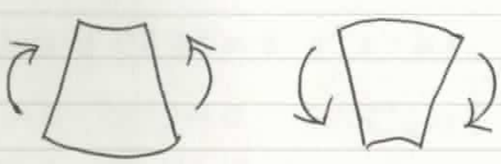
$$\therefore \frac{1}{\rho} = \mp\frac{d^2y}{dx^2}$$

$M = \frac{E}{\rho}I$ なので、$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$ と式に代入すると、

$$\frac{M}{EI} = \mp\frac{d^2y}{dx}$$

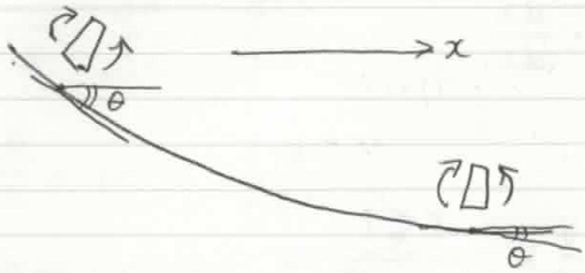
$\pm$ の符号をどのように考えればいいか？

一般的に、曲げモーメントの正負は下図のようにとる。



正　　負.

正の曲げモーメントを受けているとき、はりの変形は.



xの増加するほど、たわみ角θは減少.

→曲げモーメントMとたわみ角θは符号が逆

たわみ角θが正だと、たわみyは下に向かって増加.

→~~曲げモーメントM~~たわみ角θとたわみyは符号が~~逆~~同じ.

したがって、

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}.$$