

仕事とエネルギー

Work and Energy

松本浩嗣

MATSUMOTO Koji

弾性エネルギー Elastic energy

仕事とエネルギー Work and energy

- 仕事は力と長さ(力が作用している箇所の作用方向の移動距離)の積 work is product of force and length (moving distance in force direction of object subjected to force)
- 構造物に作用する外力がなす仕事は, 構造物内部のひずみエネルギーとして蓄えられる work by external force acting on structure is stored as strain energy in structure
- ひずみエネルギーの求め方 method for calculating strain energy
 - 直接法 direct method: ひずみから直接算定する calculate directly from strain
 - 間接法 indirect method: 外力の仕事として算定する calculate as work by external force

軸力によるひずみエネルギー Strain energy by axial force

$$dW = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon dV \longrightarrow W = \int_0^l \frac{1}{2} \sigma \varepsilon dV = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{P^2}{EA^2} A dx = \frac{P^2 l}{2EA}$$

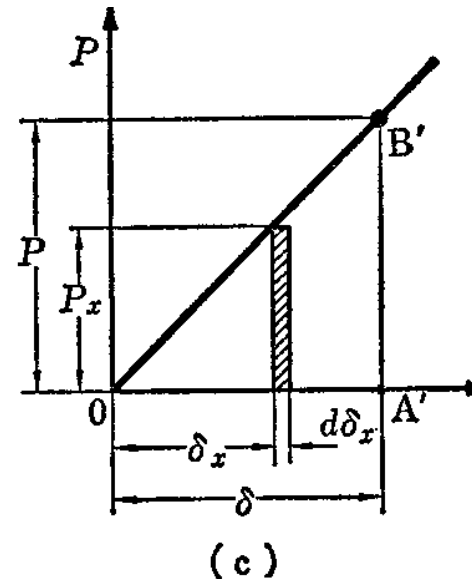
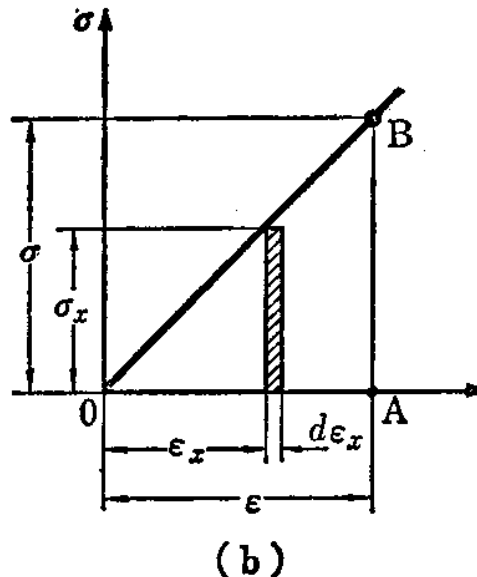
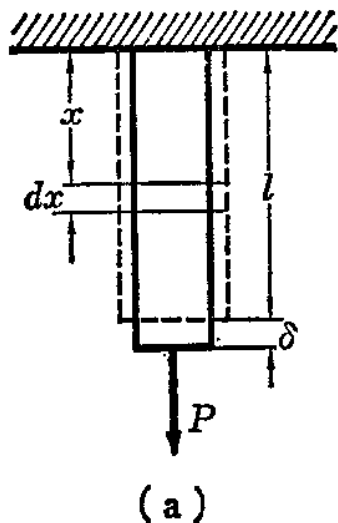
直接法(ひずみの積分)
direct method
(integration of strain)

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \varepsilon = \frac{P}{EA} \quad W = \frac{1}{2} P \delta = \frac{1}{2} P \varepsilon l = \frac{1}{2} P \frac{Pl}{EA} = \frac{P^2 l}{2EA}$$

間接法(外力の仕事)
indirect method (work
by external force)

変位 δ で表すと expressed by deflection δ

$$W = \frac{EA\delta^2}{2l}$$



ひずみエネルギーは、応力とひずみ関係の線と横軸に囲まれた面積 Strain energy is area between stress-strain curve and horizontal axis. 仕事も同様に定まる Work can be obtained similarly.

曲げモーメントによるひずみエネルギー Strain energy by flexural moment

軸方向の積分
integration in
axial direction

断面内の積分
integration in
cross-section

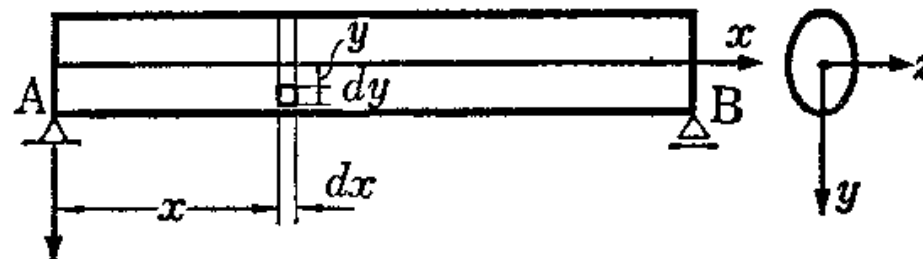
$$W = \int_0^l \frac{1}{2} \sigma \varepsilon dV = \frac{1}{2} \int_0^l dx \int_A \sigma \varepsilon dA = \frac{1}{2} \int_0^l dx \int_A \frac{M^2}{EI^2} y^2 dA = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx$$

体積分
volumetric
integration

$$\sigma = \frac{M}{I} y$$

$$\varepsilon = \frac{M}{EI} y$$

$$\int_A y^2 dA = I$$



せん断力によるひずみエネルギー Strain energy by shear force

$$k = \frac{A}{Ib} G_y$$

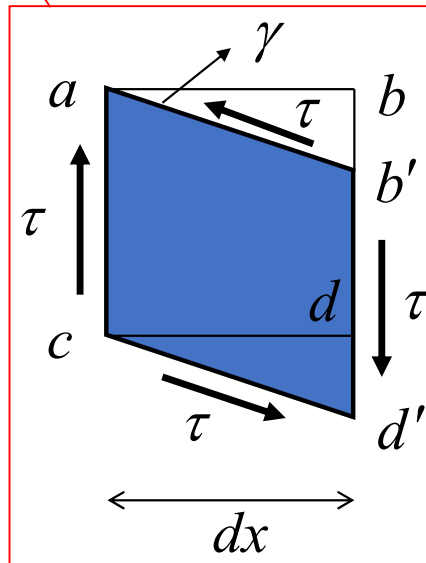
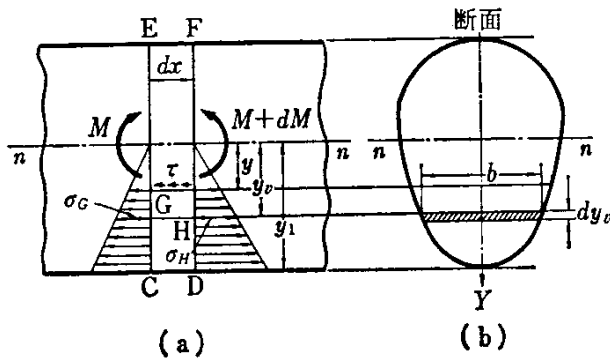
$$W = \int_0^l \frac{1}{2} \tau \gamma dV = \int_0^l \left(\frac{1}{2} \int_A \frac{k^2 Q^2}{GA^2} dA \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\kappa Q^2}{GA} dx$$

$$\tau = \frac{Q}{Ib} G_y = \frac{Q}{A} k$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

$$\int_A \frac{k^2}{A} dA = \kappa \quad \text{ひずみエネルギー係数} \\ \text{strain energy coefficient}$$

$$G_y = \int_y^{y_1} y_v dA$$

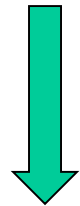


せん断ひずみにより、
はりがたわむ
Shear strain causes
deflection in beam

曲げ部材のひずみエネルギー Strain energy in flexural member

1. 自由端Bに集中荷重 P を受ける片持ちばりの曲げとせん断によるひずみエネルギー Strain energy by moment and shear in cantilever with concentrated load P at free end B

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\kappa Q^2}{GA} dx$$

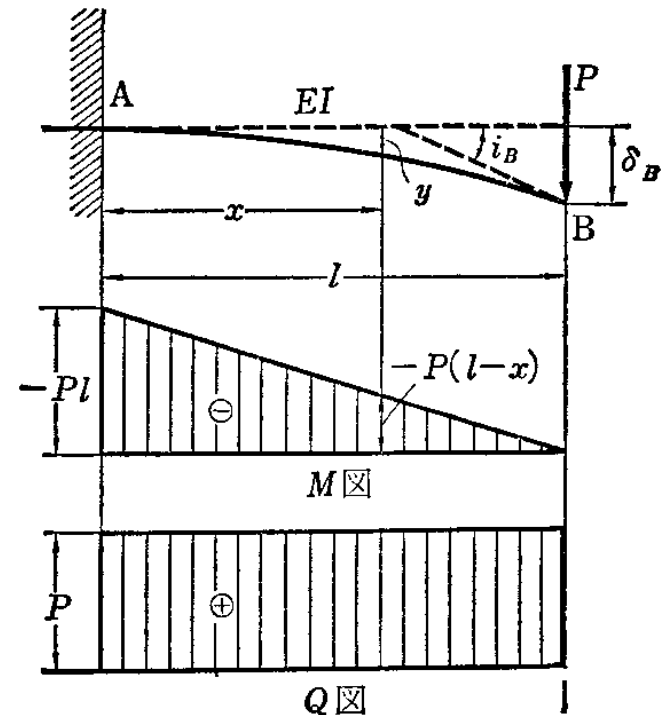


$$M = -P(l - x)$$

$$Q = P$$

$$W = \frac{P^2 l^3}{6EI} + \frac{\kappa P^2 l}{2GA} = \frac{P^2 l^3}{6EI} \left\{ 1 + \frac{6\kappa r^2 (1 + \nu)}{l^2} \right\}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad r^2 = \frac{I}{A}$$



曲げ部材のひずみエネルギー Strain energy in flexural member

1. 自由端Bに集中荷重 P を受ける片持ちばりの曲げとせん断によるひずみエネルギー Strain energy by moment and shear in cantilever with concentrated load P at free end B

W は外力がなす仕事 $\frac{1}{2}P\delta_B$ と等しいので、

$$\frac{1}{2}P\delta_B = \frac{P^2 l^3}{6EI} \left\{ 1 + \frac{6\kappa r^2(1+\nu)}{l^2} \right\}$$
$$\therefore \delta_B = \frac{Pl^3}{3EI} \left\{ 1 + \frac{6\kappa r^2(1+\nu)}{l^2} \right\}$$

第1項が曲げによるたわみ, 第2項がせん断によるたわみ, である.

「3. はりの変形(たわみ)」では, 第2項を無視していた. (例題②で $\delta_B = \frac{Pl^3}{3EI}$ であったことを確認すること.)

「せん断によるたわみ」は, どのくらいの割合で生じるだろうか?

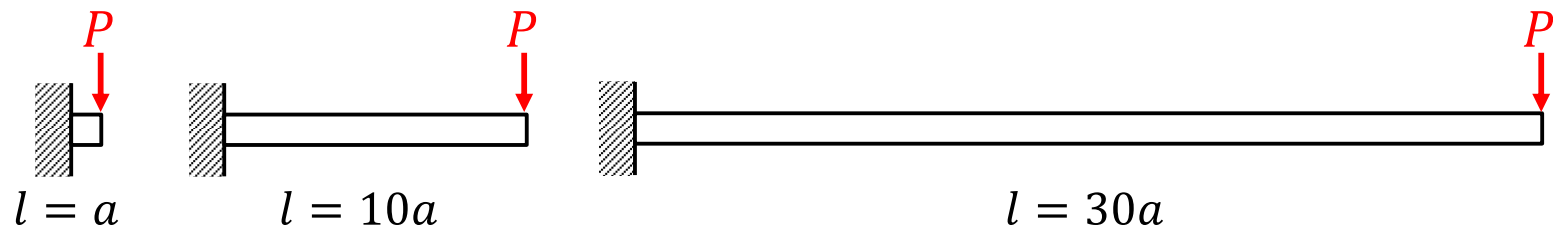
曲げ部材のひずみエネルギー Strain energy in flexural member

1. 自由端Bに集中荷重 P を受ける片持ちばりの曲げとせん断によるひずみエネルギー Strain energy by moment and shear in cantilever with concentrated load P at free end B

①断面が1辺の長さ a の正方形, ②ポアソン比 $\nu=0.3$ (鋼を想定), と仮定すると

$$\delta_B = \frac{Pl^3}{3EI} \left\{ 1 + 23.4 \left(\frac{a}{l} \right)^2 \right\}$$

となる(途中の計算は割愛). ざっくり言えば, **せん断変形の影響は「断面の大きさ」と「はりの長さ」の比で決まる.**



せん断変形
の割合

$$\frac{23.4(a/l)^2}{1 + 23.4(a/l)^2} \times 100(\%)$$

95.9%

(むしろ、
ほとんどが
せん断変形)

19.0%

2.5%

これくらい**スレンダーな形状**であれば、
せん断変形の影響を無視できる。

曲げ部材のひずみエネルギー Strain energy in flexural member

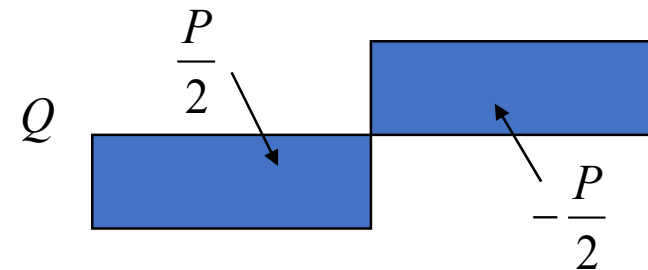
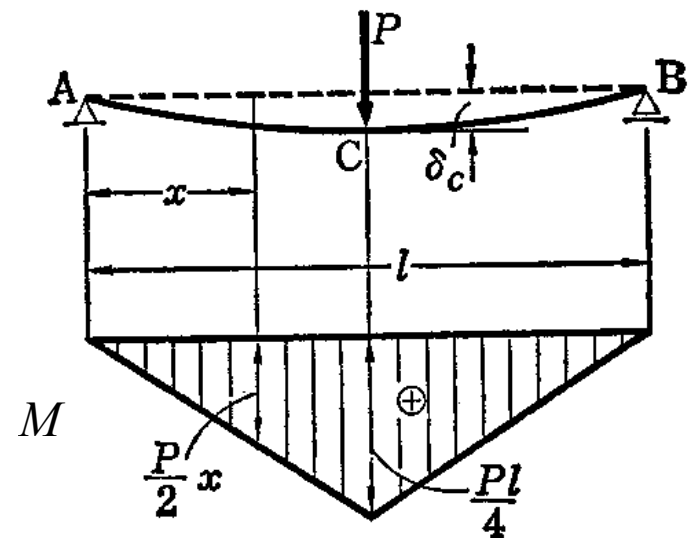
2. 中央に集中荷重 P が作用する単純ばりの曲げとせん断によるひ

ずみエネルギー Strain energy by moment and shear in simple beam with concentrated load P at center

対称性 symmetry

$$\begin{aligned}
 W &= 2 \int_0^{l/2} \frac{M^2}{2EI} dx + 2 \int_0^{l/2} \frac{\kappa Q^2}{2GA} dx \\
 &= 2 \int_0^{l/2} \frac{\{(P/2)x\}^2}{2EI} dx + 2 \int_0^{l/2} \frac{\kappa (P/2)^2}{2GA} dx \\
 &= \frac{P^2 l^3}{96EI} + \frac{\kappa P^2 l}{8GA}
 \end{aligned}$$

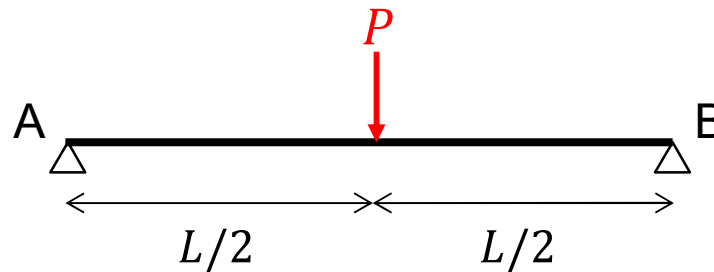
$$M = \frac{P}{2}x, Q = \frac{P}{2} \text{ or } -\frac{P}{2}$$



レポート課題

下図に示す単純支持はりについて、スパン中央(載荷点位置)に生じるたわみのうち、何%がせん断力によるものとなるか、計算しなさい。

ただし、断面は1辺の長さ a の正方形で、 $L=20a$ 、ポアソン比は0.3とする。



提出期限

2020年7月14日(火)