はりの応力とひずみ
Stress and strain in beams

松本浩嗣
MATSUMOTO Koji

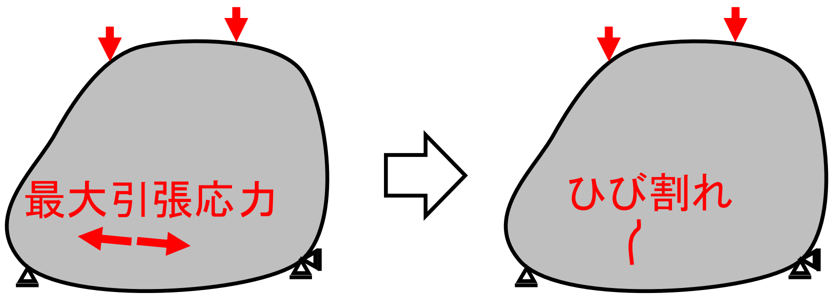
「応力」と「ひずみ」？

「応力」と「ひずみ」の定義については、
https://d-engineer.com/zairiki/ouryokutoha.html
https://d-engineer.com/zairiki/hizumi.html
などが詳しい。簡単に言うと、応力：単位面積あたりの力、ひずみ：元の長さからの変形量の割合、である。

なぜ知る必要があるのか？

構造物が種々の力を受けるとき、応力やひずみは不均一に分布する。最も大きい応力（ひずみ）が発生する位置と方向に応じて破壊（ひび割れ）が発生する。

応力の最大値＜材料の強度ならば、破壊しない。
この設計方法を許容応力度法という。



左図の位置と方向に最も大きい引張応力が作用すると、
右図のようにひび割れが発生

はりの応力Stress in beam

応力計算のための仮定 assumptions for calculation of stresses

1. はりの断面は左右対称 symmetric (right-left) cross-section of beam
2. 曲げを起こす外力は上記の対称面内に作用する external force causing flexure acts in the above cross-section
3. はりの軸に直角な断面は，曲げを受け変形した後も平面を保つ →「平面保持の仮定」 cross-section vertical to beam axis remains in a plane after deformation due to flexure → **“plane conservation”**
4. 応力とひずみは比例する stress is in proportion to strain
5. 材料の弾性係数は引張力と圧縮力に対して同じ Elastic modulus of material is the same both in tension and compression
6. たわみは非常に小さい deflection is very small

はりの曲げ応力 Flexural stress in beam

曲げモーメントMが作用している時の応力σ_x stress σ_x under flexural moment M

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\Delta dx}{dx}$$

※ひずみと応力の定義

$$\Delta dx = \frac{y}{\rho} dx$$

※三角形の相似則

（右図の赤△2つ）

$$\therefore \sigma_x = \frac{E}{\rho} y \quad \cdots ①$$

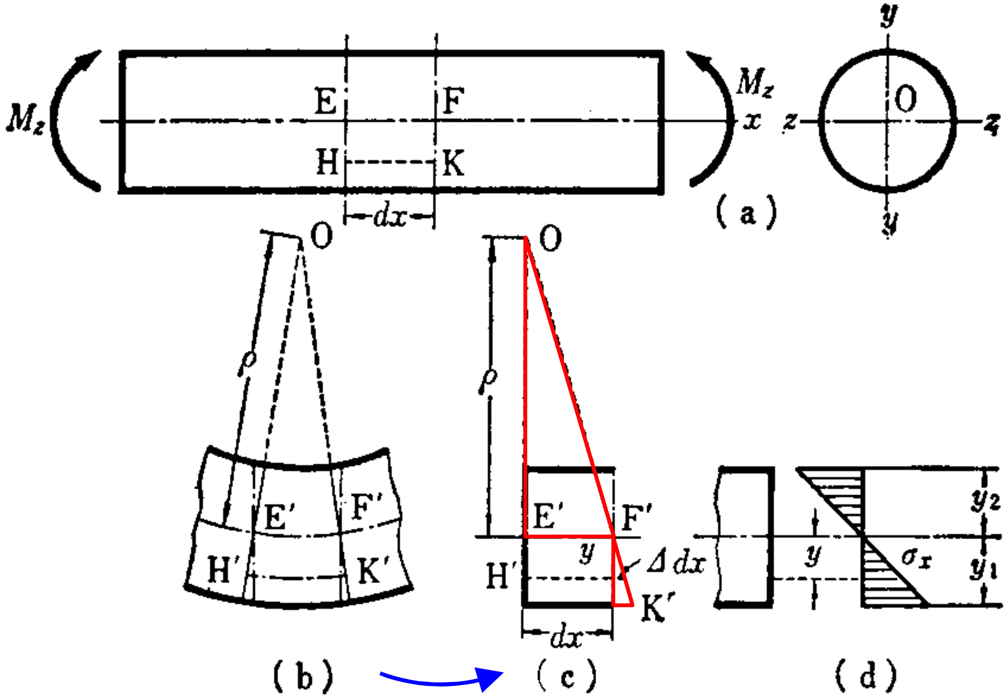
$$dM = \sigma_x dA \times y = \frac{E}{\rho} y^2 dA$$

※モーメントの定義

断面二次モーメント

（構造力学Ｉを復習）

$$\therefore M = \frac{E}{\rho} \int_A y^2\, dA = \frac{E}{\rho} I_z \quad \cdots ②$$



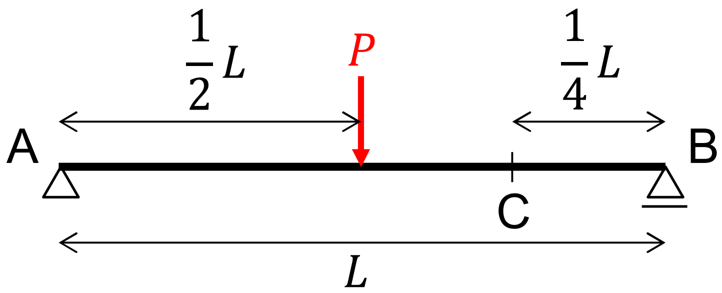
微小変形を仮定

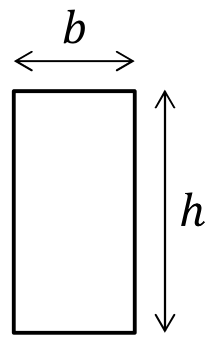
$$\boxed{①②より \sigma_x = \frac{M}{I_z} y}$$

※この式は覚える（公務員試験など）

はりの曲げ応力 Flexural stress in beam

例題





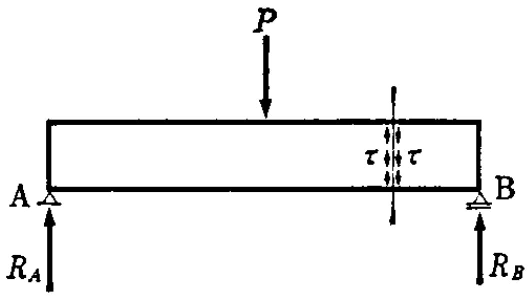
断面図（A～Bで共通）

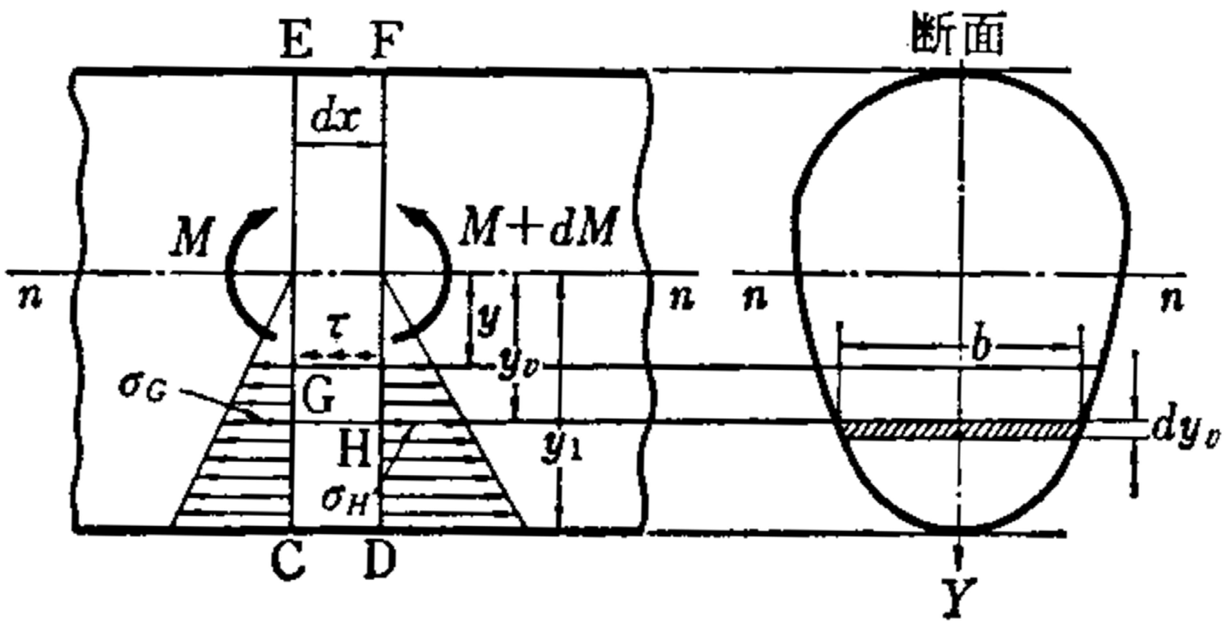
断面Cにおける曲げ応力分布を求めよ。

求め方は、板書内容②-1を確認すること。

はりのせん断応力 shear stress in beam

隣り合う断面での曲げ応力の差異が、せん断応力を生じさせる。
difference in flexural stress between adjacent cross-sections causes shear stress





(a) (b)

要素CDHGに作用する力の釣合いを考えてみよう。

はりのせん断応力 shear stress in beam

<u>断面EC</u>

$$\sigma_G = \frac{M}{I_z} y_v$$

$$\sigma_G dA = \frac{M}{I_z} y_v dA$$

$$\int_y^{y_1} \sigma_G dA = \int_y^{y_1} \frac{M}{I_z} y_v dA$$

<u>断面FD</u>

$$\sigma_H = \frac{M + dM}{I_z} y_v$$

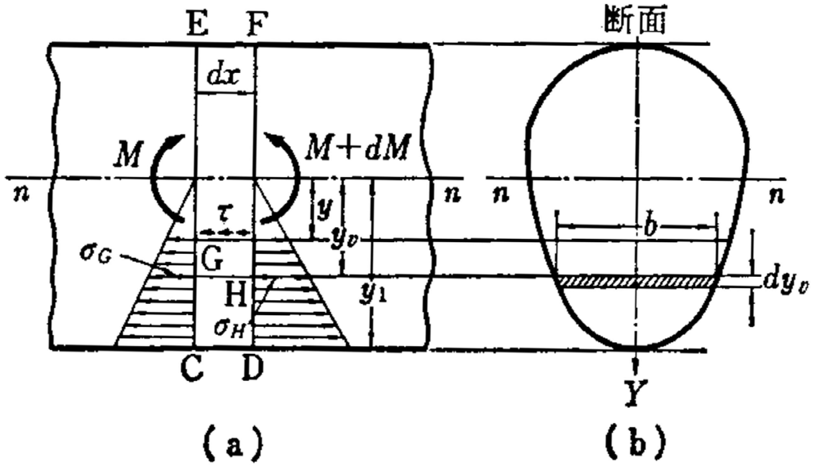
※位置y_vにおける曲げ応力

$$\sigma_H dA = \frac{M + dM}{I_z} y_v dA$$

※図(b)の斜線部に作用する力

$$\int_y^{y_1} \sigma_H dA = \int_y^{y_1} \frac{M + dM}{I_z} y_v dA$$

※y_v=y～y_1の範囲に作用する力



はりのせん断応力 shear stress in beam

要素CDHGの水平方向の力の釣合い

$$\int_{y}^{y_1} \frac{M+dM}{I_z} y_v dA - \int_{y}^{y_1} \frac{M}{I_z} y_v dA - \tau b dx = 0$$

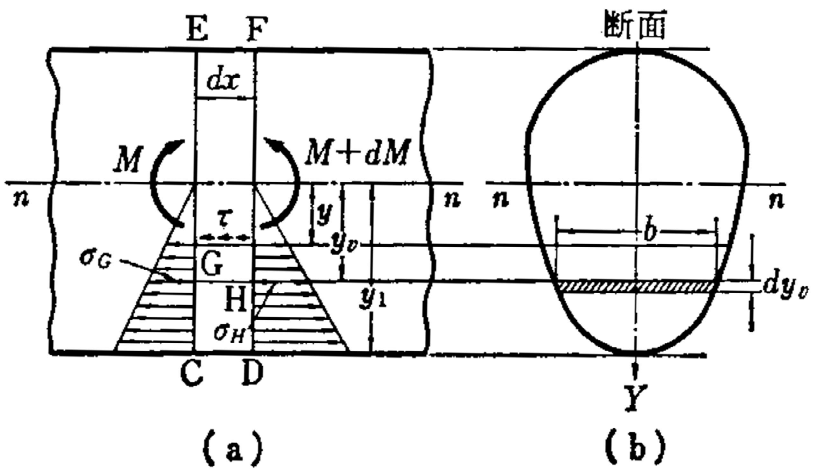
$$\tau b dx = \int_{y}^{y_1} \frac{dM}{I_z} y_v dA = \frac{dM}{I_z} \int_{y}^{y_1} y_v dA$$

$$\therefore \tau = \frac{dM}{dx}\frac{1}{I_z b} \int_{y}^{y_1} y_v dA = \frac{Q}{I_z b} \int_{y}^{y_1} y_v dA$$

※せん断力Qは曲げモーメントMの微分

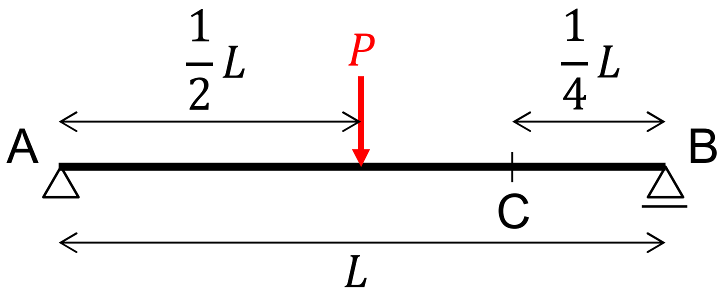
せん断応力の公式

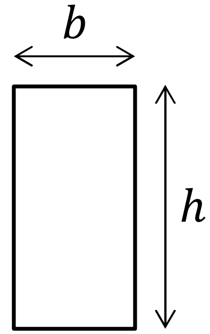
$$\boxed{\tau = \frac{Q}{I_z b} G_y \quad \text{where, } G_y = \int_{y}^{y_1} y_v dA}$$



はりのせん断応力 shear stress in beam

例題





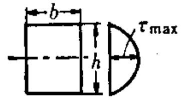
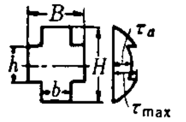
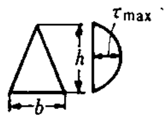
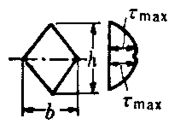
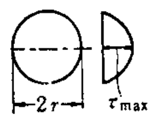
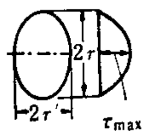
断面図（A～Bで共通）

断面Cにおけるせん断応力分布を求めよ。

求め方は、板書内容②-2を確認すること。

はりのせん断応力 shear stress in beam

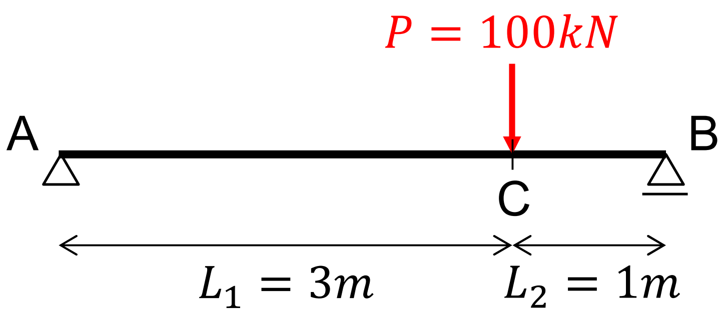
種々の断面のせん断応力 shear stress in various cross-sections

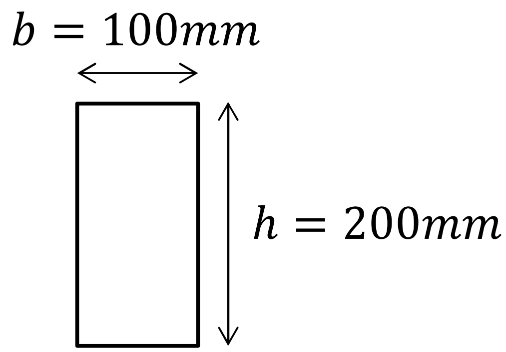
	$\tau_{max}=\frac{3Q}{2bh}$ $\tau_{aver}=\frac{Q}{bh}$ $\frac{\tau_{max}}{\tau_{aver}}=\frac{3}{2}$
	$\tau_{max}=\frac{3Q(BH^2-bh^2)}{2(Bh^3-bh^3)(B-b)}$ $\frac{\tau_{max}}{\tau_{aver}}=\frac{3(BH^2-bh^2)(BH-bh)}{2(BH^3-bh^3)(B-b)}$
	$\tau_{max}=\frac{3Q(H^2-h^2)}{2\{bH^3+(B-b)h^3\}}$ $\tau_a=\frac{3Q\{bH^2+(B-b)h^2\}}{2B\{bH^3+(B-b)h^3\}}$
	$\tau_{max}=\frac{3Q}{bh}$ $\frac{\tau_{max}}{\tau_{aver}}=\frac{3}{2}$
	$\tau_{max}=\frac{9Q}{4bh}$ $\frac{\tau_{max}}{\tau_{aver}}=\frac{9}{8}$
	$\tau_{max}=\frac{4Q}{3\pi r^2}$ $\frac{\tau_{max}}{\tau_{aver}}=\frac{4}{3}$
	$\tau_{max}=\frac{4Q}{3\pi rr'}$ $\frac{\tau_{max}}{\tau_{aver}}=\frac{4}{3}$

せん断応力は、断面の圧縮縁と引張縁付近は小さく、中腹付近で大きくなる傾向がある。

Ｉ型断面では、主にフランジが曲げ応力、ウェブがせん断応力を受け持つ。

レポート課題





断面図（A～Bで共通）

断面Cにおける曲げ応力分布を求めよ。

<u>提出期限</u>

2020年6月23日（火）