

C 測定誤差と有効数字

実験を行う際の測定誤差について考えてみよう [4]。試みに材料工学実験 I の教科書の大きさを手元の定規で測ってみた。因に測定に用いた定規は長さ 30cm で 1cm おきに数字が振っており、その 1cm を 10 等分する 1mm 間隔の目盛がついているなんの変哲もない定規である (JIS マークは付いていない)。教科書の横の長さは大体 21cm なのだが、詳しく見るとほんのわずかだけ 21cm より短かい (図 11 に模式図)。長さを測る時に定規の目盛が 1mm きざみなら、目分量でもう一桁読み取って “20.98cm” を測定値とする。しかしながら目盛は 1mm の幅でしか振られていないので、測定する実験者によってこの長さを 20.99cm と見たり 20.98cm と見たり結果はまちまちであろう。測定結果の “20.9” までは正しいが 4 桁目の “8” は不確かさを含むわけである。このように、測定結果を書く時は不確かさを含む数字を 1 桁加えて書き、また逆に読む時には最後の数字は不確かさを含むものとみなす。例えば測定結果が “20.98cm” と書いてあったら、真の値は 20.97cm かも知れないし 20.99cm かも知れないと理解する約束になっている。この時 “20.9” の部分を有効数字と呼び、上の測定結果は有効数字 3 桁を持つなどと言う。実験者が見積った誤差を “20.98 ± 0.02cm” のように明示する時もある。4 桁目が不確かなので測定結果を書く時に “20.9786cm” などと 4 桁以上数字を並べても無意味である (こんな意味のない数字を書く奴は居ないだろうけど)。逆に定規の目盛は 1mm の刻みなので “21.00cm” と書くべき所を “21cm” と書いてしまうと、測定は 10cm 刻みの定規で行ない、真の値は 20cm かも知れないし 22cm かも知れないと解釈されてしまう (こちらを書く奴は居そうだ…)

小数点がある時は有効数字も分り易いが、大きい数字の場合、例えば太陽の表面の温度が “5800K” であるなどと言う時には有効数字が分りにくい。こんな時は “ $5.8 \times 10^3 \text{K}$ ” のように位取りを 10 の冪で表わして有効数字を分離して書く。

次に誤差の伝播について考える。上のように単一の測定結果により答えが出せる時ばかりではなく、幾つかの測定結果を組合せて答えを出す必要がある場合もある。再び教科書を例にとって今度は面積を考えよう。横の長さと同様に縦の長さを測ったら “29.61cm” であった。上の結果と合せると面積は $29.61 \times 20.98 = 621.2178 \text{cm}^2$ となる。さて小数点以下の “2178” は信頼できる数字だろうか？ ここで掛け算をした個々の数字が不確かさを持つことを思い出そう。例えば測定値 “29.61cm”, “20.98cm” に対応する真の値はそれぞれ 29.60 ~ 29.62cm, 20.97 ~ 20.99cm の範囲に存在するので、真の面積 S_{true} の値は $29.60 \times 20.97 < S_{\text{true}} < 29.62 \times 20.99$ つまり $620.712 < S_{\text{true}} < 621.7238$ の範囲に存在すると考えられる。これを見ると “621.2178” のうち信頼できるのは “621” の部分のみで、小数点以下の “2” の数字には ±5 の不確かさがあることが分る。このように有効数字 3 桁の数同士の

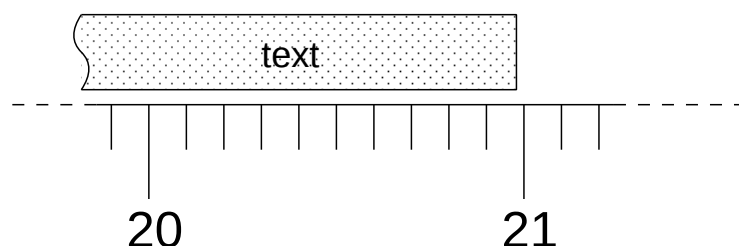


図 11: 定規の目盛の拡大図。

掛け算は有効数字 3 桁を持ち、上のような場合面積は “621.2cm²” と書くべきである (長さの測定の際に “20.98cm” と書くべき所を “20.9786cm” などと目盛で読めないような余計な桁を書く事はないけれど、面積を “621.2178cm²” と書く奴は居そうだから)。

問：教科書の厚みは “0.31cm” であった。背表紙の面積は幾つになるか？

一般に有効数字 m 桁と n 桁 ($m < n$) の量の掛け算や割り算の答えは有効数字の少ない方のデータにあわされて、有効数字 m 桁になると覚えておくとよい。

積/商の有効数字が分ったので次に和/差の有効数字を考える。教科書を補うために時折プリントが配られることがあるが、ノギスで手元のプリントの厚みを測ったところ 18 枚で厚みは “1.59mm” であった (今度はノギスで測ったのもう 1 桁高い精度まで測ることができる)。定規で測った教科書の厚みは 0.31cm=3.1mm なので、このプリントと合せた厚みは $3.1+1.59 = 4.69\text{mm}$ になる。今度はどこまでが信頼できる数字だろうか。プリントの厚みの “1.59” の “5” はノギスで測った信頼できる値だが、教科書の厚み “3.1” の “1” は目分量で決めた値なので不確かさを含む。それ故この二つを加えた “4.69” の “6” は既に不確かさを含む数字になっている。このように和や差の有効数字は精度の悪い方のデータで決められて有効数字の桁数にはよらない。例えば、地球の半径は “6378km” で有効数字 3 桁を持つが、これに有効数字 1 桁の教科書の厚み “3.1mm”

(=0.0000031km) を加えると $6378+0.0000031 = 6378.0000031\text{km} \Rightarrow 6378\text{km}$ となって、教科書の厚みの有効数字 1 桁と関係なく合計は 6378km で、有効数字 3 桁を持つ。測定結果の差を取る時は桁落ちのために有効桁数が減るので注意を要する。例えば地球と太陽の距離の最大値 ($1.521 \times 10^8\text{km}$) と最小値 ($1.471 \times 10^8\text{km}$) の差は $1.521 \times 10^8 - 1.471 \times 10^8 = 0.050 \times 10^8\text{km}$ となり、3 桁の有効数字が 1 桁に落ちてしまう。

問：熱電対の補正曲線の係数の適切な有効数字は何桁になるか？

実験による測定値をもとに各種の量を計算する時には、和や差の計算では精度の悪い方のデータで全体の精度が決り、積や商の計算では有効桁数の少ない方のデータで全体の有効桁数が決る。積や商の計算では以下に示すような誤差の伝播の法則がある。すなわち、測定値 a, b がそれぞれ $\delta a, \delta b$ の誤差を持っているとすると、それらの積 S の誤差 δS は、

$$\begin{aligned} \frac{S + \delta S}{S} &= \frac{(a + \delta a)(b + \delta b)}{ab} \\ &= \frac{ab}{ab} + \frac{a \cdot \delta b}{ab} + \frac{\delta a \cdot b}{ab} \quad (2 \text{ 次の項は無視}) \\ 1 + \frac{\delta S}{S} &= 1 + \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b} \end{aligned}$$

よって

$$\frac{\delta S}{S} = \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b}$$

となる。言葉で説明すると、測定値の積 (商) を取る時は誤差の割合は加算されていく。例えばそれぞれ 5% と 2% の測定誤差を含む量の積は $5\% + 2\% = 7\%$ の誤差を持つ。