

柱② Columns (2)

松本浩嗣
Koji MATSUMOTO

長柱 Long column

理論解の導出はオイラー theoretical solution by Euler

(1) 両端ヒンジの柱 column with hinges at both ends

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

荷重 P による横たわみが y であるときの、断面に作用する曲げモーメント M の式 equation for flexural moment M which acts in section where deflection y occurs due to load P

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0 \quad \text{where } M = Py \quad k^2 = \frac{P}{EI}$$

$$\therefore y = A \sin kx + B \cos kx$$

両端での境界条件:

Boundary conditions at both ends:

$$\text{at } x = 0, x = l, y = 0$$

(1) 座屈をしない解 solution without buckling

$$A = B = 0$$

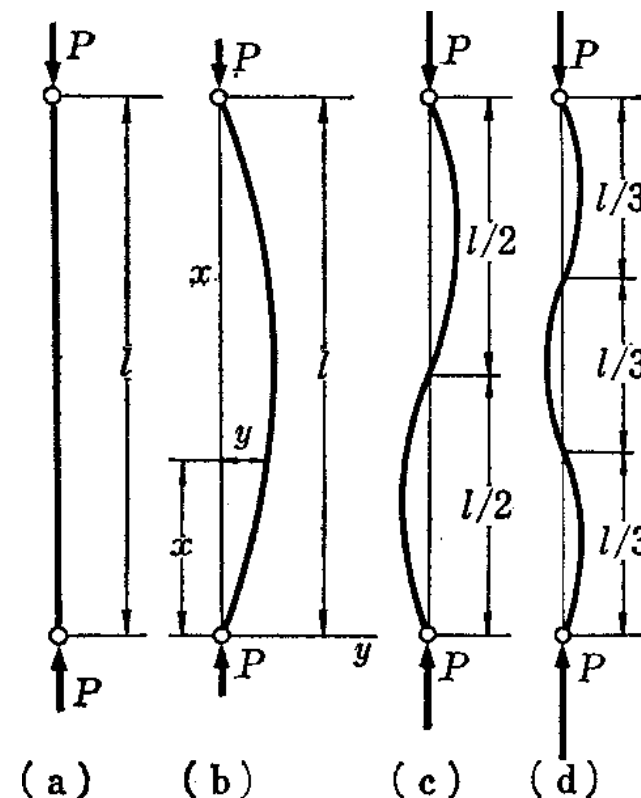
(2) 座屈する解 solution with buckling

$$y = A \sin kx$$

補足として板書内容⑧
を確認すること

ここに
where

$$k = \frac{n\pi}{l}$$



オイラーの公式 Euler's equation

$$P = k^2 EI = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

P の最小値 ($n = 1$ のとき)
Minimum P (when $n = 1$)

P_{cr} は座屈荷重

P_{cr} is buckling load

座屈応力と細長比 Buckling stress and slenderness ratio

座屈荷重を平均応力で表すと, stress corresponding to buckling load is

$$\frac{P_{cr}}{A} \equiv \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{Al^2} = \frac{\pi^2 E}{(l/r)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

座屈応力 buckling stress

ここに, where

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

断面2次半径
2nd section radius

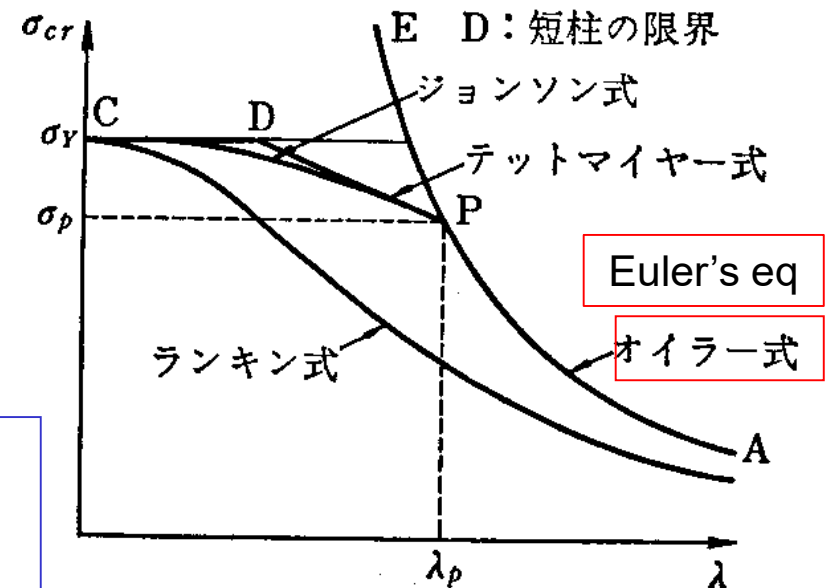
$$\lambda = \frac{l}{r}$$

細長比
Slenderness ratio

比例限度 σ_p 以上では, オイラー式は不成立
Euler's eq cannot be applied to stress greater than proportional limit σ_p

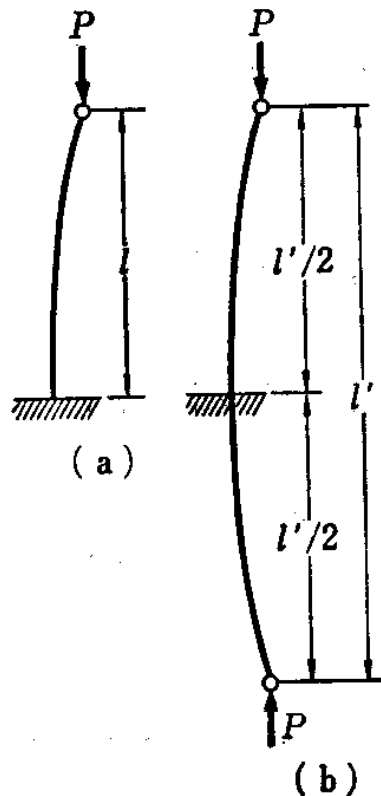
$$\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$$

限界の細長比 ($\sigma_{cr} = \sigma_p$ の時の λ)
Limit of slenderness ratio (λ for $\sigma_{cr} = \sigma_p$)



(2) 一端固定, 他端自由の柱
column with fixed and free end

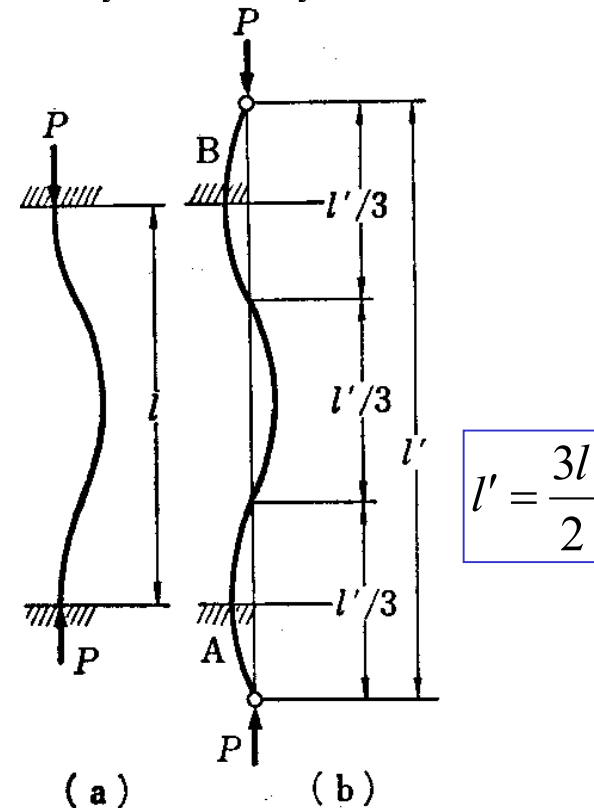
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l'^2} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$



柱の長さが $2l$ の時の両端ヒンジの場合と等価
Equivalent to column with hinges at both ends with length $2l$

(3) 両端固定の柱
column with fixed ends

$$P_{cr} = \frac{9\pi^2 EI}{l'^2} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$



柱の長さが $3l/2$ の時の両端ヒンジの場合と等価
Equivalent to column with hinges at both ends with length $3l/2$

(4) 一端固定, 他端ヒンジの柱
column with fixed end and hinge

$$M = Py - Q(l - x)$$

断面に作用する曲げモーメント(図参照)
flexural moment at cross section (see Fig.)

$$M = -EI \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad k^2 = \frac{P}{EI}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = \frac{Q}{EI} (l - x)$$

$$\therefore y = y_1 + y_2 = A \sin kx + B \cos kx + \frac{Q(l - x)}{P}$$

補助解 supplementary
solution

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0$$

特殊解 particular
solution

上の微分方程式を満足する解として $y_2 = \frac{Q(l - x)}{P}$ がある
 $y_2 = \frac{Q(l - x)}{P}$ as a solution satisfying the above differential eq.

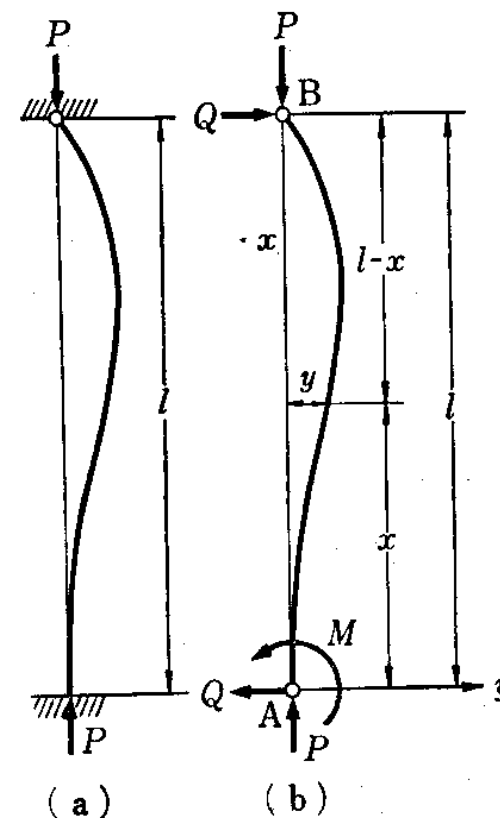
境界条件より,
From boundary conditions

$$\text{at } x = 0, l, y = 0 \Rightarrow \tan kl = kl$$

P が最小となる kl は
 kl to minimize P

$$kl = 4.4934$$

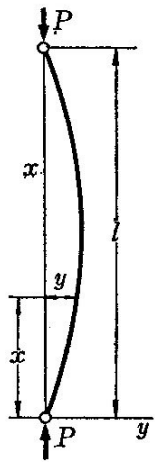
$$\therefore P_{cr} = \frac{20.16EI}{l^2} \cong \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}$$



一般化したオイラー式 Generalized Euler's eq.

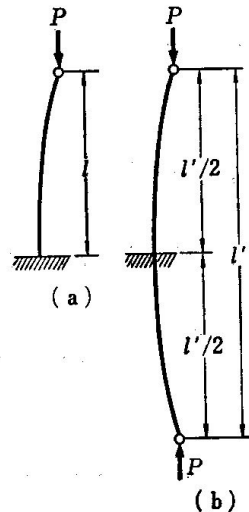
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l'^2} = \frac{\pi^2 EI}{(Kl)^2} \quad (K: \text{有効長さ係数}, l: \text{柱の長さ})$$

両端ヒンジ
hinge ends



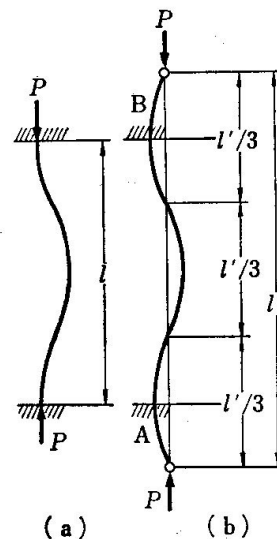
$$K = 1.0$$

一端固定他端自由
fixed and free ends



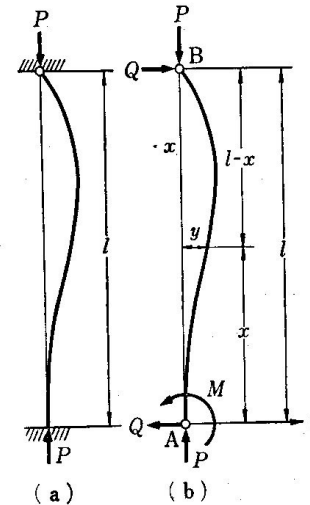
$$K = 2.0$$

両端固定
fixed ends



$$K = 0.5$$

一端固定他端ヒンジ
fixed end and hinge end

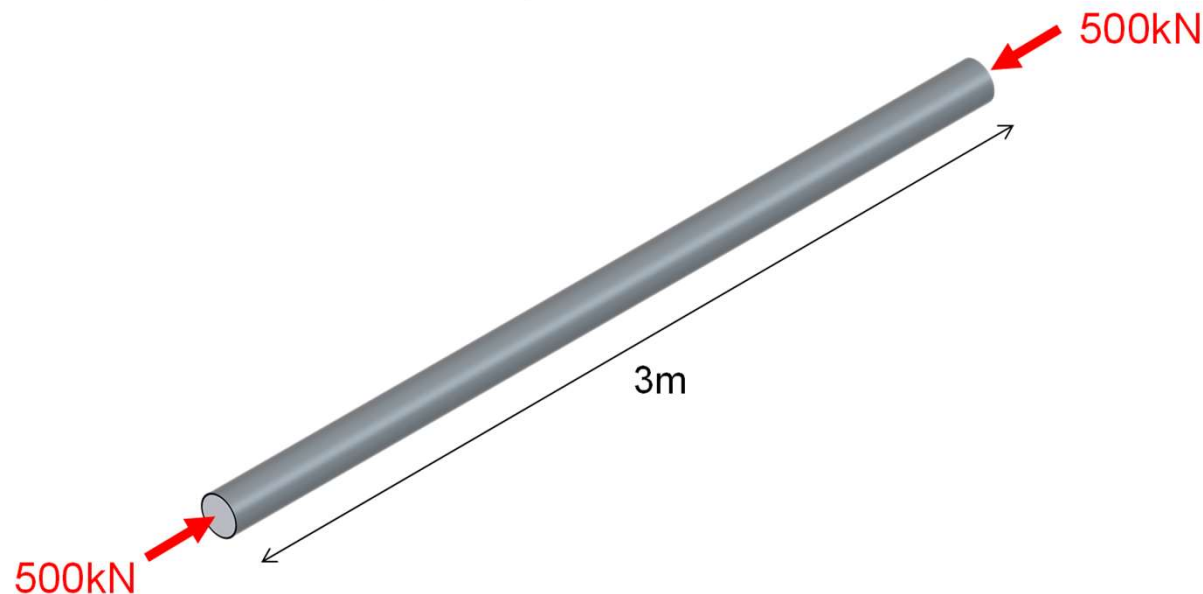


$$K = 0.7$$

公務員試験を受けるなら, 上式とKの値は暗記する.

レポート課題

長さが3mで両端ヒンジの円形鋼柱を設計する。柱には500kNの軸圧縮力が作用する。座屈を避けるためには、断面の直径を何cmにすればよいか？
ただし、鋼の弾性係数 $E=200\text{kN/mm}^2$ 、安全率=3とする（実際よりも3倍の荷重に耐えられるようにするということ）。



提出期限

2020年7月20日(月)