

## 4. 引張特性



短繊維補強複合材料では繊維によるひび割れ伝達応力の理解が重要である。

写真は高弾性ポリエチレン繊維を用いた短繊維補強複合材料。

### 4.1 はじめに

この章では、短繊維補強複合材料の引張特性について述べていく。なかでも、脆性材料である母材を、短繊維により補強した複合材料を対象として、その複合材料のひび割れ後の引張特性について述べていく。4.2 節では、短繊維補強複合材料の引張挙動について概説し、繊維の引抜きが複合材料の引張特性に重要であることを述べる。

次に、4.3 節で繊維引抜きモデル (Fiber Pullout Model, FPM) の仮定を示し、FPM による単独の繊維の引抜き荷重-開口幅関係を導出する。さらに、この繊維の引抜き荷重-開口幅関係に基づき、複数の繊維のランダム分布を考慮したひび割れ架橋応力-開口幅関係 (架橋則) を導出し、実験計測との比較によりモデルの妥当性を示す。架橋則を用いた複合材料の引張強度と破壊エネルギーの理論値も導く。

FPM は基本的な架橋則を与えるモデルであるが、複合材料によっては FPM での仮定を改める必要がある。4.4 節では繊維破断を考慮した繊維引抜き破断モデル (Fiber Pullout Rupture Model, FPRM)、4.5 節ではすべり依存摩擦付着を考慮したモデル、4.6 節では繊維引抜き破断モデルにおける界面付着と繊維強度の検討、4.7 節では非直線形状繊維の引抜き破断モデルについて説明し、それぞれのモデルにおいて改めた仮定が架橋則に及ぼす影響について述べる。

## 4.2 引張挙動

短繊維補強複合材料は、母材中に短繊維を分散させて作られる。弾性率や強度に優れる高性能な繊維を用いることにより、複合材料は母材と比較して、弾性率、強度、靱性、延性の向上が図られる。こうした特性向上は圧縮・引張ともに図られるが、本章では引張特性について述べる。また、ひび割れ前の特性である弾性率は本章では扱わない。通常、短繊維補強複合材料では繊維の体積含有率が数パーセントであるため、弾性率の変化は小さい。以下では主に、強度、靱性、延性といったひび割れ後の引張特性向上のメカニズムについて概説していく。

短繊維は、練り混ぜなどのプロセスを通して、理想的には複合材料中のランダムな位置に配置され、配向角度もランダムになるものと考えられる。実際には、練り混ぜや打ち込みの影響があり、完全なランダムにはならないこともあるが、ここでは簡単のためランダム配置かつランダム配向を仮定するものとする。

脆性材料である母材に引張強度が十分に大きい繊維を用いた複合材料に、引張荷重を加えた際の挙動を考えよう。図4-1は短繊維補強複合材料の引張挙動を、図4-2は引張荷重下の応力-歪み関係を模式的に示したものである。

まず、Aの段階は弾性範囲内であり、引張応力 $\sigma$ が増加すると共に引張歪みが比例的に増加していく。母材に比較して弾性率の高い繊維を混入している場合には、複合材料としての弾性率が向上するが、体積含有率が数パーセントの場合には変化は大きくない。引張応力の増加の後に、母材が引張強度に達しひび割れが生じる。この強度を初期ひび割れ強度 $\sigma_{fc}$ 、対応する歪みを初期ひび割れ歪み $\varepsilon_{fc}$ と呼び、図中ではBの段階である。このひび割れは繊維が架橋する形で応力を伝達し、ひび割れ後も即時に複合材料が完全に破壊することはない。一方で、繊維補強なしの場合には、ひび割れが生じると共に破断し、全く応力を伝達しなくなる。複合材料では、引張荷重（変位）を加えるに従い、ひび割れ開口幅 $\delta$ が徐々に増加し、繊維は母材から徐々に引抜かれていく。十分な量の繊維が混入されている場合には、ひび割れ時の初期ひび割れ強度より、繊維の伝達応力が大きくなることもあり、これが複合材料としての引張強度となる。図中ではCの段階であり、この引張強度 $\sigma_t$ に対応する歪みを引張終局歪み $\varepsilon_{ult}$ と呼ぶ。最終段階のDでは、繊維が全て抜け出すことにより応力伝達もなくなり、複合材料は完全に破壊することになる。

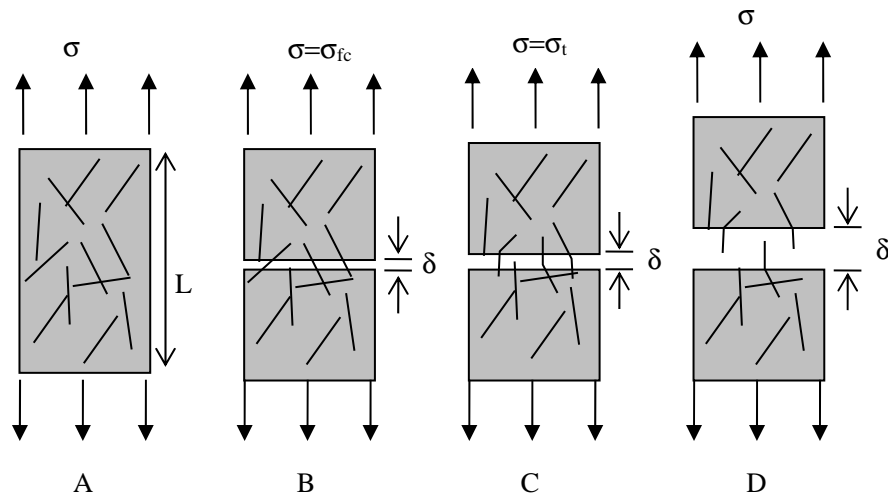


図 4-1 短繊維補強複合材料の引張挙動

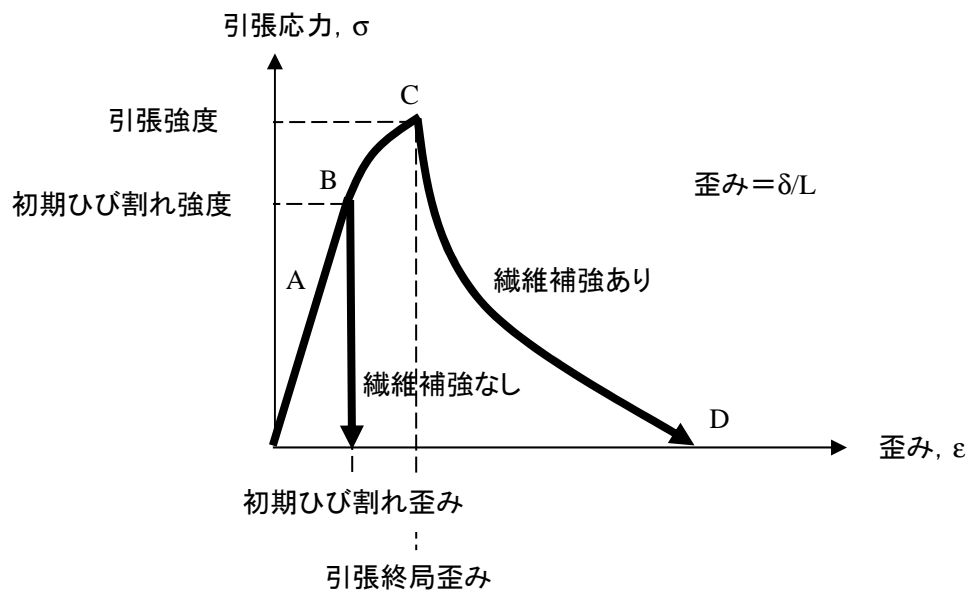


図 4-2 引張荷重下の応力-歪み関係

また、図 4-2 のひび割れ後の応力-歪み関係の下の面積は、弾性変形によるエネルギーを除けば、両ひび割れ面を完全に引き離すのに必要なエネルギー、つまりは破壊エネルギーと等しく、脆性材料である母材と比較して、破壊エネルギーが大きく向上され、靱性が改善される。同時に、歪み性能も大きく向上し、延性度の向上が大きく図られることが示されている。

このように、短繊維補強複合材料においては、ひび割れ面での繊維による伝達応力が引張特性を理解するうえで、非常に重要となる。繊維の弾性率や強度のみならず、繊維長、繊維径、繊維-母

材間の界面付着強度などを考慮する必要がある。上述では、引張強度が十分に大きい繊維を用いて全ての繊維が抜け出す場合について説明したが、引張強度が相対的に十分でない場合には繊維破断を校了する必要が生じる。また、繊維形状が直線ではなく、フックや波形である場合には繊維の塑性変形について考慮しなければならない。

短繊維補強複合材料の引張特性は、こうした繊維、母材、繊維－母材間界面に関する微視的な材料定数によって大きく影響される。微視的材料定数が複合材料の設計を行う上で重要となることが想像されるだろう。106) 章で述べるように、適切な微視的材料設計を行うことで、セメント系複合材料であってもアルミニウム合金並みの破壊エネルギーを発現することが報告されている。

次節以降では、短繊維補強複合材料の様々なひび割れ架橋応力－開口幅関係（架橋則）のモデルについて述べる。

### 4.3 繊維引抜きモデル

繊維引抜きモデル（Fiber Pullout Model, FPM）は、短繊維補強複合材料の力学の基礎となるモデルであり、以下の仮定の下に導出されている。

- ①ひび割れは引張方向に垂直な平面として生じる。
- ②短繊維は母材中の3次元空間にランダムに分散している。
- ③繊維－母材間界面剥離は、ひび割れ側から生じ埋め込み側の繊維端部へと進展する。
- ④界面付着強度は摩擦によるものが支配的であり一定である。
- ⑤繊維強度は繊維の軸応力より大きく破断は生じない。

これらの仮定に基づき、まず単繊維の引抜き荷重－開口幅関係を導出し、そしてひび割れ架橋応力－開口幅関係（架橋則）を導出する<sup>106) 107) 108)</sup>。

#### 4.3.1 単繊維の引抜き荷重－開口幅関係

前節までで、ひび割れ面での繊維抜け出しが繊維補強複合材料の引張特性を理解するうえで非常に重要になることが説明された。ひび割れ面では、多数の繊維がランダムな配置と配向で分散している。本節では、まず単独の繊維の抜け出し挙動をモデル化する。そして、次節にて配置と配向のランダム分散を考慮する。

簡単のため、ひび割れ面が引張荷重方向に垂直に生じるとし、そのひび割れ面に対して垂直方向に一本の繊維が架橋している状況を考え、繊維の引抜き挙動を追っていくことにする（図4-3）。

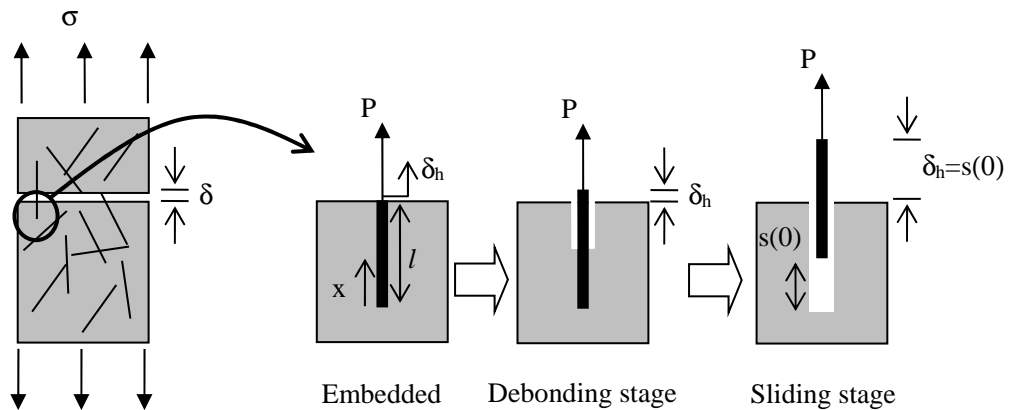


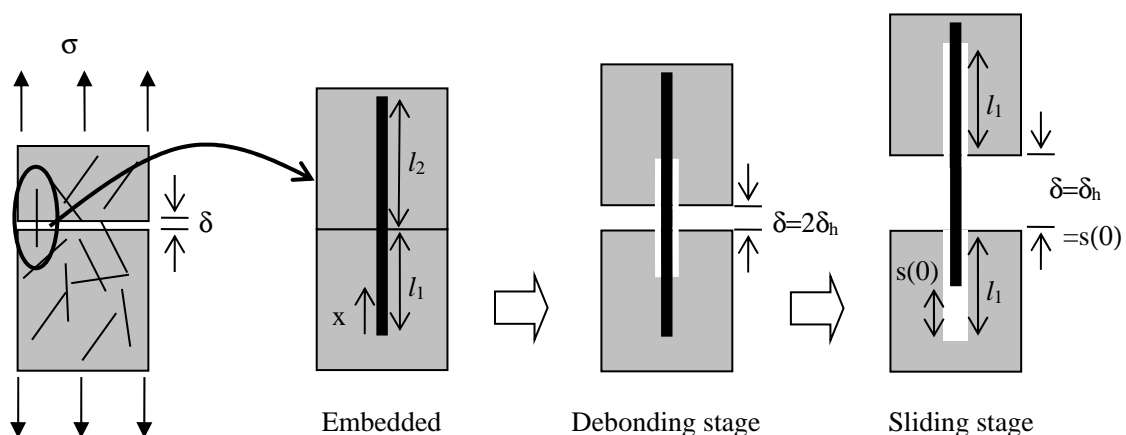
図 4-3 単繊維の抜け出し挙動

まず最初の段階は、繊維が埋め込まれた状態である（図 4-3 の Embedded）。ひび割れでは繊維が力を伝達し、繊維の埋め込まれた部分を通して母材に力が伝達される。この状態では、繊維-母材間の界面の結合により繊維と母材は一体となっている。

さらに引抜きを続けると、繊維-母材間界面の結合がひび割れ側の繊維端部から切れていく（図 4-3 の Debonding stage）。結合が切れた部分では、界面摩擦が働くことになるが、繊維は弾性的な伸びを示すことになり、結果として $\delta_h$ の荷重点作用点変位が生じることになる。

引抜きが続くにつれ、界面の結合は繊維の埋め込み側端部に向かって切れていき、最終的には繊維の全埋め込み長に渡って、界面摩擦が働くことになる。この時点で、繊維全体のすべり出しが始まる（図 4-3 の Sliding stage）。荷重点作用変位 $\delta_h$ は繊維全体のすべり出し量に等しく、埋め込み端部の変位  $s(0)$  に等しい。 $\delta_h$ が繊維埋め込み長  $l$  と等しい時点で完全に引抜かれることになる。

さて、図 4-3 では単繊維の抜け出し挙動を考えたが、ひび割れを架橋する繊維は両側から抜け出すはずである。図 4-4 では、単繊維の両側からの抜け出し挙動を考える<sup>107)</sup>。



#### 図 4-4 単繊維の両側からの抜け出し挙動

ひび割れ面に対して、繊維の位置はランダムに分布するため、繊維の埋め込み長は両側で異なる。ここでは、 $l_1 < l_2$  とし、短いほうを  $l$  と呼ぶ。引抜けに伴う界面結合切れは両側で埋め込み側端部に向かって進んでいき、両側の弾性伸びにより、開口幅  $\delta$  が生じる（図 4-4 の **Debonding stage**）。ゆえに、これは荷重点作用変位  $\delta_h$  の 2 倍に等しい。引抜けがさらに進むと埋め込み長が短い  $l_1$  側で、界面結合切れが埋め込み側端部に到達する。この時点より、繊維全体が  $l_1$  側からすべり出し、開口幅  $\delta$  は  $\delta_h$  もしくは埋め込み側端部の変位  $s(0)$  に等しい（図 4-4 の **Sliding stage**）。この段階においては弾性伸び変位に比較してすべり出し変位の方が大きいので、モデル上前者は無視される。

繊維の引き抜きは上記の段階をたどることになる。引抜き荷重  $P$  は開口幅  $\delta$  の関数であり、当初増加して最終的にはゼロになる。以下では、引抜き荷重—開口幅関係  $P(\delta)$  を導出する。

繊維の引き抜き挙動は、すべり  $s(x)$ 、繊維軸歪み  $\varepsilon(x)$ 、繊維軸力  $F(x)$  について、次の式を解くことにより得られる。なお、 $x$  座標は埋め込み側端部からとることとしている。

$$s(x) = s(0) + \int_0^x \varepsilon(x') dx' \quad (4-1)$$

$$\varepsilon(x) = \frac{4}{\pi d_f^2 E_f} F(x) \quad (4-2)$$

$$F(x) = \int_0^x \pi \tau d_f [1 + \varepsilon(x')] dx' \quad (4-3)$$

ここに、 $d_f$  = 繊維径、 $E_f$  = 繊維弾性係数、 $\tau$  = 繊維—母材間界面摩擦付着強度である。

剥離過程（**Debonding stage**）においては、 $s(0) = 0$  である。これらの式を解いて線形化した解は以下のようなになる。

$$s(x) = \frac{4\tau l}{d_f E_f} \frac{1}{l} \frac{x^2}{2} \quad (4-4)$$

$$\varepsilon(x) = \frac{4\tau l}{d_f E_f} \frac{x}{l} \quad (4-5)$$

$$F(x) = \pi \tau d_f x \quad (4-6)$$

そして、 $x=l$  では、 $F(x=l) = P$  であり、 $s(x=l) = \delta_h$  となり、 $\delta = 2\delta_h$  より、 $P(\delta)$  は

$$P(\delta) = \pi \sqrt{\frac{E_f d_f^3 \tau \delta}{4}} \quad \text{for } \delta \leq \delta_0 \quad (\text{剥離過程}) \quad (4-7)$$

と求まり，ここでは，

$$\delta_0 = \frac{4\tau l^2}{E_f d_f} \quad (4-8)$$

である． $\delta_0$ は図 4-4 の繊維の両側について剥離長が  $l_1$  となった時の開口幅であり，剥離過程が終了する時点である．

次のすべり過程 (Sliding stage) においては，引抜き荷重—開口幅関係  $P(\delta)$ は図 4-4 に図示されているように，母材中にある繊維の表面積に界面摩擦付着強度をかけることで求まる．

$$P(\delta) = \pi \tau d_f l \left[ 1 - \frac{(\delta - \delta_0)}{l} \right] \quad \text{for } \delta_0 < \delta \leq l \quad (\text{すべり過程}) \quad (4-9)$$

ここで， $-\delta_0$ は剥離過程の式との接続を連続にすることを考慮している為である．

以上を図示すると  $l$  に応じて図 4-5 の曲線群のようになり，これが FPM における単繊維の引抜き荷重—開口幅関係となる．ひび割れ面に対する繊維の配置のランダム分散を考慮すると，埋め込み長  $l$  は 0 から  $L_f/2$  の間で等しい確率で分散することになる．よって， $P(\delta)$ 関係は， $l=L_f/2$  の時に最大荷重を示す曲線として表され，その際の $\delta_0$ は

$$\delta^* = \frac{4(L_f/2)^2 \tau}{E_f d_f} \quad (4-10)$$

によって表される．

また，短繊維の引抜き実験を行い荷重—開口幅関係を得ることで，界面摩擦付着強度を推定することができる．摩擦付着強度は繊維の種類により異なる．これは繊維が親水性か疎水性かによるためであり，表面親水化処理によっても変化する．また，フック，インデント，波形などの加工がある場合には機械的な付着を含めて，有効値として考える場合もある．

表 4-1 各種繊維の摩擦付着強度

	$\tau$ (MPa)
ナイロン繊維 <sup>107), 108)</sup>	0.05, 0.16
ポリプロピレン繊維 <sup>107)</sup>	0.10
ポリプロピレン繊維 (十字断面, 凹凸加工) <sup>27), 28)</sup>	2.2, 2.77
鋼繊維 <sup>107), 106)</sup>	2.35, 4.0

高強度ポリエチレン繊維 <sup>109), 106), 108), 110)</sup>	0.54, 1.0, 1.02, 0.9-2.1
アラミド繊維 <sup>110), 108)</sup>	2.0, 4.5

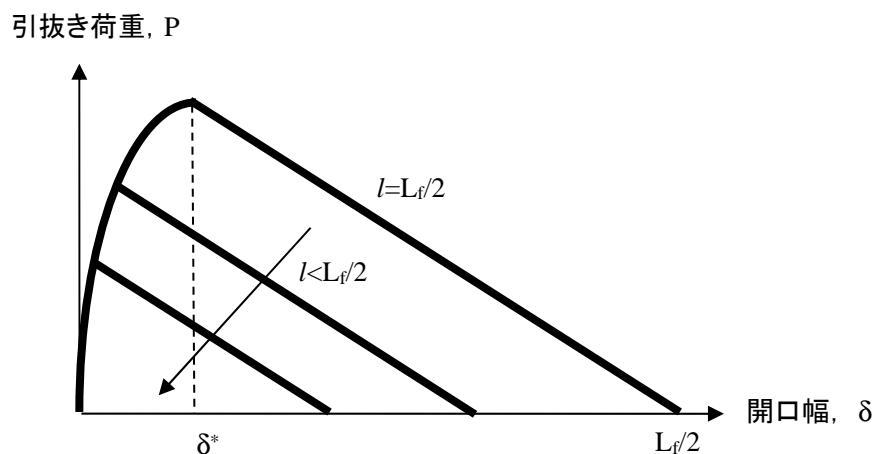


図 4-5 引抜き荷重－開口幅関係

以上は、ひび割れ面に対して垂直に埋め込まれた場合であった。繊維の配置のランダム分散に加えて、配向角度もランダムに分散していることを考慮する必要がある。繊維はひび割れ面に対して、角度を持って埋め込まれており、埋め込み長さ  $l$  が同じであっても角度  $\phi$  が大きくなれば、引抜き荷重は大きくなることが実験により示されている（図 4-8）。

この現象は摩擦滑車の原理によりモデル化されている<sup>108)</sup>。摩擦滑車については、以下に簡単な説明を示す。

今、図 4-6 に示すように、ロープにぶら下がった重りを円形断面の支点を介して引き上げることを考える。ロープは支点と角度  $\alpha$  の円弧区間で接しており摩擦力を受けている。重りによりロープが受ける力を  $P_2$  とし、引き上げる力を  $P_1$  とする。このとき、以下の手順に沿って、 $P_1$  と  $P_2$  の関係を求めることができる。

図 4-7 は円弧区間を微小に区切った要素である。一般に、垂直抗力  $N$ 、摩擦力  $T$ 、静止摩擦係数  $f$  の関係を、 $T=fN$  とする。微小要素の  $x$  方向のつりあい式は、

$$dP \cos(d\theta/2) = dT \quad (4-11)$$

であり、 $y$  方向のつりあい式は、

$$P \sin(d\theta/2) + (P + dP) \sin(d\theta/2) = dN \quad (4-12)$$

である。

角度  $d\theta$  を微小 ( $d\theta \ll 1$ ) とすると、 $x$  方向のつりあい式は、



$$dP = dT \quad (4-13)$$

となり,  $y$  方向のつりあい式は,

$$dN = Pd\theta \quad (4-14)$$

となる.

これらのつりあい式に基づき, ロープの微小要素の支配方程式は,

$$dP = fPd\theta \quad (4-15)$$

となるため, 図1の条件 ( $\alpha$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ) について考えると,

$$\int_{P_2}^{P_1} \frac{dP}{P} = \int_0^{\alpha} f d\theta \quad (4-16)$$

が得られる. これを解くことにより,

$$P_1 = P_2 e^{f\alpha} \quad (4-17)$$

の関係が得られる.

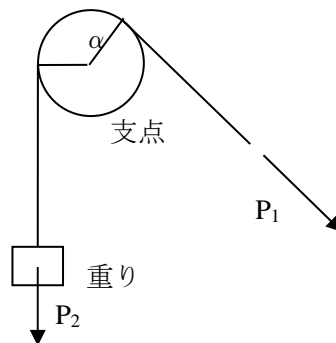


図4-6 摩擦滑車

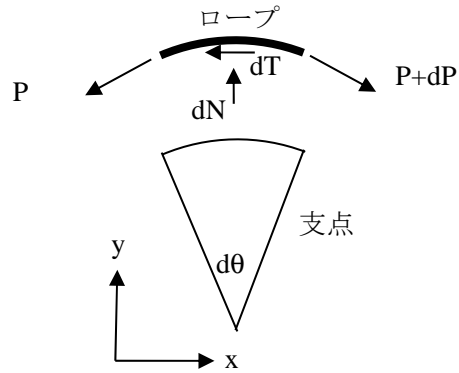


図 4-7 微小要素のつりあい

つまり，以上の摩擦滑車の原理に基づいて引抜き荷重は

$$P(\delta, l, \phi) = P(\delta, l) e^{f\phi} \quad (4-18)$$

で表される（図 4-9）<sup>108)</sup>． $f$  は繊維－母材間界面に依存する定数であり，スナッピング係数（Snubbing coefficient）と呼ばれる．図 4-9 のように実験により決められる定数であり，各種繊維について表 4-2 の値が報告されている．

表 4-2 各種繊維のスナッピング係数

	$f$
ナイロン繊維 <sup>108)</sup>	0.7
ポリプロピレン繊維 <sup>108)</sup>	0.9
鋼繊維 <sup>106)</sup>	1.0
高強度ポリエチレン繊維 <sup>106)</sup>	0.55

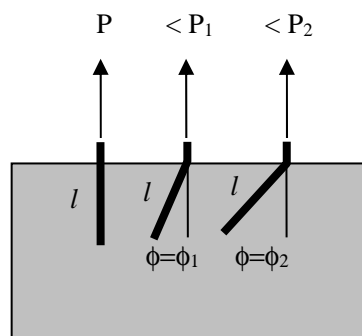


図 4-8 繊維の埋め込み角度と引抜き荷重

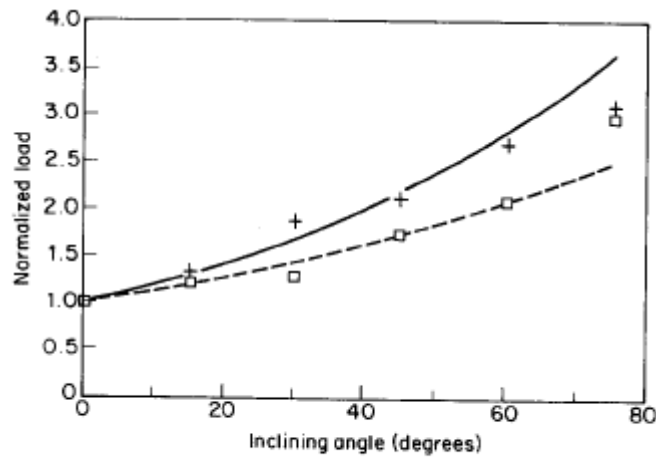


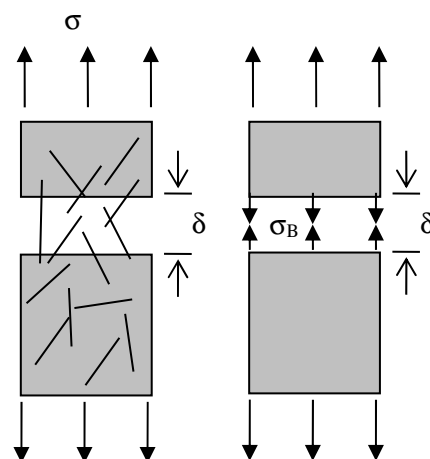
Fig. 9 Comparison between exponential fit curves (solid and broken lines) with experimental data ('+' and '□') for the pull-out load: solid line and '+', nylon; broken line and '□' polypropylene

図 4-9 埋め込み角度と引抜き荷重の関係<sup>108)</sup>

#### 4.3.2 ひび割れ架橋応力-開口幅関係（架橋則）

前節では、単独の繊維の抜け出し挙動をモデル化した。実際のひび割れ面では多数の繊維がランダムな配置と配向で分散している。本節では、繊維の配置と配向のランダム分散を考慮して、FPMにおけるひび割れ架橋応力-開口幅関係（架橋則）を導出する<sup>106)</sup>。

ひび割れ面における架橋応力 $\sigma_B$ は、個々の繊維の伝達力の足し合わせであり、ひび割れ開口幅 $\delta$ の関数となる。すなわち単独の繊維の抜け出し挙動と同様に、ひび割れを架橋する全ての繊維がそれぞれ剥離過程とすべり過程を経ることにより、架橋則 $\sigma_B(\delta)$ は架橋応力が当初増加して最終的にはゼロになる形となる。



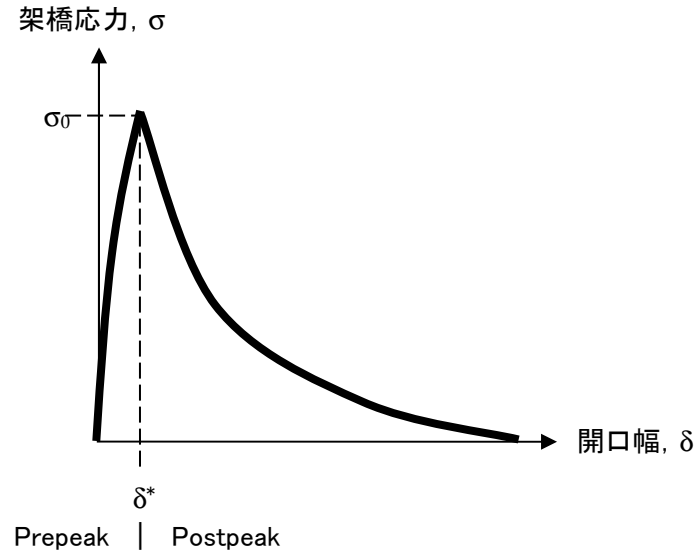


図 4-10 架橋応力-開口幅関係もしくは架橋則

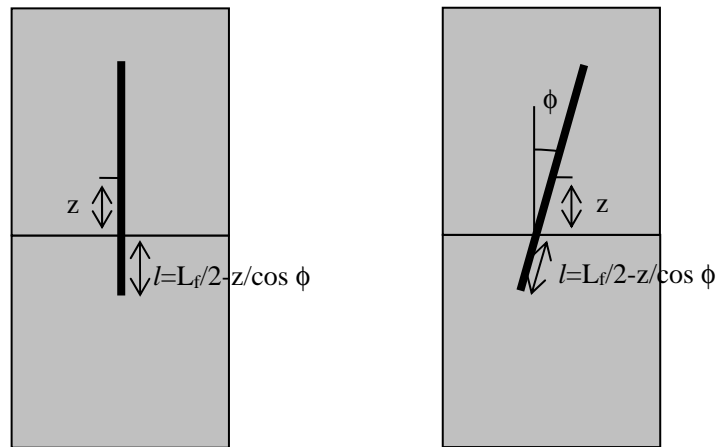
繊維のランダム分散についてはひび割れ面に対して考え、架橋応力に寄与する繊維のみを考慮する。まず配置の分散であるが、ひび割れ面から繊維中心への距離  $z$  の分布は、均一分布を考えると確率密度関数は、

$$p(z) = \frac{2}{L_f} \quad \text{for } 0 \leq z \leq \frac{L_f}{2} \quad (4-19)$$

で表される。また、図 4-11 に示すように、 $z$ 、 $l$  と  $\phi$  の関係は

$$l = \frac{L_f}{2} - \frac{z}{\cos \phi} \quad (4-20)$$

となる。

図 4-11  $z$ ,  $l$  と  $\phi$  の関係

一方で、繊維の配向角度、つまり  $\phi$  の分散は、 $z$  を固定した時に繊維が 3 次元空間中で同じ  $\phi$  をもつ確率  $p(\phi)$  を求めればよい。図 4-12 を参照して確率密度関数は、

$$p(\phi)d\phi = \frac{dA}{A} = \frac{2\pi(l \sin \phi)d\phi}{2\pi l^2} = \sin \phi d\phi \quad (4-21)$$

より

$$p(\phi) = \sin \phi \quad \text{for } 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \quad (4-22)$$

で表される。

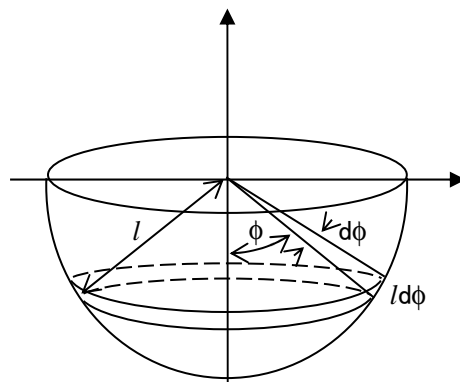


図 4-12 繊維配向角度の 3 次元ランダム分布

以上より、架橋応力 $\sigma_B$ は、配置と配向に関する確率密度関数  $p(z)$ ,  $p(\phi)$ を用いて、次式により求めることができる。

$$\sigma = V_f \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{z=0}^{(L_f/2)\cos\phi} \frac{P(\delta, l, \phi)}{\pi \left(\frac{d_f}{2}\right)^2} p(\phi)p(z) dz d\phi \quad (4-23)$$

ここに、 $V_f$ =繊維体積混入率であり、 $z$  の積分範囲は配向角度 $\phi$ を考慮すると0から  $(L_f/2) \cos\phi$ までとなる。 $P(\delta)$ を代入し、高次項を無視することにより、以下の架橋応力-開口幅関係が求まる。まず、ピーク前の関係は、

$$\tilde{\sigma}(\tilde{\delta}) = g \left[ 2 \left( \frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\delta}^*} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\delta}^*} \right] \quad \text{for } \tilde{\delta} \leq \tilde{\delta}^* \text{ (Prepeak)} \quad (4-24)$$

であり、ここに、

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_0}, \sigma_0 = \frac{V_f \tau \left(\frac{L_f}{d_f}\right)}{2}, \tilde{\delta} = \frac{\delta}{\left(\frac{L_f}{2}\right)}, \tilde{\delta}^* = \frac{2\tau L_f}{E_f d_f}, g = \frac{2}{4+f^2} \left( 1 + e^{\frac{f}{2}} \right) \quad (4-25)$$

である。そしてピーク後の関係が

$$\tilde{\sigma}(\tilde{\delta}) = g(1 - \tilde{\delta})^2 \quad \text{for } \tilde{\delta}^* < \tilde{\delta} \leq 1 \text{ (Postpeak)} \quad (4-26)$$

となる。これらは正規化された形で示されていることに注意する必要がある。また、 $g$  は **Snubbing factor** と呼ばれる。

開口幅が $\delta^*$ となった時点で、架橋応力はピークとなり最大値をとる。これは、最も埋め込み長さの長い  $l=L_f/2$  の繊維についても剥離過程からすべり過程に移行する時点であり、それ以降は全ての繊維がすべり過程にあることを意味する。

図 4-13 は、正規化された架橋則と **Snubbing coefficient** の関係を示しており、繊維の埋め込み角度による引抜き荷重への影響が大きいほど ( $f$  が大きいほど)、架橋応力が大きくなることを示している。

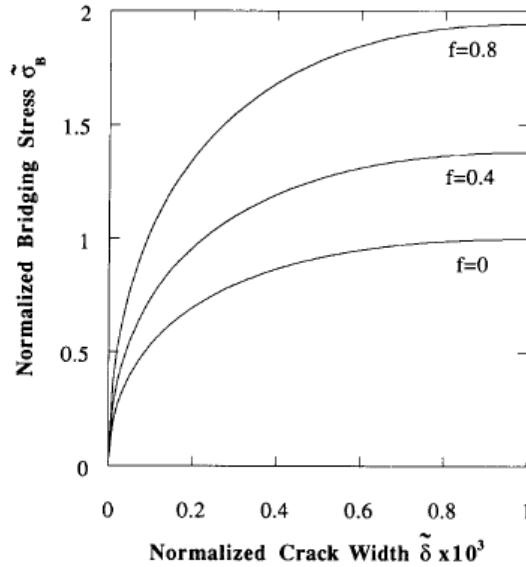


FIG. 3(a). Relationship between Normalized Bridging Stress and Normalized Crack Width for Three Different Values of Snubbing Factor and for Prepeak

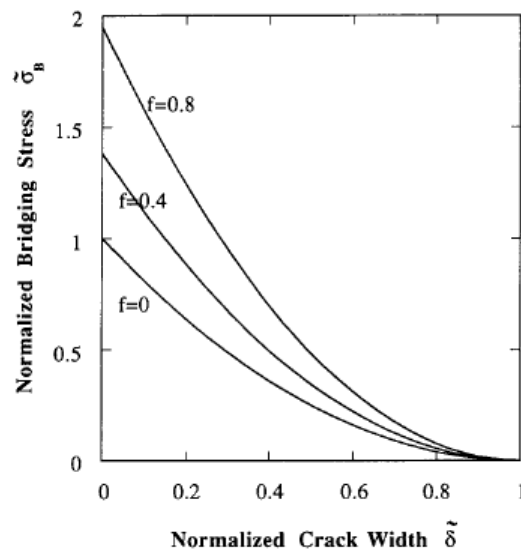


FIG. 3(b). Relationship between Normalized Bridging Stress and Normalized Crack Width for Three Different Values of Snubbing Factor and for Postpeak

図 4-13 ピーク前後の正規化された架橋応力-開口幅関係<sup>106)</sup>

最後に、図 4-14 は、ここで理論的に導出された架橋則を計測結果と比較したものである。計測結果は、繊維体積混入率、繊維長、繊維アスペクト比（長さ／直径）を変えた 5 ケースの鋼繊維補強モルタルと、加えてモルタル強度を変えた 2 ケースの高強度ポリエチレン繊維補強モルタルについて得られているが、いずれも正規化すると理論と一致することが示されており、理論の妥当性を支持している。

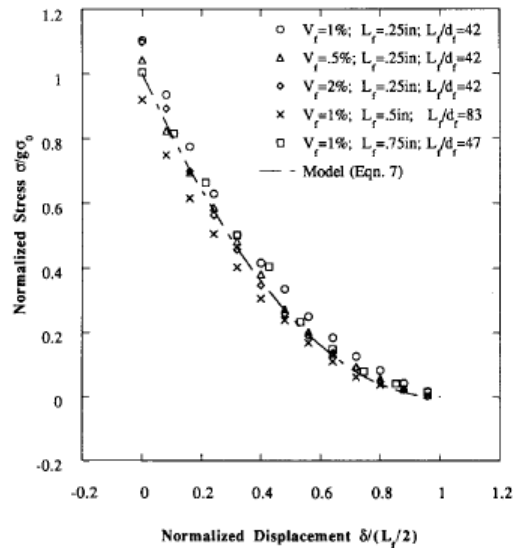


FIG. 5. Comparison of Theoretically and Experimentally Determined Normalized Postpeak Stress-Displacement Curves for Steel Fiber Reinforced Cementitious Composites [Data from Visalvanich and Naaman (1982)]

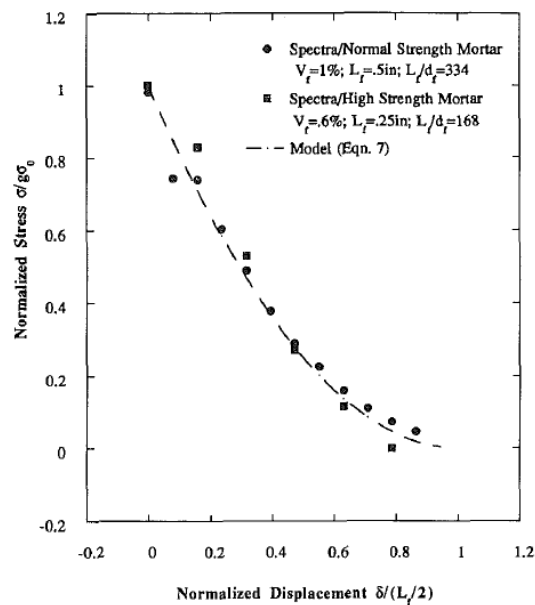


FIG. 6. Comparison of Theoretically and Experimentally Determined Normalized Postpeak Stress-Displacement Curves for Spectra Fiber Reinforced Cementitious Composites [Data from Wang et al. (1990)]

図 4-14 理論的に導出された架橋則と計測された架橋則の比較<sup>106)</sup>

### 4.3.3 引張強度と破壊エネルギー

短繊維補強複合材料の引張強度は、母材の引張強度もしくは架橋応力の最大値のいずれか大きいほうの値で決まる。十分な量の繊維が混入されている場合であれば、母材ひび割れ時の初期ひび割れ強度より、繊維による架橋応力が大きくなり、これが複合材料としての引張強度となる。一方で、



繊維が混入されているものの、その量が十分でない場合には、ひび割れ後の架橋応力は初期ひび割れ強度を越えることなく、複合材料の引張強度は初期ひび割れ強度となる（図4-15）。

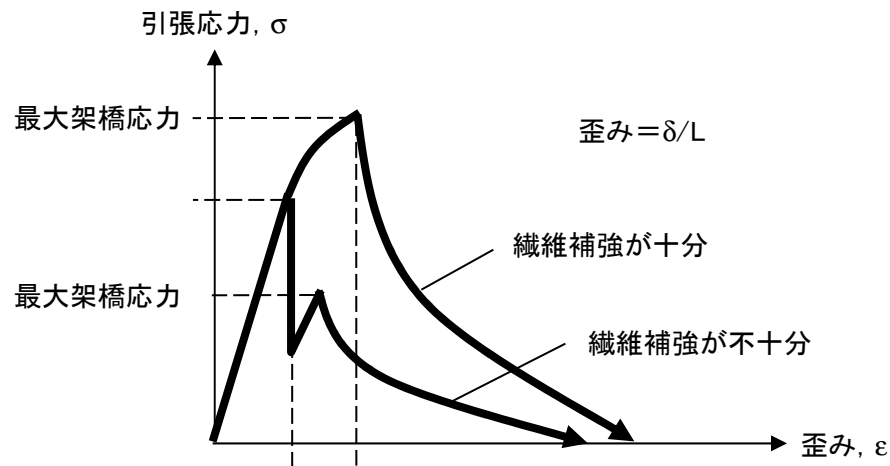


図4-15 複合材料の引張強度

複合材料の引張強度が最大架橋応力で決まる場合には、理論より次式のように与えられる。

$$g\sigma_0 = g \frac{V_f \tau \left( \frac{L_f}{d_f} \right)}{2} \quad (4-27)$$

架橋則により破壊エネルギーを算出することもできる。破壊エネルギーは、両ひび割れ面を完全に引き離すのに必要なエネルギーであり、架橋応力-開口幅関係を積分することで得られる。架橋則のピーク前後に分けて破壊エネルギーを算出すると、

$$\int_0^{L_f/2} \sigma(\delta) d\delta = \int_0^{\delta^*} \sigma(\delta) d\delta + \int_{\delta^*}^{L_f/2} \sigma(\delta) d\delta = G_r + G_c \quad (4-28)$$

より、ピーク前の架橋による破壊エネルギーは、

$$G_r = \frac{5}{24} g \tau V_f d_f \left( \frac{L_f}{d_f} \right)^2 \tilde{\delta}^* \quad (4-29)$$

となり、ピーク後の架橋による破壊エネルギーは、

$$G_c = \frac{1}{12} g \tau V_f d_f \left( \frac{L_f}{d_f} \right)^2. \quad (4-30)$$

となる。通常、 $\tilde{\delta}^*$ は非常に小さいため、 $G_r \ll G_c$ となり、 $G_r$ は無視できる。よって、FPMに基づく短繊維補強複合材料の破壊エネルギーは $G_c$ によって与えられることになる。

図4-16は、ピーク後の破壊エネルギー $G_c$ について、 $G_c/(gV_f d_f \tau/12)$ と $L_f/d_f$ の対数により傾き2となるようにしたものである。鋼繊維補強モルタルと高強度ポリエチレン繊維補強モルタルについて良好な一致が得られていることが分かる。

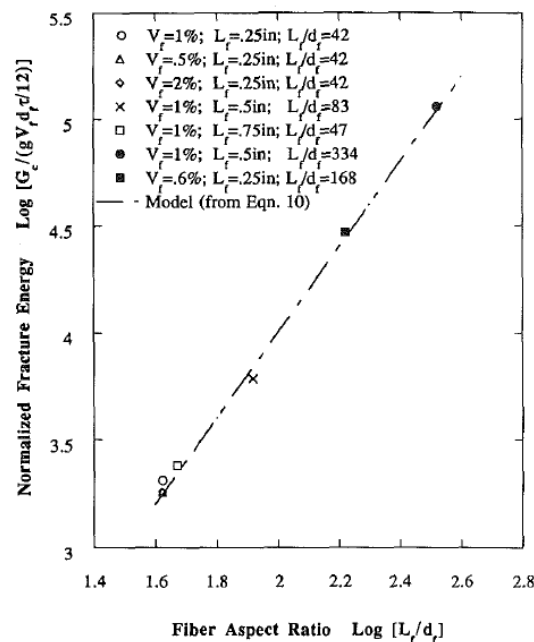


FIG. 8. Comparison of Theoretically and Experimentally Determined Normalized Fracture Energy for Spectra Fiber Reinforced Cementitious Composites [Data from Wang et al. (1990)]

図4-16 理論的に導出された破壊エネルギーと計測値の比較<sup>106)</sup>

#### 4.4 繊維引抜き破断モデル

前節の繊維引抜きモデル (Fiber Pullout Model, FPM) では、⑤繊維強度は繊維の軸応力より大きく破断は生じない、という仮定を置いていた。この仮定により、繊維は破断することなく母材からすべて引き抜かれることになる。実際にはこの仮定が妥当でない場合もあり、繊維軸応力が繊維強度を上回るときには繊維破断が生じる。本節では、他の仮定を保持した上で⑤の仮定を改めた、一定の繊維強度の下での繊維破断を考慮した繊維引抜き破断モデル (Fiber Pullout Rupture Model, FPRM) のひび割れ架橋応力—開口幅関係 (架橋則) について説明する<sup>111)</sup>。

#### 4.4.1 単繊維の引抜き荷重－開口幅関係

繊維破断を考慮した繊維引抜き破断モデル (FPRM) は、繊維引抜きモデル (FPM) の引抜き荷重－開口幅関係  $P(\delta)$  と架橋則  $\sigma_B(\delta)$  を修正して導出される。修正は、破断した繊維をひび割れ架橋応力の算出から除くことでなされる。

FPM の  $P(\delta)$  において、埋め込み長さ  $l$  の繊維の最大引抜き荷重は  $\delta = \delta_0$  の時に生じ、

$$P(\delta = \delta_0) = \pi \tau d_f l \quad (4-31)$$

である。これを繊維の断面積で割ると繊維の軸応力

$$\frac{P(\delta = \delta_0)}{\pi \left(\frac{d_f}{2}\right)^2} = \frac{4\tau l}{d_f} \quad (4-32)$$

が得られる。軸応力が引張強度  $\sigma_{fu}$  に達するときに繊維の破断が生じる。 $\sigma_{fu}$  との等式を埋め込み長さについて変形して、このときの埋め込み長さを限界埋め込み長さ  $L_c$  とすると、

$$L_c = \frac{\sigma_{fu} d_f}{4\tau} \quad (4-33)$$

であらわされる。FPM と同様に繊維の埋め込み長さ  $l$  は 0 から  $L_f/2$  の範囲で一様に分布すると仮定すると、 $L_c$  より短い埋め込み長さの繊維は破断せずに引抜かれることになり、 $L_c$  より長い埋め込み長さの繊維は破断が生じることになる。

以上は埋め込み角度が 0 度の場合であり、埋め込み角度によるスナッピング効果を考慮すると繊維の軸応力は増大するため、限界埋め込み長さ  $l_u$  は

$$l_u = L_c e^{-\phi} \quad (4-34)$$

となり、埋め込み長さが  $l_u$  より短い繊維は破断せずに引抜かれ、長い繊維は破断が生じる。

図 4-17 は、繊維破断が生じる埋め込み長さ  $l_u$  と埋め込み角度  $\phi$  の関係を示す繊維破断領域図である。埋め込み角度は 0 から 90 度の範囲で一様に分布すると FPM 同様に仮定するが、上式において埋め込み角度  $\phi$  が 90 度の時に  $l_u$  は最も小さくなり、0 度の時に最も大きくなる。一様分布する埋め込み長さの最大値は  $L_f/2$  であるため、これが 90 度の時の  $l_u$  より小さければ、すべての繊維が破断せずに引抜かれることになる。この時の繊維長の条件は

$$\frac{L_f}{2} < \frac{L_r}{2} = L_c e^{-\frac{f\pi}{2}} \quad (4-35)$$

で表され、図 4-17 では (a) で示されている。ここで  $L_r$  を最小限界繊維長と呼ぶ。図 4-17 の (b) は繊維長が

$$\frac{L_r}{2} = L_c e^{-\frac{f\pi}{2}} < \frac{L_f}{2} < L_c \quad (4-36)$$

の条件にあるときであり、斜線部の領域にある埋め込み長さ  $L_f$  と埋め込み角度  $f$  の繊維が破断する。図中の  $\phi_b$  は次式で与えられる。

$$\phi_b = -\left(\frac{1}{f}\right) \ln\left(\frac{L_f}{2L_c}\right) \quad (4-37)$$

同様に、図 4-17 の (c) は繊維長が

$$L_c < \frac{L_f}{2} \quad (4-38)$$

の条件にあるときであり、斜線部の領域の繊維が破断する。ここでは、全ての埋め込み角度において破断する繊維が存在し、0 度についても埋め込み長さが  $L_c$  を超える繊維は破断することになる。

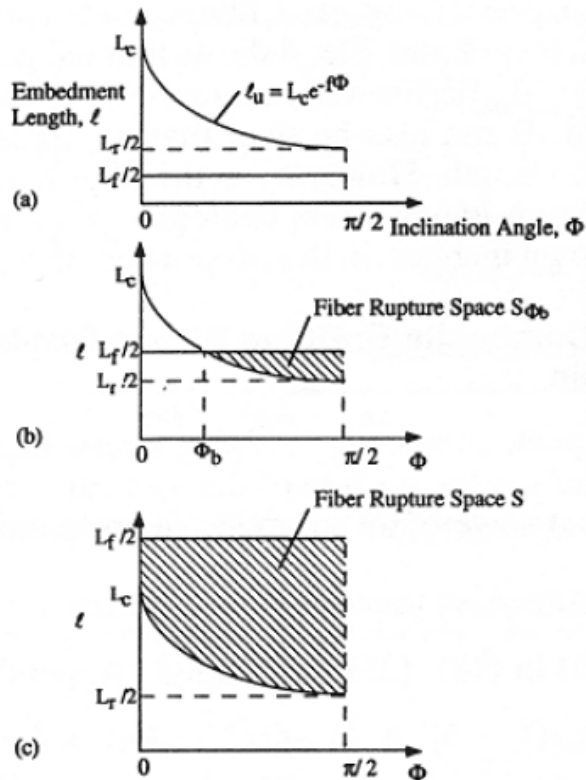


FIG. 3. Fiber Rupture Space

図 4-17 繊維破断領域図<sup>11)</sup>

次に、単繊維の引抜き荷重－開口幅関係を考える。

FPM においては、単繊維に引抜き荷重を与えると、剥離過程で荷重が増加し、すべり過程で荷重が減少する（図 4-5）。今、図 4-17 の繊維破断領域に含まれる埋め込み長さ $l$ と埋め込み角度 $\Phi$ を有する繊維は破断することが分かっている。破断に至るまでは、FPM の剥離過程をなぞるとすると、破断は剥離過程の引抜き荷重増加中に発生することになる。剥離過程の繊維引抜き荷重は式(4-7)で表されるため、これを断面積で割ると、繊維の軸応力が得られる。

$$\frac{P(\delta)}{\pi \left(\frac{d_f}{2}\right)^2} = \frac{\pi \sqrt{\frac{E_f d_f^3 \tau \delta}{4}}}{\pi \left(\frac{d_f}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4\tau E_f \delta}{d_f}} \quad (4-39)$$

が得られる。スナッピング効果を考慮して、繊維の破断強度との等式を開口幅 $\delta$ について変形すると、

$$\delta_u = \frac{\sigma_{fu}^2 d_f}{4\tau E_f} e^{-2f\phi} = \delta_c e^{-2f\phi} \quad (4-40)$$

が得られ、開口幅 $\delta_u$ において破断が生じることになる。つまり、式(4-7)による剥離過程の繊維引抜き荷重－開口幅関係  $P(\delta)$ は $\delta_u$ にて打ち切りとなり、 $\delta_u$ より大きい開口幅では当然荷重の分担はない。よって、 $P(\delta)$ はFPMの剥離過程の式(4-7)を用いて次式で表される。

$$P(\delta) = \pi \sqrt{\frac{E_f d_f^3 \tau \delta}{4}} U(\delta_c e^{-2f\phi} - \delta) \quad \text{for } \delta \leq \delta_0 \text{ (剥離過程)} \quad (4-41)$$

ここに、 $U$ は単位ステップ関数であり、

$$U(\delta_c e^{-2f\phi} - \delta) = 1 \quad \text{for } \delta \leq \delta_c e^{-2f\phi} \text{ or } \phi \leq \phi_c \quad (4-42)$$

$$U(\delta_c e^{-2f\phi} - \delta) = 0 \quad \text{for } \delta > \delta_c e^{-2f\phi} \text{ or } \phi > \phi_c \quad (4-43)$$

である。 $\phi_c$ は

$$\phi_c = -\left(\frac{1}{2f}\right) \ln\left(\frac{\delta}{\delta_c}\right) \quad (4-44)$$

により与えられ、開口幅 $\delta$ の時点で $\phi_c$ を超える繊維は既に破断していることを意味する。

一方で、図4-17の繊維破断領域に含まれない繊維は破断せずに剥離過程の後にすべり過程を経て完全に引き抜かれる。例えば、埋め込み長さが短い繊維は、繊維軸応力が大きくならないために破断強度に達しない。こうした繊維は、FPMと同様の引抜き荷重－開口幅関係を示し、剥離過程の式(4-7)とすべり過程の式(4-9)で表される。

#### 4.4.2 ひび割れ架橋応力－開口幅関係（架橋則）

FPRMのひび割れ架橋応力－開口幅関係（架橋則）は、図4-17の繊維破断領域図を踏まえて、上記のように区分した  $P(\delta)$ について式(4-23)を用いて積分することで導出される。架橋則は図4-17の(b)と(c)の場合について導出されている。

$L_r < L_f < 2L_c$ の場合、破断過程完了前の関係は

$$\tilde{\sigma}(\tilde{\delta}) = g \left[ 2 \left( \frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\delta}^*} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\delta}^*} \right] \quad \text{for } \tilde{\delta} \leq \tilde{\delta}_c e^{-f\pi} \quad (4-45)$$

$$\tilde{\sigma}(\tilde{\delta}) = g(\phi_c) \left[ 2 \left( \frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\delta}^*} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\delta}^*} \right] + a(-f)\tilde{L}_c^2 \quad \text{for } \tilde{\delta}_c e^{-f\pi} \leq \tilde{\delta} \leq \tilde{\delta}^* \quad (4-46)$$

であり, ここに,

$$g(\phi_c) = \frac{1}{(4+f^2)} \{ [f \sin(2\phi_c) - 2 \cos(2\phi_c)] e^{f\phi_c} + 2 \} \quad (4-47)$$

$$a(t) = \frac{1}{(4+t^2)} \left\{ [2 \cos(2\phi_c) - t \sin(2\phi_c)] e^{t\phi_c} + 2e^{t\frac{\pi}{2}} \right\} \quad (4-48)$$

$$\tilde{L}_c = \frac{2L_c}{L_f} \quad (4-49)$$

である.

$2L_c < L_f$  の場合, 破断過程完了前の関係は

$$\tilde{\sigma}(\tilde{\delta}) = g \left[ 2 \left( \frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\delta}^*} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\delta}^*} \right] \quad \text{for } \tilde{\delta} \leq \tilde{\delta}_c e^{-f\pi} \quad (4-50)$$

$$\tilde{\sigma}(\tilde{\delta}) = g(\phi_c) \left[ 2 \left( \frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\delta}^*} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\delta}^*} \right] + a(-f)\tilde{L}_c^2 \quad \text{for } \tilde{\delta}_c e^{-f\pi} \leq \tilde{\delta} \leq \tilde{\delta}_c \quad (4-51)$$

である.

破断過程完了後の関係については,  $L_r < L_f < 2L_c$  の場合,

$$\tilde{\sigma}(\tilde{\delta}) = g(\phi_b)(1 - \tilde{\delta})^2 + b(-f)\tilde{L}_c^2 - 2b(0)\tilde{L}_c\tilde{\delta} + b(f)\tilde{\delta}^2 \quad \text{for } \tilde{\delta}^* \leq \tilde{\delta} \leq \tilde{L}_c e^{-\frac{f\pi}{2}} \quad (4-52)$$

$$\tilde{\sigma}(\tilde{\delta}) = g(\phi_b)(1 - \tilde{\delta})^2 + c(-f)\tilde{L}_c^2 - 2c(0)\tilde{L}_c\tilde{\delta} + c(f)\tilde{\delta}^2 \quad \text{for } \tilde{L}_c e^{-\frac{f\pi}{2}} \leq \tilde{\delta} \leq 1 \quad (4-53)$$

であり, ここに,

$$b(t) = \frac{1}{(4+t^2)} \left\{ [2\cos(2\phi_b) - t\sin(2\phi_b)]e^{t\phi_b} + 2e^{\frac{t\pi}{2}} \right\} \quad (4-54)$$

$$c(t) = \frac{1}{(4+t^2)} \left\{ [t\sin(2\phi_a) - 2\cos(2\phi_a)]e^{t\phi_a} + [2\cos(2\phi_b) - t\sin(2\phi_b)]e^{t\phi_b} \right\} \quad (4-55)$$

$$\phi_a = -\left(\frac{1}{f}\right) \ln\left(\frac{\tilde{\delta}}{\tilde{L}_c}\right) \quad (4-56)$$

である.

$2L_c < L_f$  の場合は,

$$\tilde{\sigma}(\tilde{\delta}) = g_1\tilde{L}_c^2 - 2\tilde{L}_c\tilde{\delta} + g\tilde{\delta}^2 \quad \text{for } \tilde{\delta}_c \leq \tilde{\delta} \leq \tilde{L}_c e^{-\frac{f\pi}{2}} \quad (4-57)$$

$$\tilde{\sigma}(\tilde{\delta}) = d(-f)\tilde{L}_c^2 - 2d(0)\tilde{L}_c\tilde{\delta} + d(f)\tilde{\delta}^2 \quad \text{for } \tilde{L}_c e^{-\frac{f\pi}{2}} \leq \tilde{\delta} \leq \tilde{L}_c \quad (4-58)$$

であり, ここに,

$$d(t) = \frac{1}{(4+t^2)} \left\{ [t\sin(2\phi_a) - 2\cos(2\phi_a)]e^{t\phi_a} + 2 \right\} \quad (4-59)$$

$$g_1 = \frac{2}{(4+f^2)} \left\{ 1 + e^{-\frac{f\pi}{2}} \right\} \quad (4-60)$$

である.

図 4-18 と図 4-19 にそれぞれ破断過程完了前と完了後の架橋応力-開口幅関係を示す. 微視的



材料定数の値は鋼繊維補強セメントを参考にしてている．この場合，最小限界繊維長  $L_r$  は 3mm であり，限界繊維長  $2L_c$  は 10.7mm である．よって，繊維長が 3mm を超える場合には，繊維引抜きに加えて繊維破断が生じる．繊維長が 3mm から 10.7mm の範囲（図 4-17 の(b)）では繊維破断は埋め込み角度の大きな繊維に限られる．繊維長が 10.7mm を超えると，限界埋め込み長  $L_c$  である 5.35mm を超える埋め込み長の繊維は埋め込み角度に関わらず破断を生じる（図 4-17 の(c)）．図 4-18 は，繊維長が大きくなるにつれてピークの最大架橋応力が大きくなるが，破断する繊維が増大しピーク時の開口幅が減少する様子を示している．また，繊維の引抜きのみにより生じる破断過程完了後の関係である図 4-19 では，繊維長 12mm の場合には限界埋め込み長  $L_c$  である 5.35mm において架橋応力が消失していることが分かる．

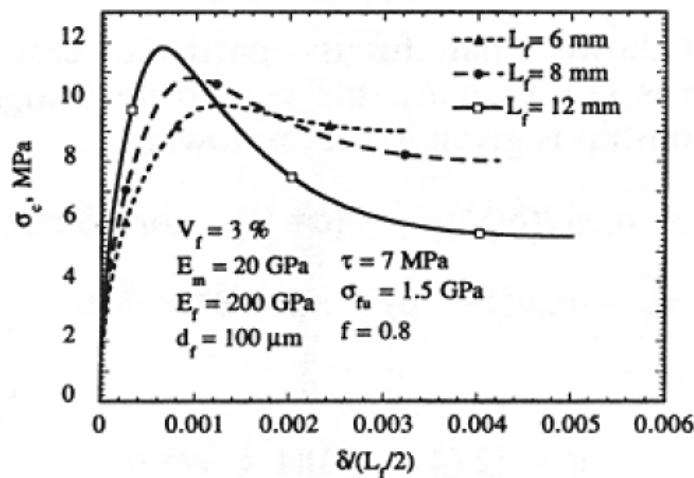


FIG. 4. Prepeak  $\sigma_c$ - $\delta$  Curve for Different Fiber Lengths

図 4-18 破断過程完了前の架橋応力-開口幅関係 <sup>11)</sup>

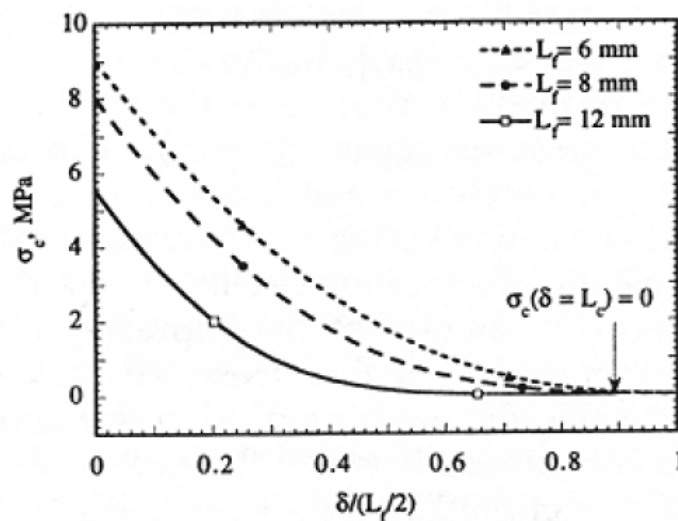


FIG. 5. Postpeak  $\sigma_c$ - $\delta$  Curve for Different Fiber Lengths

図 4-19 破断過程完了後の架橋応力-開口幅関係 <sup>111)</sup>

図 4-20 は、上記の破断過程完了後の架橋則をアラミド繊維補強セメントについての計測結果と比較したものである。ここでは繊維長  $L_f$  が 12.7mm であるのに対して、限界繊維長  $2L_c$  は 4.4mm であるため、図 4-17 の(c)の場合に該当する。架橋応力の消失は約 2mm で生じており、限界埋め込み長  $L_c$  である 2.2mm と一致している。ただし、図中のピーク前の架橋則は実験条件との相違を踏まえて修正している。これは、破断過程完了後に引き抜かれる繊維が破断過程完了前に貢献していた分だけを考慮しており、破断過程完了前に破断する繊維による貢献分は考慮していない。

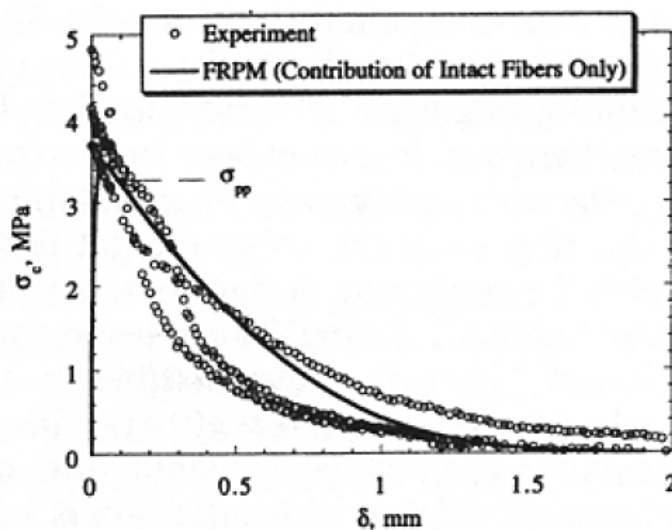


FIG. 11. Comparison between Experimentally Measured and Model Predicted  $\sigma_c$ - $\delta$  Curve when Contribution of Rupturing Fibers Is not Accounted for

図 4-20 アラミド繊維補強セメントの破断過程完了後の架橋則の比較 <sup>111)</sup>

#### 4.4.3 引張強度と破壊エネルギー

複合材料の引張強度が最大架橋応力で決まる場合には破断過程完了前の式(4-45, 46)もしくは式(4-50, 51)の最大値を求めればよいが、この解析解は得られない。文献 111) では数値解を求めて、近似式を示している。

一方で、破壊エネルギーについては FPM と同様に架橋応力-開口幅関係を積分する方法が考えられるが <sup>106)</sup>、これは困難であるため個々の単繊維が引き抜かれるときに消費されるエネルギーを足し合わせる方法 <sup>112)</sup> が文献 111) では示されている。破壊エネルギーは繊維長により以下の式で表される。

$$G_c = \frac{1}{3} G_0 g \tilde{L}_f^2 \quad L_f < L_r \quad (4-61)$$

$$G_c = \frac{1}{3}G_0 [g(\phi_b)\tilde{L}_f^2 + h(\phi_b)\tilde{L}_f^{-1}] \quad L_r \leq L_f < 2L_c \quad (4-62)$$

$$G_c = \frac{1}{3}G_0 g_2 \tilde{L}_f^{-1} \quad 2L_c \leq L_f \quad (4-63)$$

ここに,

$$G_0 = \frac{V_f \tau L_c^2}{d_f} \quad (4-64)$$

$$\tilde{L}_f = \frac{L_f}{2L_c} \quad (4-65)$$

$$h(\phi_b) = \frac{1}{2(1+f^2)} \{ [f \sin(2\phi_b) + \cos(2\phi_b)] e^{-2f\phi_b} + e^{-f\pi} \} \quad (4-66)$$

$$g_2 = \frac{1}{2(1+f^2)} \{ 1 + e^{-f\pi} \} \quad (4-67)$$

である。なお、この破壊エネルギーは破断過程完了後のみを考えているが、破断過程完了前の破壊エネルギーは FPM と同様に非常に小さく無視できる。

さらに、文献 111) では繊維長が複合材料の引張強度と破壊エネルギーに及ぼす影響を検討している。この検討条件では、繊維長  $L_f$  を長くすると限界繊維長  $2L_c$  までは引張強度は急激に増加するが、限界繊維長を超えると増加は緩やかになる。一方で、破壊エネルギーも繊維長に伴い急激に増加するが、限界繊維長以前に最大値を示し、以降は大きく減少する。スナッピング係数  $f = 0.8$  の条件下では、破壊エネルギーについては最大値を示す最適な繊維長が約  $1.4L_c$  であることを示している。また、 $f = 0$  では最適な繊維長が限界繊維長  $2L_c$  であり、 $f$  が 0 から増えるにつれて  $2L_c$  から  $L_r$  に近づくことも示している。

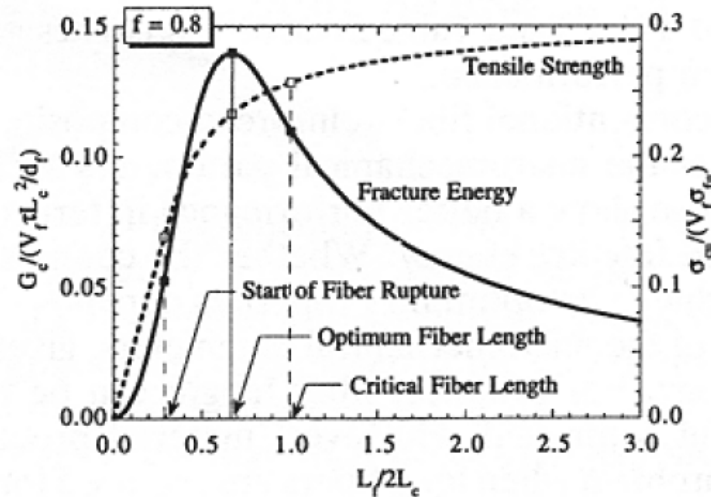


FIG. 13. Effect of Fiber Length on Composite Tensile Strength and Fracture Energy

図 4-21 引張強度と破壊エネルギーにおける繊維長の影響<sup>111)</sup>

## 4.5 すべり依存摩擦付着を考慮した繊維引抜きモデル

繊維引抜きモデル (Fiber Pullout Model, FPM) では、界面の仮定として、④界面付着強度は摩擦によるものが支配的であり一定である、としていた。本節ではこの仮定を改めて検討する。つまり、摩擦付着が一定ではなく繊維-母材間の相対すべり量に応じて変化する場合を考える。繊維-母材間界面は界面遷移領域と呼ばれ比較的空隙の多い場所である。鋼繊維のように繊維が遷移領域より硬い場合には、界面剥離後に繊維がすべるにつれて摩擦抵抗は減少することが考えられる<sup>113) 114)</sup>。一方で合成繊維のように遷移領域より繊維が軟らかい場合には、繊維表面が削られて線維が生じることで摩擦抵抗が増大することも考えられる<sup>114)</sup>。前者をすべり軟化と呼び、後者をすべり硬化と呼ぶが、いずれにおいてもすべり量に依存した摩擦付着強度を考える必要がある。一方で、FPM はすべり量に依存した変化が無視できる場合に摩擦付着強度を一定と仮定していたことになる。以下では、文献<sup>115)</sup>に従い、主にポリエチレン繊維を対象としたすべり硬化摩擦付着を考慮した繊維引抜きモデル (Slip-Hardening Fiber Pullout Model, SHFPM) について説明する。

### 4.5.1 すべり依存摩擦付着

一般に摩擦付着強度とすべり量 (繊維と母材間の相対変位) の関係は

$$\tau(x) = \tau(\Delta(x)) \quad (4-68)$$

となる。 $\Delta(x)$ は剥離領域の繊維と母材の相対変位であり、以下のように定義する (図 4-22)。

$$\Delta(x) = u_f(x) - u_m(x) \quad (4-69)$$

ここに、 $u_f(x)$ は繊維の変位、 $u_m(x)$ は母材の変位である。すべり量は界面上で一様ではなく、荷重側端部において大きく、埋め込み側端部で小さい。摩擦付着強度は繊維軸に沿った位置  $x$  の関数として表される。界面付着強度は剥離時の初期値 $\tau_0$ より増加もしくは減少し得る。これに簡単な線形関係を仮定すると界面付着強度は次式で表される（図4-22）<sup>116)</sup>。

$$\tau(\Delta) = \tau_0 \left( 1 + \beta \frac{\Delta(x)}{d_f} \right) \quad (4-70)$$

ここに $\beta$ は無次元のすべり硬化係数であり、正の値は相対すべり量に応じた摩擦付着強度の増加を与え、負の値は減少を与える。 $\tau_0$ と $\beta$ は実験結果への近似より決定する。厳密には高次項を含む式を考えるべきだが、上記の線形関係式であっても対象とする複合材料の挙動を十分に再現できる。

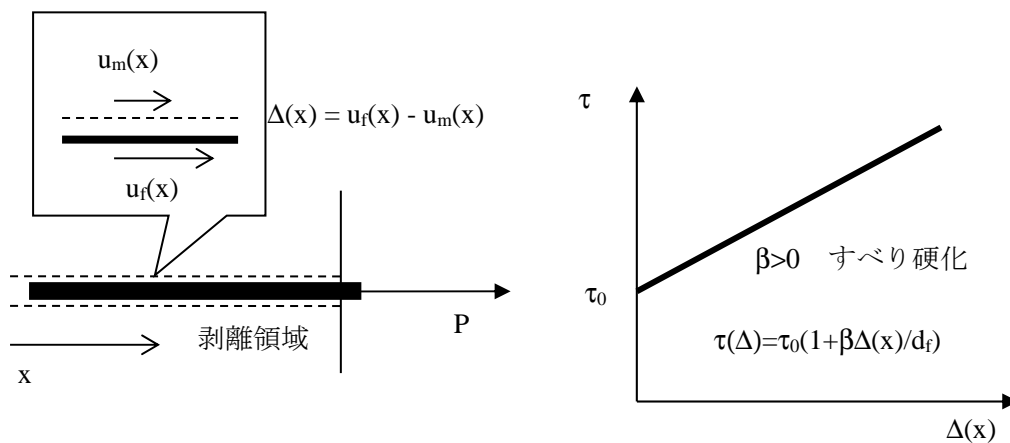


図4-22 線形すべり依存付着強度

FPM と FPRM は摩擦付着のすべり依存が無視できる場合であり、界面付着強度が剥離時の初期値 $\tau_0$ より変化しない複合材料に適用できる。つまり $\beta=0$ の時となる。

#### 4.5.2 単繊維の引抜き荷重－開口幅関係

図4-23に示すような円柱モデルにおいて、母材に埋め込まれている単繊維を引き抜くことを考えて、まずは剥離過程の単繊維の引抜き荷重－開口幅関係を導出する。

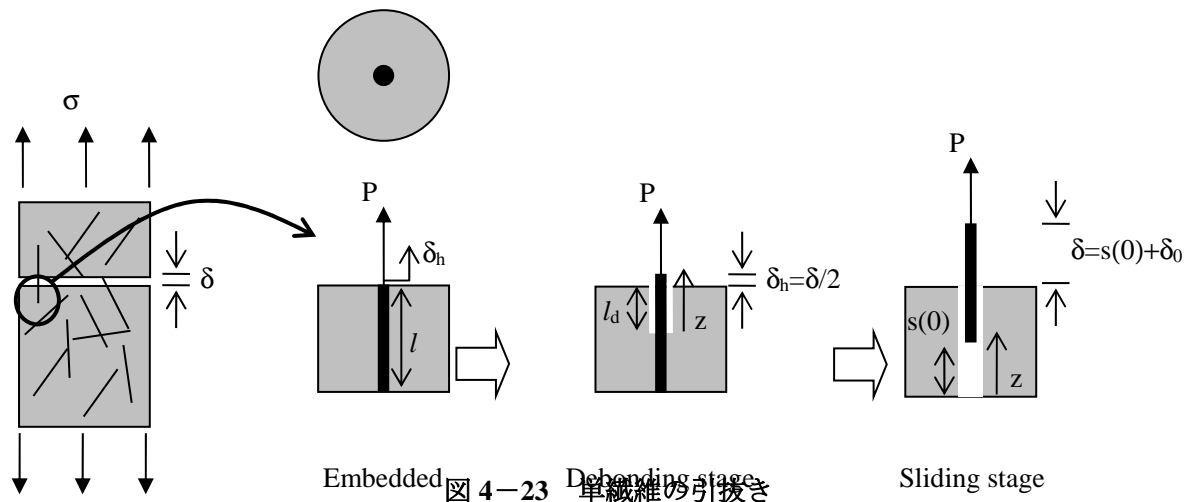


図 4-23 単繊維の引抜き

剥離過程において、界面が剥離を生じていない円柱断面では軸方向の繊維ひずみ $\varepsilon_f$ と母材ひずみ $\varepsilon_m$ は等しい。

$$\varepsilon_f = \varepsilon_m \quad (4-71)$$

ポアソン効果を無視すると

$$\frac{\sigma_f}{E_f} = \frac{\sigma_m}{E_m} \quad (4-72)$$

である。ここに、 $\sigma_f$ は繊維応力、 $\sigma_m$ は母材応力、 $E_f$ は繊維弾性係数、 $E_m$ は母材弾性係数である。  
軸方向の力の釣合いにより母材と繊維の応力はそれぞれ

$$\sigma_m = \frac{\pi d_f l_d \bar{\tau}}{A_m} \quad (4-73)$$

$$\sigma_f = \frac{P - \pi d_f l_d \bar{\tau}}{A_f} \quad (4-74)$$

となる。ここに、 $A_m$ と $A_f$ はそれぞれ繊維と母材の断面積であり、 $l_d$ は剥離領域の長さである。 $\bar{\tau}$ は剥離領域で生じている摩擦付着強度の平均値

$$\bar{\tau} = \frac{1}{l_d} \int_0^{l_d} \tau(z) dz \quad (4-75)$$

であり、 $\tau(z)$ についてはのちほど述べる。式(4-72, 73, 74)より、引抜き荷重  $P$  は

$$P = \pi d_f l_d \bar{\tau}(1 + \eta) \quad (4-76)$$

となり、

$$\eta = \frac{V_f E_f}{V_m E_m} \quad (4-77)$$

である。

剥離領域の繊維と母材の相対変位を以下のように定義する。

$$\Delta(z) = u_f(z) - u_m(z) \quad (4-78)$$

よって、

$$\frac{d\Delta(z)}{dz} = \frac{du_f(z)}{dz} - \frac{du_m(z)}{dz} = \varepsilon_f(z) - \varepsilon_m(z) = \frac{\sigma_f(z)}{E_f} - \frac{\sigma_m(z)}{E_m} \quad (4-79)$$

となる。また、局所的な釣合いを考えると、

$$\frac{d\sigma_f(z)}{dz} = \frac{\pi d_f \tau(\Delta)}{A_f} = \frac{4\tau(\Delta)}{d_f} \quad (4-80)$$

$$\frac{d\sigma_m(z)}{dz} = -\frac{\pi d_f \tau(\Delta)}{A_m} \quad (4-81)$$

である。式(4-79)を微分して、式(4-80, 81)を代入すると、

$$\frac{d^2\Delta}{dz^2} = \frac{4(1+\eta)\tau(\Delta)}{E_f d_f} \quad (4-82)$$

が得られる。 $\tau(\Delta)$ について線形の式(4-70)を代入して整理をすると次の支配方程式を得る。

$$\frac{d^2\Delta}{dz^2} - \frac{\omega^2}{d_f^2}\Delta = \frac{\omega^2}{\beta d_f} \quad (4-83)$$

ここに,

$$\omega = \sqrt{\frac{4(1+\eta)\beta\tau_0}{E_f}} \quad (4-84)$$

である.

$z=0$  で  $\Delta=0$  かつ  $d\Delta/dz=0$  の境界条件の下に解くと,

$$\Delta(z) = \frac{d_f}{\beta} \left[ \cosh\left(\frac{\omega z}{d_f}\right) - 1 \right] \quad (4-85)$$

が得られる.  $\tau(\Delta)$ の式に代入すると得られる摩擦付着強度の分布

$$\tau(z) = \tau_0 \cosh\left(\frac{\omega z}{d_f}\right) \quad (4-86)$$

を用いて  $\bar{\tau}$  を求めると, 引抜き荷重と剥離領域の長さの関係式

$$P = \frac{\pi d_f^2 \tau_0 (1+\eta)}{\omega} \sinh\left(\frac{\omega l_d}{d_f}\right) \quad (4-87)$$

を得る. また, 荷重側端部の変位は

$$\Delta(z=l_d) = \frac{d_f}{\beta} \left[ \cosh\left(\frac{\omega l_d}{d_f}\right) - 1 \right] = \frac{\delta}{2} \quad (4-88)$$

で与えられ, これは剥離過程においては開口幅 $\delta$ の半分の値である. 両式より  $l_d$  を消去すると引抜き荷重-開口幅関係の式が得られる.

$$P = \frac{\pi d_f^2 \tau_0 (1+\eta)}{\omega} \sqrt{\left(1 + \frac{\beta \delta}{2d_f}\right)^2 - 1} \quad \text{for } \delta \leq \delta_0 \text{ (剥離過程)} \quad (4-89)$$

ここに



$$\delta_0 = \frac{2d_f}{\beta} \left[ \cosh \frac{\omega l}{d_f} - 1 \right] \quad (4-90)$$

である。すべり依存がない場合は $\beta=0$ であり、その極限をとると FPM の式と一致することは容易に確かめられる。

次に、すべり過程における引抜き荷重－開口幅関係の式を求める。繊維の弾性伸び変形を無視すると、繊維と母材の相対変位は次式で近似できる。

$$\Delta(z) = \frac{d_f}{\beta} \left[ \cosh \left( \frac{\omega z}{d_f} \right) - 1 \right] + (\delta - \delta_0) \quad (4-91)$$

第1項は剥離完了時の相対変位分布であり、第2項は繊維全体のすべり出し量を表している。剥離過程と同様に $\tau(\Delta)$ の式に代入して $\tau(z)$ を得ると、引抜き荷重は

$$P = \pi d_f (1 + \eta) \int_{\delta - \delta_0}^l \tau(z) dz \quad (4-92)$$

で求まり、

$$P = \frac{\pi d_f^2 \tau_0 (1 + \eta)}{\omega} \left[ \sinh \frac{\omega l}{d_f} - \sinh \left( \frac{\omega(\delta - \delta_0)}{d_f} \right) \right] + \pi \tau_0 \beta (1 + \eta) (\delta - \delta_0) (l - (\delta - \delta_0))$$

for  $\delta_0 < \delta \leq l$  (すべり過程) (4-93)

を得る。

単繊維の引抜き荷重－開口幅関係の妥当性を実験結果との比較で確認する。図4-24はポリエチレン繊維によるセメント系複合材料の単繊維引抜き試験の結果である。摩擦付着強度一定の場合とすべり硬化の場合の関係式も合わせて示している。引抜き荷重 0.7N 程度までの剥離過程を経た後、繊維のすべり過程は摩擦付着のすべり硬化に大きく影響を受けており、摩擦付着強度一定の関係式と大きく乖離している。一方で、すべり硬化を考慮した関係式は引抜き荷重が 0.7N を超えた後の挙動を概ね再現しており、この材料における摩擦付着強度の初期値 $\tau_0$ は 0.47MPa、すべり硬化係数 $\beta$ は 0.0125 とされている。なお、ここでは簡単のため $\eta=0$ としている。

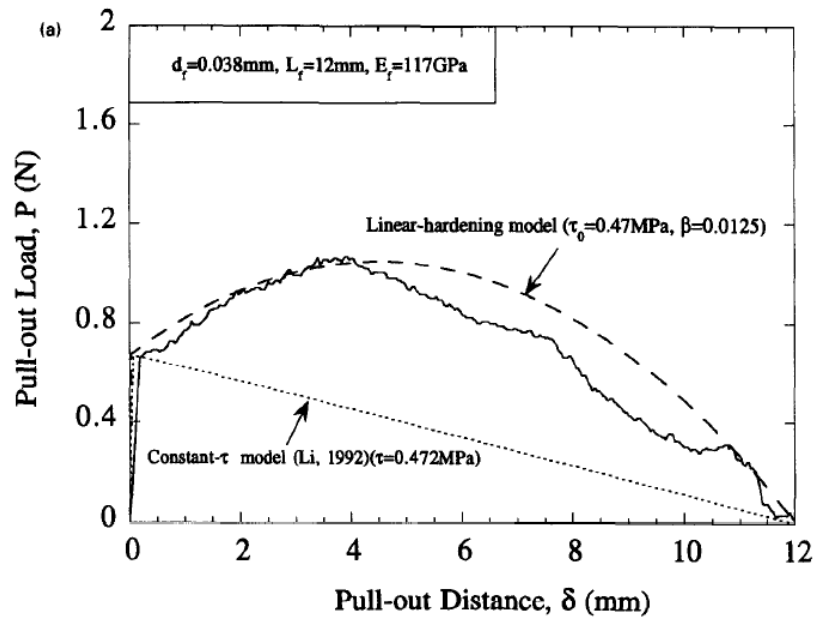


図 4-24 ポリエチレン繊維の引抜き実験との比較

### 4.5.3 ひび割れ架橋応力-開口幅関係（架橋則）

ひび割れ架橋応力-開口幅関係（架橋則）の導出は FPM とほぼ同様である．個々の繊維が剥離過程とすべり過程のいずれにあるかを区分して，伝達力を足し合わせることで架橋応力を算出することができる．また，埋め込み角度による引抜き荷重へのスナッピング効果の取り扱いも同様である．

剥離過程完了前の関係は，

$$\tilde{\sigma}(\tilde{\delta}) = \frac{2g(1+\eta)}{k} \left\{ \left[ 1 - \frac{1}{k} \cosh^{-1} \left( 1 + \lambda \frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\delta}^*} \right) \right] \sqrt{\left( 1 + \lambda \frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\delta}^*} \right)^2 - 1} + \frac{\lambda}{k} \frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\delta}^*} \right\} \quad \text{for } \tilde{\delta} \leq \tilde{\delta}^* \quad (4-94)$$

で与えられ，ここに，

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_0}, \sigma_0 = \frac{V_f \tau_0 \left( \frac{L_f}{d_f} \right)}{2}, k = \frac{\omega L_f}{2d_f}, \lambda = \cosh k - 1 \quad (4-95)$$

$$\tilde{\delta} = \frac{\delta}{\left(\frac{L_f}{2}\right)}, \tilde{\delta}^* = \frac{\frac{2d_f}{\beta} [\cosh k - 1]}{\left(\frac{L_f}{2}\right)}, g = \frac{2}{4+f^2} \left(1 + e^{\frac{f}{2}}\right) \quad (4-96)$$

である。剥離過程完了後の関係は

$$\tilde{\sigma}(\tilde{\delta}) = g(1+\eta) \left(1 + \frac{\beta L_f}{2d_f} \tilde{\delta}\right) (1 - \tilde{\delta})^2 \quad \text{for } \tilde{\delta}^* < \tilde{\delta} \leq 1 \quad (4-97)$$

で与えられる。

図 4-25 に剥離過程完了前の架橋則を  $k$  の影響とともに示す。  $k=0$  が摩擦付着強度一定の場合になる。一般的な合成繊維の場合に  $k$  の値は  $10^{-1}$  に満たない ( $\tau_0/E_f \sim 10^{-4}$ ,  $\beta \sim 10^{-2}$ ,  $\omega \sim 10^{-3}$ ,  $L_f/d_f \sim 10^2$ )。よって、すべり硬化の影響は剥離過程完了前の架橋則において無視できる。これは剥離過程における相対変位が小さいことによる。一方で、すべり硬化は剥離過程完了後の架橋則に大きく影響する。図 4-26 は剥離過程完了後の架橋則を  $\beta L_f/(2d_f)$  の影響とともに示している。  $\beta L_f/(2d_f)$  の値は  $10^{-1} \sim 10^0$  の範囲であり、すべり硬化の度合いによっては剥離過程完了後においても架橋応力の上昇が得られる。これは引張強度、終局ひずみ、終局ひび割れ開口幅、破壊エネルギーに大きく影響する。

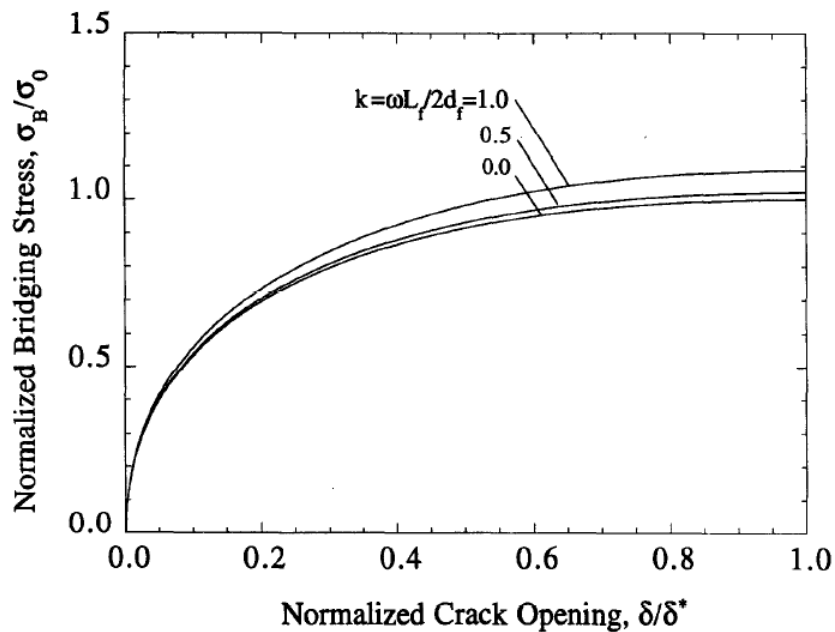


図 4-25 剥離過程完了前の架橋則とすべり硬化の影響

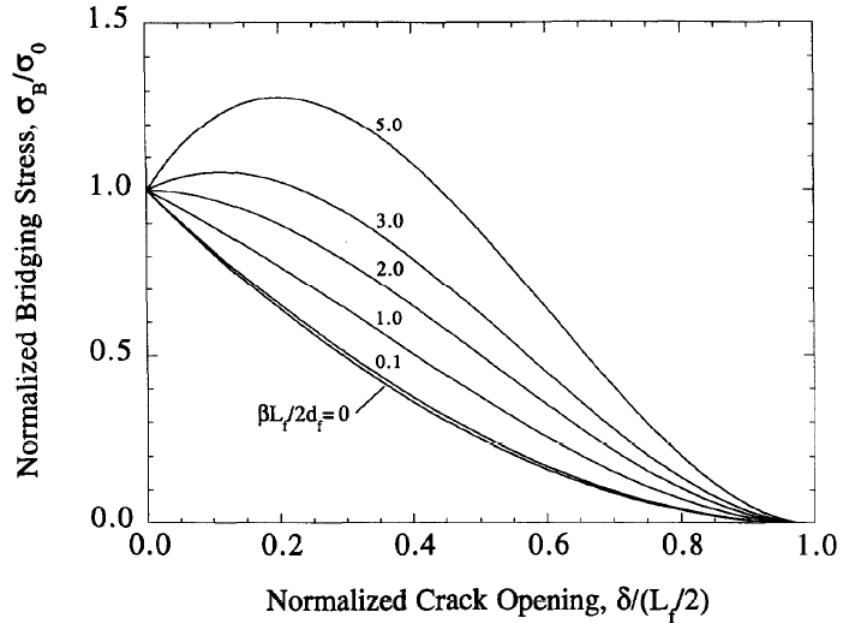


図 4-26 剥離過程完了後の架橋則とすべり硬化の影響

#### 4.5.4 引張強度と破壊エネルギー

引張強度は架橋応力の最大値を求めることで得られる。すべり硬化の影響が大きい場合には剥離過程完了後に架橋応力の最大値があり、すべり硬化の影響が小さい場合には剥離過程完了の点が最大値となる。

前者の場合には、式(4-97)について  $d\tilde{\sigma}/d\tilde{\delta} = 0$  であることにより、

$$\tilde{\delta}_1 = \frac{c-2}{3c} \quad (4-98)$$

の時に最大架橋応力となる。ここに、 $c = \beta L_f / (2d_f)$  である。さらに、 $\tilde{\delta}^* < \tilde{\delta}_1$  であることから、

$$c = \frac{\beta L_f}{2d_f} > \frac{2}{1-3\tilde{\delta}^*} \approx 2 \quad (4-99)$$

を満たすときに架橋応力の上昇が得られ（一般的に  $\tilde{\delta}^* \ll 1$ ），これは図 4-26 においても確認できる。

よって、最大架橋応力は

$$\sigma = g(1+\eta) \frac{2\lambda}{k^2} \sigma_0 \quad \text{at } \tilde{\delta}^* \text{ for } \frac{\beta L_f}{2d_f} < 2 \quad (4-100)$$

もしくは

$$\sigma = g(1+\eta) \left( 1 + \frac{\beta L_f}{2d_f} \tilde{\delta}_1 \right) (1 - \tilde{\delta}_1)^2 \sigma_0 \quad \text{at } \tilde{\delta}_1 \text{ for } 2 < \frac{\beta L_f}{2d_f} \quad (4-101)$$

となる。

破壊エネルギーは FPM と同様に得られる。剥離過程完了前の架橋による破壊エネルギーは完了後よりも小さいため、完了後だけを考慮すればよい。よって、破壊エネルギーは

$$G_c = \frac{1}{12} g \tau_0 V_f (1+\eta) d_f \left( \frac{L_f}{d_f} \right)^2 \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\beta L_f}{2d_f} \right) \right] \quad (4-102)$$

で与えられる。式中の第 1 項は $\eta$ の効果を考えている点を除いて FPM の破壊エネルギーと等しい。第 2 項がすべり硬化による寄与分であり、 $\beta L_f/(2d_f)$ が  $10^{-1} \sim 10^0$  の範囲の値をとりうるため無視できない大きさとなる。

ポリエチレン繊維 ECC の実験結果との比較によりモデルの妥当性を検討する。ポリエチレン繊維 ECC の繊維と界面の材料定数は表 4-3 に示す通りである。他に、スナッピング倍数  $g=2$  (スナッピング係数  $f=0.85$ )、母材の弾性係数  $E_m=25(\text{GPa})$ である。この複合材料に用いられたポリエチレン繊維は十分な強度を有しており、繊維は破断せずに全て引き抜かれる。プラズマ処理は繊維表面の改質を行うことで界面付着性状を改善するものである。単繊維引抜き試験により決定されたすべり硬化係数 $\beta$ と初期摩擦付着強度 $\tau_0$ にプラズマ処理の効果が見られ、特に初期摩擦付着強度の増加が顕著である。 $\beta L_f/(2d_f)$ は処理によらず 2 を超えており、すべり硬化の影響を考慮する必要があることを示している。

表 4-3 ポリエチレン繊維 ECC の繊維と界面の材料定数

	$L_f$ (mm)	$d_f$ (mm)	$E_f$ (GPa)	$f$	$\beta$	$\tau_0$ (MPa)	$\beta L_f/(2d_f)$
プラズマ処理なし	12.7	38	117	0.85	0.0125	0.48	2.09
プラズマ処理あり	12.7	38	117	0.85	0.0128	0.8	2.14

以上の材料定数を用いてモデルによる引張強度と引張強度時開口幅を実験結果と比較する。摩擦付着強度一定の FPM とすべり硬化摩擦付着の SHFPM において、引張強度はすべり硬化の考慮に依らず実験値との差は少ない。一方で、引張強度時開口幅は FPM が大きく過小評価するのに対して、SHFPM は実験値により近い値を示しており、すべり硬化摩擦付着を考慮した繊維引抜きモデルの妥当性を支持している (表 4-4)。

表 4-4 実験結果との比較

	プラズマ処理なし		プラズマ処理あり	
	$\sigma_{cu}$ (MPa)	$\delta_{cu}$ ( $\mu\text{m}$ )	$\sigma_{cu}$ (MPa)	$\delta_{cu}$ ( $\mu\text{m}$ )

FPM	3.2	16	5.4	27
SHFPM	3.5	90	5.9	137
実験	3.1	60	5.7	123

## 4.6 繊維引抜き破断モデルにおける界面付着と繊維強度の検討

本節では繊維引抜き破断モデル（Fiber Pullout Rupture Model, FPRM）における界面付着と繊維強度についてより詳細に考慮したモデルの検討を紹介する。

まず界面付着について、FPRM では、繊維引抜きモデル（Fiber Pullout Model, FPM）と同様に界面の仮定として、④界面付着強度は摩擦によるものが支配的であり値は一定である、としていた。本節では、この仮定を2つの意味で改める。

第一に、摩擦付着に加えて化学付着を考慮する。摩擦付着とは繊維－母材間での摩擦抵抗のことであり界面は既に剥離している状態である。一方で化学付着とは界面剥離前の繊維－母材間結合による抵抗のことである。一般的に繊維－母材間界面では、化学付着から剥離により摩擦付着へ移行するが、FPM では化学付着が小さく摩擦付着が支配的である場合を考えていたことになる。

第二に、摩擦付着が一定ではなく繊維－母材間の相対すべり量に応じて変化する場合を考える。前節では、すべり量に依存した摩擦付着強度の変化を FPM において考慮したが、FPRM においてもこの変化を考慮する。

次に繊維強度について、FPRM では標準的な試験（例えば ASTM D 2101-94）により得られた一定値の繊維強度を用いて繊維破断を考慮していた。しかしながら、セメント系母材に埋め込まれた状態での繊維強度は標準的な試験値よりも小さく、さらに埋め込み角度によって見かけ上減少することが確認されている。埋め込み角度により引抜き荷重が増加する効果はスナッピング係数を用いてモデルに反映されているが、これに加え母材中での繊維強度の低減を同様に考慮してモデルに組み込むことを行う。

本節では、界面における化学付着とすべり依存摩擦付着、および繊維強度の低減を考慮した繊維引抜き破断モデルについて説明する。このモデルは主にポリビニルアルコール（Polyvinyl Alcohol, PVA）繊維を用いた ECC の研究において発表されている<sup>122) 123) 124)</sup>。

### 4.6.1 界面付着

単繊維の引抜き荷重－開口幅関係を導出する前に、繊維と界面に生じる応力について触れて、化学付着とすべり依存摩擦付着を踏まえた繊維引抜き挙動を概観する。

#### 繊維と母材の間で伝達される荷重

繊維と母材は、繊維－母材間界面が剥離する前には一体であり、載荷による引張荷重は両者の間の界面を介して伝達される。図 4-27 に、繊維－母材間伝達の3つの場合を示す。

(a)は母材中で破断した連続繊維もしくは短繊維の端部の場合である。一様な引張分布荷重により載荷されており、図中右側より繊維に分担された荷重は、最終的に左側の母材に伝達される。母材のせん断変形は繊維端部周辺において大きくなる。離れるにつれてひずみは断面内で一様に近づく。(b)は母材に生じたひび割れを架橋する連続繊維の場合である。ひび割れでは繊維が引張荷重

を伝達し、ひび割れから離れるにつれて繊維から母材に荷重が伝達される。母材のせん断変形はひび割れ近くで大きく、離れるにつれて繊維と母材のひずみは近づいていく。(c)は母材のひび割れを架橋する短繊維の場合であり、繊維から母材への荷重伝達に伴い、母材はひび割れ側と繊維端部側の両方で大きなせん断変形が生じる。以上3つのいずれの場合においても、界面に生じるせん断応力が化学付着による繊維-母材間結合の強度に達すると、剥離が生じる。(c)の場合には、ひび割れ側か繊維端部側のいずれかから剥離が生じる可能性がある。以下に(a)と(c)の場合の繊維軸応力と界面せん断応力を導出する。

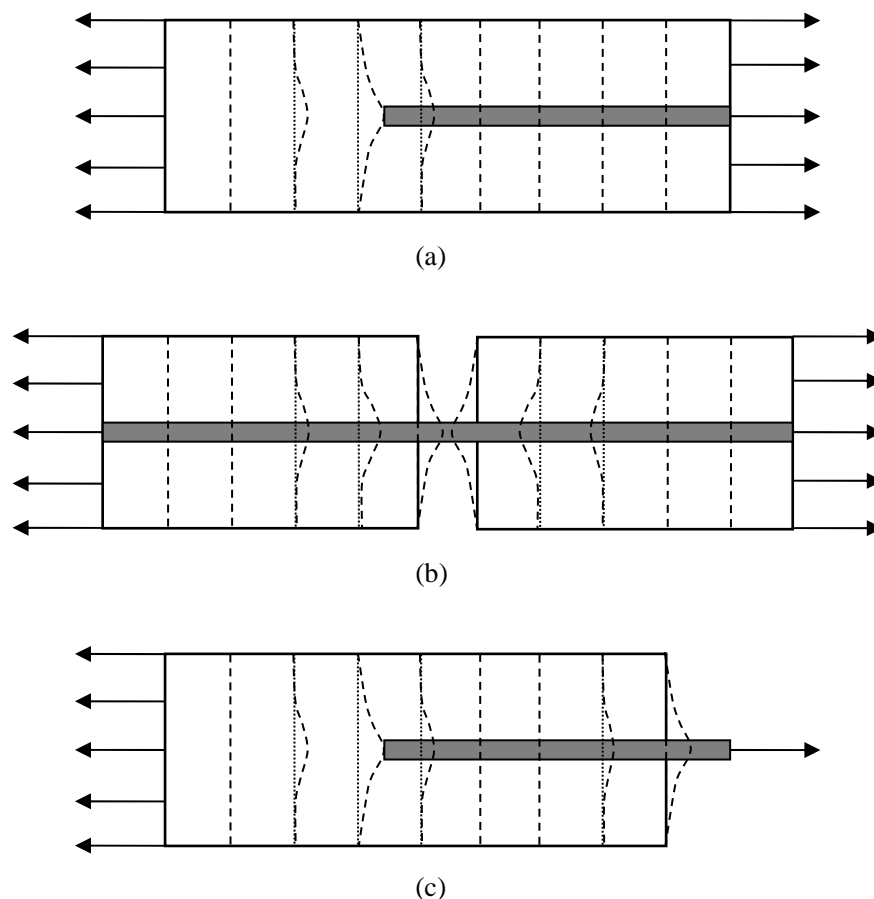


図 4-27 繊維と母材間の荷重伝達 (a)繊維端側, (b)ひび割れ側, (c)両側

#### 母材中に埋め込まれた繊維と界面に生じる応力

Cox は、引張荷重下において母材から埋め込まれた繊維に伝達される荷重について検討を行い、繊維軸応力と界面せん断応力を導出している<sup>117)</sup>。Cox の手法はシェアラグモデルと呼ばれる。

図 4-28 のように、複数の繊維が平行に整列して母材に埋め込まれている状況において、ある繊維とその周辺の円筒形の母材を切り出した単純なモデルを考える。モデルの繊維の長さは  $l$ 、半径は  $r_0$  とし、母材は十分に長いものとする。図 4-28 において、隣接する繊維間の平均距離を  $2R$ 、モデルの総断面積に占める繊維断面の割合を  $V_f$  とすると、

$$V_f \pi R^2 = \pi r_0^2 \quad (4-103)$$

の関係があり,

$$R = \frac{r_0}{\sqrt{V_f}} \quad (4-104)$$

である。モデルは一様なひずみ  $e$  の負荷を受けているが、埋め込まれた繊維への荷重伝達により、繊維周辺ではひずみと応力の変化が生じる。

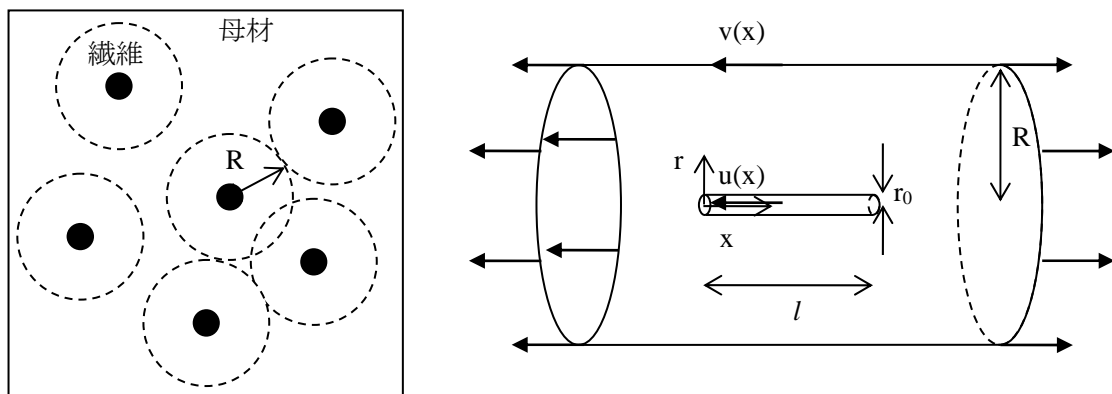


図 4-28 母材に埋め込まれた繊維

繊維軸力  $P(x)$  について次式を仮定する。

$$\frac{dP(x)}{dx} = H(u - v) \quad (4-105)$$

ここに、 $u(x)$  は繊維の軸方向変位、 $v(x)$  は繊維が存在しないとしたときの母材の軸方向変位、 $H$  は定数である。

繊維の軸方向の力と変位の関係は、

$$P(x) = E_f A_f \frac{du}{dx} \quad (4-106)$$

であり、 $E_f$  は繊維剛性、 $A_f$  は繊維断面積である。また、ひずみは  $dv/dx = e = \text{constant}$  である。これら



を代入すると,

$$\frac{d^2 P(x)}{dx^2} = H \left( \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} \right) = H \left( \frac{P}{E_f A_f} - e \right) \quad (4-107)$$

を得る. これを解くと

$$P(x) = E_f A_f e + R \sinh(\beta x) + S \cosh(\beta x) \quad (4-108)$$

が得られる.  $R$  と  $S$  は積分定数である.

繊維端部での境界条件を,  $x=0$  と  $x=l$  で  $P=0$  と仮定すると, 繊維軸応力が次式のように得られる.

$$\sigma(x) = E_f e \left[ 1 - \frac{\cosh(\beta(l/2 - x))}{\cosh(\beta l/2)} \right] \quad (4-109)$$

ここに  $\beta = \sqrt{H/E_f A_f}$  である.

繊維の平均軸応力は

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{l/2} \int_0^{l/2} \sigma(x) dx = E_f e \left[ 1 - \frac{\tanh(\beta l/2)}{(\beta l/2)} \right] \quad (4-110)$$

なので, 繊維の有効剛性は

$$\bar{E}_f = \frac{\bar{\sigma}}{e} = E_f \left[ 1 - \frac{\tanh(\beta l/2)}{(\beta l/2)} \right] \quad (4-111)$$

となる. これより複合材料の剛性は

$$E_c = \bar{E}_f V_f + E_m V_m = E_f V_f \left[ 1 - \frac{\tanh(\beta l/2)}{(\beta l/2)} \right] + E_m V_m = \eta E_f V_f + E_m V_m \quad (4-112)$$

となる. ここに,  $V_f$  はモデルの断面積において繊維断面が占める割合であり,  $V_m = 1 - V_f$  である. また,  $E_m$  は母材の剛性である. 第1項は  $E_f V_f$  に低減係数  $\eta$  を乗じた形となっている.

H は図 4-28 の境界条件下で以下のように求められる。  $\tau(r)$  を x 軸より r 離れた所での r-x 面内のせん断応力とすると

$$\frac{dP(x)}{dx} = -2\pi r_0 \tau(r_0) \quad (4-113)$$

となるため、

$$H = \frac{-2\pi r_0 \tau(r_0)}{u - v} \quad (4-114)$$

となる。

繊維周辺の母材で実際に生じる軸方向変位を  $w(x)$  とする。繊維-母材間界面において相対すべりが無いものとする。  $r_0$  において  $w=u$  である。一方、  $R$  において、  $w=v$  である。  $r_0$  と  $R$  の間の母材のつり合いより

$$2\pi r \tau(r) = 2\pi r_0 \tau(r_0) \quad (4-115)$$

$$\tau(r) = \frac{r_0}{r} \tau(r_0) \quad (4-116)$$

であるため、母材のせん断ひずみは

$$\frac{dw}{dr} = \frac{\tau(r)}{G_m} = \frac{\tau(r_0)r_0}{G_m r} \quad (4-117)$$

となる。ここに  $G_m$  は母材のせん断剛性である。このせん断ひずみを  $r_0$  から  $R$  まで積分すると  $v-u$  に等しい。

$$\Delta w = \int_{r_0}^R \frac{dw}{dr} dr = \frac{\tau(r_0)r_0}{G_m} \ln\left(\frac{R}{r_0}\right) = v - u \quad (4-118)$$

これを式(4-114)に代入すると、

$$H = \frac{2\pi G_m}{\ln(R/r_0)} \quad (4-119)$$

となり，ここに

$$\beta = \sqrt{\frac{G_m}{E_f} \frac{2\pi}{A_f \ln(R/r_0)}} \quad (4-120)$$

となる． $G_m/E_f$ の値が大きくなるにつれて，繊維端からの繊維応力上昇が速やかになる．式(4-109)と(4-113)より，せん断応力が以下のように求まる．

$$\tau(r_0) = \frac{-1}{2\pi r_0} \frac{dP}{dx} = \frac{-r_0}{2} \frac{d(P/\pi r_0^2)}{dx} = \frac{-r_0}{2} \frac{d\sigma}{dx} \quad (4-121)$$

$$\tau(r_0) = E_f e \sqrt{\frac{G_m}{2E_f \ln(R/r_0)} \frac{\sinh(\beta(l/2 - x))}{\cosh(\beta l/2)}} \quad (4-122)$$

図 4-29 に繊維軸応力式(4-109)と界面でのせん断応力式(4-122)の分布を示す．繊維軸応力は両端でゼロであり，中央で最大値となる．この最大値は，繊維長を長くすると  $E_f e$  の極限值に近づく．界面でのせん断応力は両端で最大値となり，中央でゼロとなる．このため，界面の破壊は繊維の両端から起こるものと考えられる．

上述したモデルは単純なものであり厳密ではない．特に，母材は引張を負担せず，せん断のみを負担することになっている．にもかかわらず，他のモデルと比較しても良い近似解を与える<sup>118)</sup>．

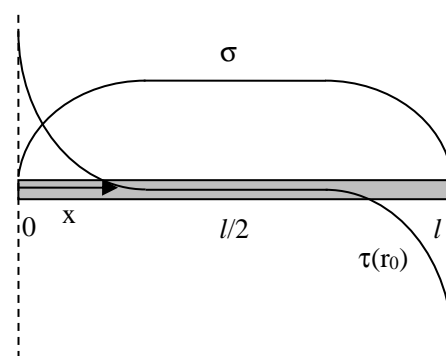


図 4-29 繊維軸応力と界面でのせん断応力の分布概要

#### 引抜きを受ける繊維と界面に生じる応力

Leung and Li は，引抜きを受ける繊維から母材に伝達される荷重について検討を行い，繊維軸応力と界面せん断応力を導出している<sup>119) 120)</sup>．

図4-28と同様の状況を考え、複数の短繊維が平行に整列して母材に埋め込まれている状況において、ある短繊維とその周辺の円筒形の母材を切り出したモデルを考える。このモデルにおいて、Leung and Li は等価な円筒半径  $R^*$  を用いている。  $R^*$  は、円筒外環 ( $r=R^*$ ) において軸方向荷重を受け持ち、円筒内部 ( $r_0 < r < R^*$ ) においてはせん断変形のみが生じると仮定した上で、  $r_0 \sim R^*$  間と実際の  $r_0 \sim R$  間のせん断ひずみエネルギーが等しくなるようにすることで、次式のように求められている<sup>12)</sup>。

$$\log\left(\frac{R^*}{r_0}\right) = -\frac{2\log V_f + V_m(3 - V_f)}{4V_m^2} \quad (4-123)$$

ここでは、短繊維の母材からの引抜きを考えるため、図4-30のようにひび割れ面側より短繊維に引抜き荷重を加える。引抜き荷重は界面を介して母材へと伝達される。母材では仮定よりせん断応力  $\tau_{rz}(r)$  のみが生じている。短繊維の埋め込み長さは  $L$  とする。

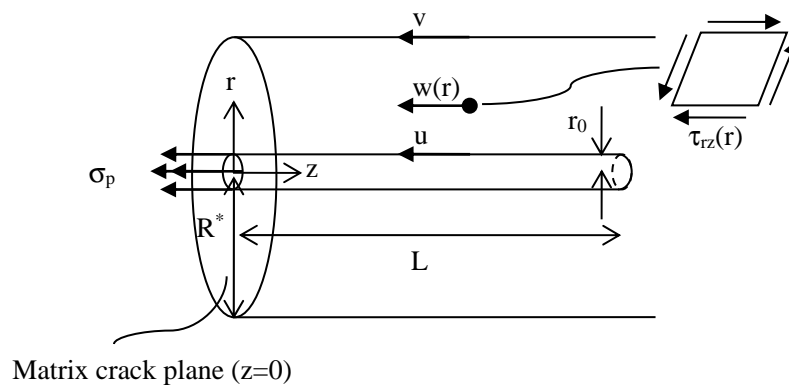


図4-30 引抜きを受ける短繊維

母材における軸方向のつり合い式は、円筒形座標のつり合い式より

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \quad (4-124)$$

となる。また、せん断応力と変位  $w$  との関係は、母材のせん断剛性  $G_m$  を用いて

$$\tau_{rz} = G_m \frac{\partial w}{\partial r} \quad (4-125)$$

であるため、つり合い式は

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad (4-126)$$

となる。この方程式の一般解

$$w = A \log(r) + B \quad (4-127)$$

に、境界条件である  $w(r=r_0)=u$ ,  $w(r=R^*)=v$  を用いると、繊維-母材界面でのせん断応力は

$$\tau_0 = \tau_{rz}(r=r_0) = \frac{G_m (v-u)}{r_0 \log(R^*/r_0)} \quad (4-128)$$

と得られる。

一方で、繊維の軸方向のつり合い式は次式で表される。

$$\frac{\partial \sigma_f}{\partial z} + \frac{2\tau_0}{r_0} = 0 \quad (4-129)$$

これを1回微分して、

$$\frac{\partial^2 \sigma_f}{\partial z^2} + \frac{2}{r_0} \frac{\partial \tau_0}{\partial z} = 0 \quad (4-130)$$

式(4-128)を代入し、

$$\frac{\partial^2 \sigma_f}{\partial z^2} + \frac{2}{r_0^2} \frac{G_m}{\log(R^*/r_0)} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0 \quad (4-131)$$

となる。ここで  $\partial v / \partial z = \sigma_m / E_m$ ,  $\partial u / \partial z = \sigma_f / E_f$  であるので、

$$\frac{\partial^2 \sigma_f}{\partial z^2} + \frac{2}{r_0^2} \frac{G_m}{\log(R^*/r_0)} \left( \frac{\sigma_m}{E_m} - \frac{\sigma_f}{E_f} \right) = 0 \quad (4-132)$$

を得る。

全体のつり合いより

$$V_f \sigma_f + V_m \sigma_m = \sigma_0 = V_f \sigma_p \quad (4-133)$$

$$\frac{\sigma_m}{E_m} = \frac{1}{E_m V_m} (V_f \sigma_p - V_f \sigma_f) \quad (4-134)$$

となり，整理すると $\sigma_f$ の支配方程式として

$$\frac{\partial^2 \sigma_f}{\partial z^2} - \left( \frac{\rho}{r_0} \right)^2 \sigma_f = - \left( \frac{\rho}{r_0} \right)^2 \alpha \sigma_p \quad (4-135)$$

が得られる．ここで

$$\rho^2 = \frac{2G_m E_c}{V_m E_m E_f \log(R^*/r_0)} \quad (4-136)$$

$$\alpha = \frac{V_f E_f}{E_c} \quad (4-137)$$

$$E_c = V_m E_m + V_f E_f \quad (4-138)$$

である．

$\sigma_f$ が求まると式(4-129)により，以下のように $\tau_0$ を得ることができる

$$\tau_0 = - \frac{r_0}{2} \frac{\partial \sigma_f}{\partial z} \quad (4-139)$$

以上により， $\sigma_f$ と $\tau_0$ は以下の式として導出される．

$$\sigma_f = \alpha \sigma_p - A \sinh\left(\frac{\rho z}{r_0}\right) + B \cosh\left(\frac{\rho z}{r_0}\right) \quad (4-140)$$

$$\tau_0 = \left(\frac{\rho}{2}\right) A \cosh\left(\frac{\rho z}{r_0}\right) - \left(\frac{\rho}{2}\right) B \sinh\left(\frac{\rho z}{r_0}\right) \quad (4-141)$$

界面剥離前の弾性結合段階では、境界条件が  $z=0$  で  $\sigma_f = \sigma_p$ ,  $z=L$  で  $\sigma_f = 0$  であるので、係数は以下のようなになる。

$$A = \sigma_p \left[ (1-\alpha) \cosh\left(\frac{\rho L}{r_0}\right) + \alpha \right] / \sinh\left(\frac{\rho L}{r_0}\right) \quad (4-142)$$

$$B = \sigma_p (1-\alpha) \quad (4-143)$$

図 4-31 は界面でのせん断応力分布を示している。せん断応力は荷端もしくは埋め込み端で大きくなる。よって、繊維の両端では、せん断応力がせん断強度に達することで、界面剥離をする可能性が考えられる。 $\tau_0(z=0) > \tau_0(z=L)$  の場合、 $\alpha < 0.5$  であり、剥離は荷端から生じる。一方、 $\tau_0(z=0) < \tau_0(z=L)$  の場合、 $\alpha > 0.5$  であり、剥離は埋め込み端から生じる。後者は  $\alpha$  の定義より明らかなおとおり、剛性の高い繊維の混入率が高い場合である。セメント系母材に数%の繊維を混入した場合は前者であり、荷端から界面剥離が生じることになる。文献 119) と 120) では、片側剥離発生後、さらには両側剥離発生後の応力分布についても述べられている。

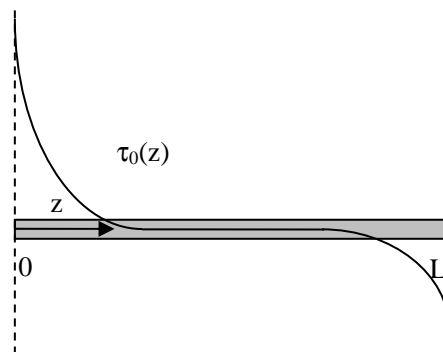


図 4-31 界面でのせん断応力の分布概要

#### 剥離過程

界面剥離が生じるのは端部でのせん断応力が強度に達した時であり、この強度を化学付着強度  $\tau_c$  と呼ぶ。剥離は荷端側より発生し、埋め込み側端部に向かって進行する。この過程を剥離過程と呼び、FPM を始めとしたモデルで前提としてきた。

剥離が生じた領域では、引抜き荷重は摩擦により繊維より母材に伝達される。摩擦抵抗はクーロンの摩擦側に従い、界面の摩擦係数と界面に垂直な力により説明されるが、ここでは単純に摩擦付着強度により考慮する。なお、界面に垂直な力はセメント系母材の収縮応力の残留によると考えら

れている 125) .

摩擦抵抗を表す摩擦付着強度 $\tau_i$ は、前節で説明したように、初期値 $\tau_{i0}$ からすべり軟化もしくは硬化を示す。しかしながら、前節で見たようにすべり硬化の影響は剥離過程完了前には大きくないため、ここでは剥離領域内で一定であると単純化する。すべり硬化は次のすべり過程でのみ考慮する。一方で、未剥離の領域では化学付着により荷重が伝達される。よって、全体としては引抜き荷重に対して化学付着と摩擦付着の合計で抵抗している状態である。

一般的に繊維－母材間界面では、化学付着から剥離により摩擦付着へ移行するが、実際には化学付着もしくは摩擦付着が支配的な場合がある（図 4-32）。FPM と FPRM は摩擦付着のみを考慮したモデルであり、疎水性繊維において化学付着強度が小さい場合に適用される。本節のモデルは親水性繊維において化学付着強度が大きい場合に適用される。

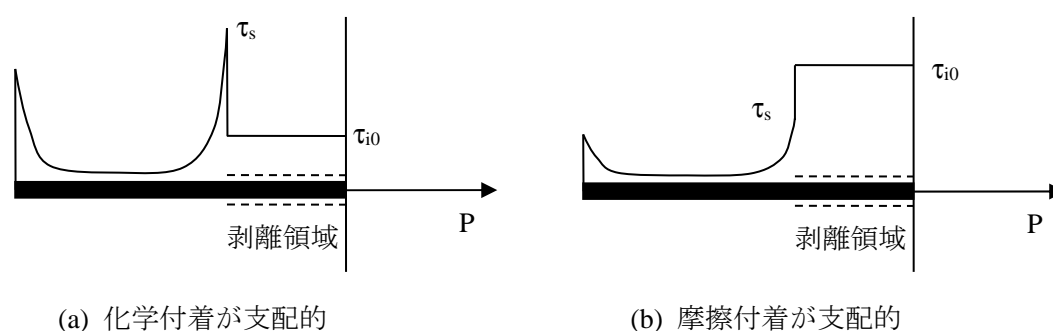


図 4-32 化学付着と摩擦付着

剥離は荷重が増大するにつれ埋め込み側端部に向かって進行し、最終的には全面が剥離領域となり剥離過程が完了する。繊維全体が引抜き荷重により母材よりすべり出し始め、界面全面の摩擦により荷重に抵抗する。これ以降、繊維が完全に抜け出すまでをすべり過程と呼ぶ。

#### すべり過程

繊維全体のすべり出しによる母材と繊維の相対変位量は剥離によるものより大きいため、すべりによる界面遷移領域での変化が無視できなくなる。すべり硬化の場合、界面付着強度は剥離時の初期値 $\tau_{i0}$ より増加する。相対変位は界面上で一様ではなく位置  $x$  の関数となるため、すべり硬化により増加した界面付着強度も位置により異なる。

FPM と FPRM は摩擦付着のすべり依存が無視できる場合であり、界面付着強度が剥離時の初期値 $\tau_{i0}$ より変化しない複合材料に適用できる。

### 4.6.2 単繊維の引抜き荷重－開口幅関係

化学的付着とすべり依存摩擦付着を考慮した単繊維の引抜き荷重－開口幅関係を導出する。



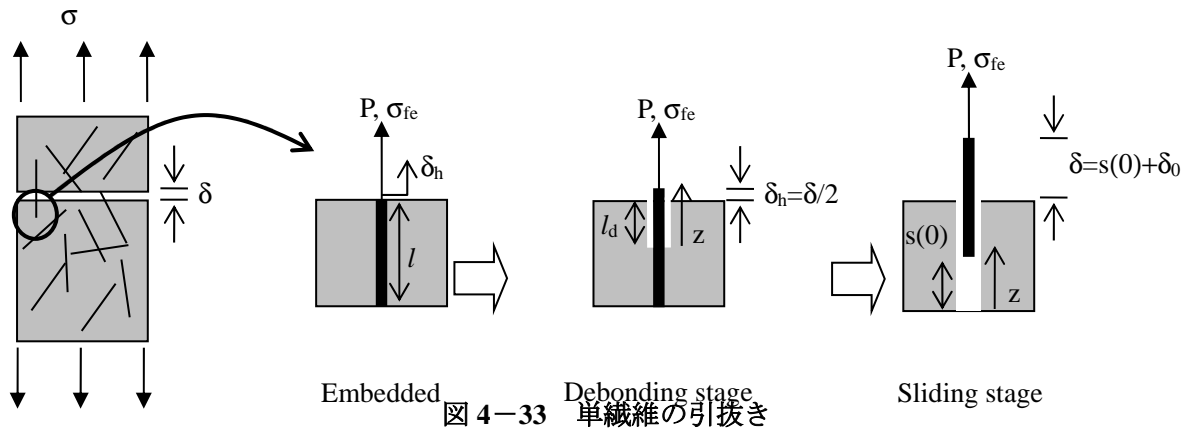


図 4-33 単繊維の引抜き

図 4-33 に示すように母材中に埋め込み長さが  $l$  である繊維を考える。界面は荷重が作用する側で長さ  $l_d$  に渡って剥離しているものとする。剥離した界面では一定の摩擦応力  $\tau_0$  が引抜き荷重に抵抗して生じている。軸方向の釣合いを考えることで、剥離領域での軸方向応力分布が得られる。

$$\sigma_f(z) = \sigma_{f0} + \frac{z(\sigma_{fe} - \sigma_{f0})}{l_d} \quad (4-144)$$

$$\sigma_m(z) = \left(1 - \frac{z}{l_d}\right) \sigma_{m0} \quad (4-145)$$

ここで、 $\sigma_{f0}$  と  $\sigma_{m0}$  はそれぞれ  $z=0$  での繊維と母材の  $z$  方向応力であり、次式で表される。

$$\sigma_{f0} = \sigma_{fe} - \frac{4\tau_0 l_d}{d_f} \quad (4-146)$$

$$\sigma_{m0} = \frac{4\tau_0 l_d V_f}{d_f V_m} \quad (4-147)$$

ここに、 $V_f$  と  $V_m$  はそれぞれ繊維と母材の体積含有率である。剥離領域の繊維と母材の相対変位を以下のように定義する。

$$\Delta(z) = u_f(z) - u_m(z) \quad (4-148)$$

よって、

$$\frac{d\Delta(z)}{dz} = \frac{du_f(z)}{dz} - \frac{du_m(z)}{dz} = \frac{\sigma_f(z)}{E_f} - \frac{\sigma_m(z)}{E_m} \quad (4-149)$$

となる。

この式に式(4-144)から(4-147)を代入して、 $\Delta(z=0)=0$ の境界条件を適用すると、

$$\Delta(z) = \frac{\sigma_{fe}z}{E_f} - \frac{4\tau_0 l_d z}{E_f d_f} (1+\eta) + \frac{2\tau_0 z^2}{E_f d_f} (1+\eta) \quad (4-150)$$

となる。ここに、 $\eta = \frac{V_f E_f}{V_m E_m}$ である。よって、繊維の引抜き変位は次式で表される。

$$\delta_h = \Delta(l_d) = \frac{\sigma_{fe} l_d}{E_f} - \frac{2\tau_0 l_d^2 (1+\eta)}{E_f d_f} \quad (4-151)$$

次に引抜き荷重  $P$  による応力  $\sigma_{fe}$  を求める。以下ではエネルギーに基づく剥離規準を考えることで応力  $\sigma_{fe}$  を求める。

剥離領域が  $dA$  だけ微小に進展するときのエネルギーバランスは次式で表される<sup>126)</sup>。

$$Pdu_f = dU + dW_f + G_d dA \quad (4-152)$$

ここに、 $u_f$  は引抜き荷重作用点での軸方向変位、 $dU$  は系のひずみエネルギーの変化、 $dW_f$  は界面摩擦による散逸したエネルギーである。 $G_d$  は界面におけるモード II の破壊エネルギーであり、 $G_d dA$  は界面剥離領域の進展に消費されたエネルギーである。一方で、弾性体においては式(3-37)において界面摩擦により散逸したエネルギーを考慮して

$$dU = \frac{1}{2} (Pdu_f - dW_f) \quad (4-153)$$

が成り立つ。これら二式より

$$G_d dA = \frac{1}{2} (Pdu_f - dW_f) \quad (4-154)$$

が得られる。ここで、 $u_f$  と  $W_f$  は

$$u_f = \int_0^{l_d} \frac{\sigma_f(z)}{E_f} dz + \frac{V_f \sigma_{fe}}{E_c} (l - l_d) \quad (4-155)$$

と

$$W_f = \int_0^{l_d} \pi d_f \tau_0 \Delta(z) dz \quad (4-156)$$

で表される．ここで， $E_c = V_f E_f + V_m E_m$ である．式(4-154)を整理すると

$$\sigma_{fe}^2 - \frac{8\tau_0 l_d (1+\eta)}{d_f} \sigma_{fe} + \frac{16\tau_0^2 l_d^2 (1+\eta)^2}{d_f^2} - \frac{8G_d E_f (1+\eta)}{d_f} = 0 \quad (4-157)$$

となり，応力 $\sigma_{fe}$ は

$$\sigma_{fe} = \frac{4\tau_0 l_d (1+\eta)}{d_f} + \sqrt{\frac{8G_d E_f (1+\eta)}{d_f}} \quad (4-158)$$

であり，引抜き荷重 $P$ は

$$P = \frac{\pi d_f^2 \sigma_{fe}}{4} = \pi d_f \tau_0 l_d (1+\eta) + \sqrt{\frac{\pi^2 G_d d_f^3 E_f (1+\eta)}{2}} \quad (4-159)$$

と表される．引抜き荷重 $P$ の最大値は剥離領域の長さ $l_d$ が埋め込み長 $l$ に達するときに生じる．

$$P = \pi d_f \tau_0 l (1+\eta) + \sqrt{\frac{\pi^2 G_d d_f^3 E_f (1+\eta)}{2}} \quad (4-160)$$

その時の変位は

$$\delta_{h0} = \frac{2\tau_0 l^2 (1+\eta)}{E_f d_f} + \sqrt{\frac{8G_d l^2 (1+\eta)}{E_f d_f}} \quad (4-161)$$

である。単繊維の引抜き荷重－変位関係は式(4-159)と(4-161)より次式のように得られる。

$$P = \sqrt{\frac{\pi^2 \tau_0 E_f d_f^3 (1 + \eta)}{2} \delta_h + \frac{\pi^2 G_d E_f d_f^3}{2}} \quad \text{for } \delta_h \leq \delta_{h0} \quad (\text{剥離過程}) \quad (4-162)$$

剥離領域の長さ  $l_d$  を用いて引抜き荷重  $P$  を表すと

$$P = \pi d_f \tau_0 l_d + \sqrt{\frac{\pi^2 G_d E_f d_f^3}{2}} \quad \text{for } \delta_h \leq \delta_{h0} \quad (\text{剥離過程}) \quad (4-163)$$

となり、剥離領域が埋め込み端部に達した時 ( $l_d = l$ ) に引抜き荷重は最大になる。

$$P_{\max} = \pi d_f \tau_0 l + \sqrt{\frac{\pi^2 G_d E_f d_f^3}{2}} \quad (4-164)$$

右辺の第1項は繊維表面での摩擦付着による抵抗を表しており、第2項は化学付着による剥離抵抗を表している。

ここまでは、引抜き荷重－変位関係について述べてきた。架橋則の導出に必要なのは引抜き荷重－開口幅関係であり、これは FPM での手順に倣い  $\delta_h$  を  $\delta/2$  に置き換えることで得られる。

$$P = \sqrt{\frac{\pi^2 \tau_0 E_f d_f^3 (1 + \eta)}{4} \delta + \frac{\pi^2 G_d E_f d_f^3}{2}} \quad \text{for } \delta \leq \delta_0 \quad (\text{剥離過程}) \quad (4-165)$$

ここに、 $\delta_{h0} = \delta_0/2$  である。

剥離領域が繊維の埋め込み端部に達した後には繊維は母材からすべり出す。このすべり過程においては界面での摩擦付着だけを考慮すればよい。すべり硬化の関係を考慮し、SHFPM で導出した式(4-93)の第1項の影響が小さいことからこれを簡略化して、次式を得る。

$$P = \pi d_f \tau_0 \left( 1 + \beta \frac{(\delta - \delta_0)}{d_f} \right) (l - \delta + \delta_0) \quad \text{for } \delta_0 < \delta < l \quad (\text{すべり過程}) \quad (4-166)$$

ここに  $\beta$  は無次元のすべり依存係数である。硬化の場合には正の値を、軟化の場合には負の値をとる。すべり依存係数は、実験結果を近似する値を求める。

以下に、短繊維引抜き実験との比較について述べる。図4-34は単繊維引抜き実験の方法を示し

ている<sup>127)</sup>。母材に埋め込まれた繊維は接着剤により載荷板に固定された他方端側から引抜きを受け、荷重は 1N の小容量のロードセルにより計測されている。母材と載荷板の間の繊維は自由長の部分となっている。図 4-35 は実験により得られたポリビニルアルコール繊維の引抜き挙動である。繊維は母材に 0.46mm の長さで埋め込まれているが、この埋め込み長さでは繊維は破断を生じない。まず、引抜き荷重を加えると繊維の自由長部分が弾性変形を生じている。界面剥離が続いて最大荷重を迎えた後に荷重が急減しているが、これは化学付着と摩擦付着が存在する剥離過程からすべり過程に移る証左であり、摩擦付着が支配的な繊維引抜きでは起こらない。すべり過程では摩擦付着のすべり硬化により、上に凸の関係が得られている。

図 4-35 では最大引抜き荷重に達した後に荷重減少が見られるが、これは剥離完了後には第 2 項の抵抗がなくなるためである。これより、破壊エネルギー  $G_d$  と摩擦付着強度  $\tau_0$  を求めることができる。この実験結果については、 $G_d = 6.0\text{J/m}^2$ 、 $\tau_0 = 3.0\text{MPa}$  が得られる。埋め込み長さを変えた場合の実験結果との比較を図 4-36 に示す。最大引抜き荷重の実験結果と式(4-164)は一致しており、妥当性があることを示している。図 4-35 の上に凸のすべり過程より、すべり硬化係数は  $\beta = 0.05$  が得られる (表 4-5)。

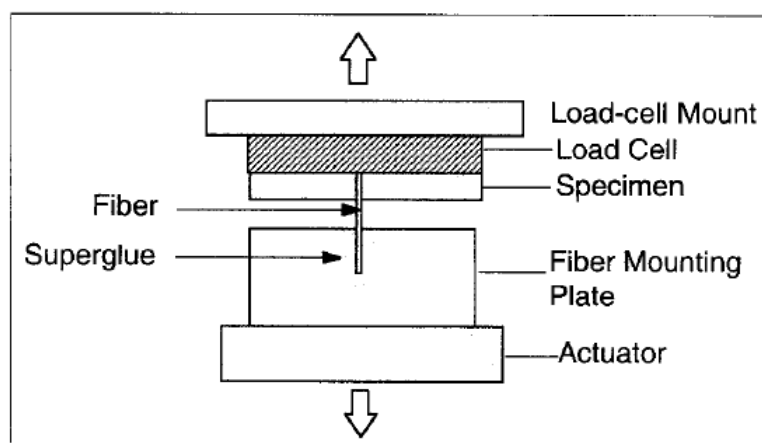


Fig. 2 – Schematic of a single fiber pullout test set-up.

図 4-34 繊維の引抜き実験<sup>117) 122)</sup>

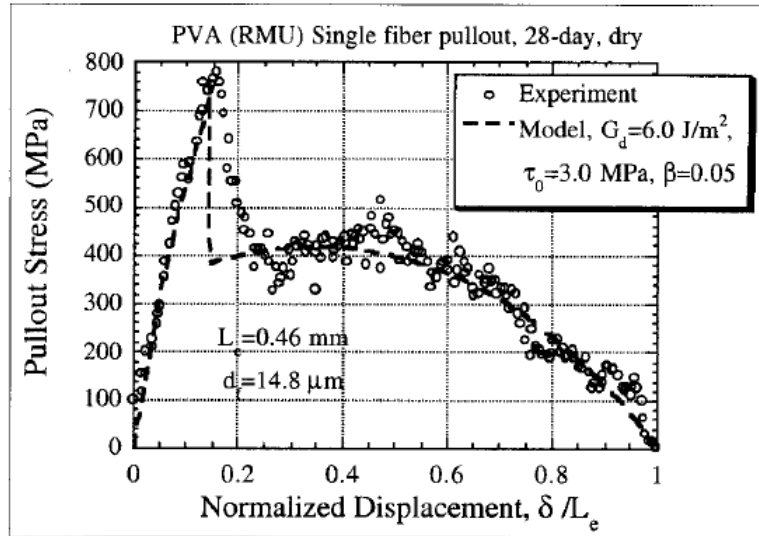


Fig. 3 – Single fiber pullout curve of a PVA fiber: test result vs. model prediction

図 4-35 ポリビニルアルコール繊維の引抜き挙動<sup>122)</sup>

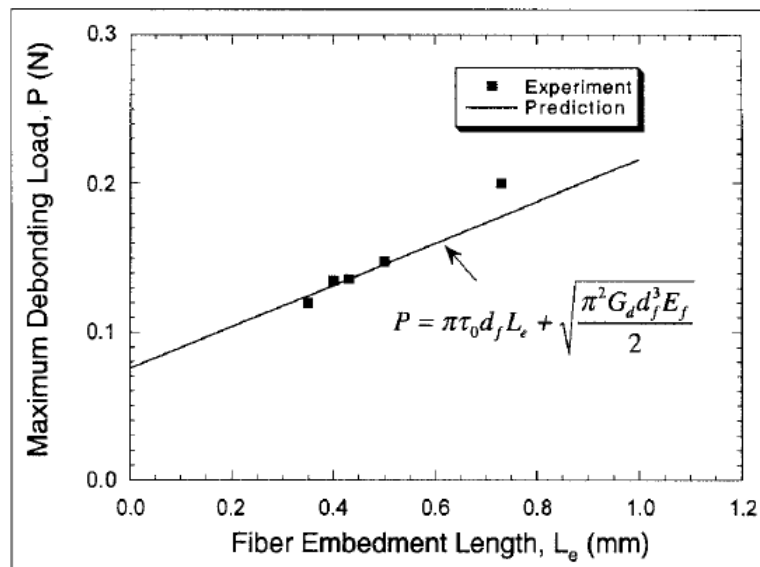


Fig. 4 – Maximum fiber debonding stress as a function of fiber embedment length for PVA (RMU) fiber: experiment vs. model prediction.

図 4-36 埋め込み長さを変えた場合の最大引抜き荷重<sup>122)</sup>

表 4-5 ポリビニルアルコール繊維 ECC の界面の材料定数

$G_d$ (J/m <sup>2</sup> )	$\tau_0$ (MPa)	$\beta$	$f$	$f'$
6.0	3.0	0.05	0.5	0.3

### 4.6.3 見かけ上の繊維破断強度の低減

セメント系母材に埋め込まれた状態での繊維強度は標準的な試験値（例えば ASTM D 2101-94）よりも小さく、さらに埋め込み角度によって見かけ上減少することが確認されている<sup>124)</sup>。

図4-37はセメント系母材に埋め込んだポリビニルアルコール繊維の引抜きから破断に至る挙動を示している。埋め込み角度が大きくなるにつれて破断強度が減少しており、75度の場合においては数回の応力低下が見られる。この応力低下は繊維が引抜き点周辺の母材がスポーリングすることで生じている。

図4-38は、埋め込み角度を変えて実施した単繊維の引抜き—破断試験により得られた見かけ上の繊維破断強度をまとめたものである。これによると、埋め込み角度0度においても埋め込み繊維引抜き強度（Embedded end strength）は両引き繊維強度（Fixed end strength）よりも繊維破断強度が15%低下している。また、埋め込み角度が0度から75度上がることにより見かけ上の繊維強度は40%低下している。この挙動をスナッピング効果と同様の式

$$\sigma_{fu}(\phi) = \sigma_{fu}(0)e^{-f\phi} \quad (4-167)$$

により近似することで見かけ上の繊維強度低減をモデルに反映する。ここに、 $\sigma_{fu}(\phi)$ は母材中での見かけ上の繊維強度であり、 $\sigma_{fu}(0)$ は埋め込み角度0度での値である。繊維強度低減係数  $f$  は実験値より0.3が得られている。

Kanda と Li は、見かけ上の繊維強度が埋め込み角度により減少する要因について、繊維表面の摩擦によるけば立ち、母材のスポーリング、繊維の曲げ圧縮もしくは曲げ引張を挙げており、これらの要因が相互に作用して見かけ上の繊維破断強度を低減させていると論じている<sup>124)</sup>。

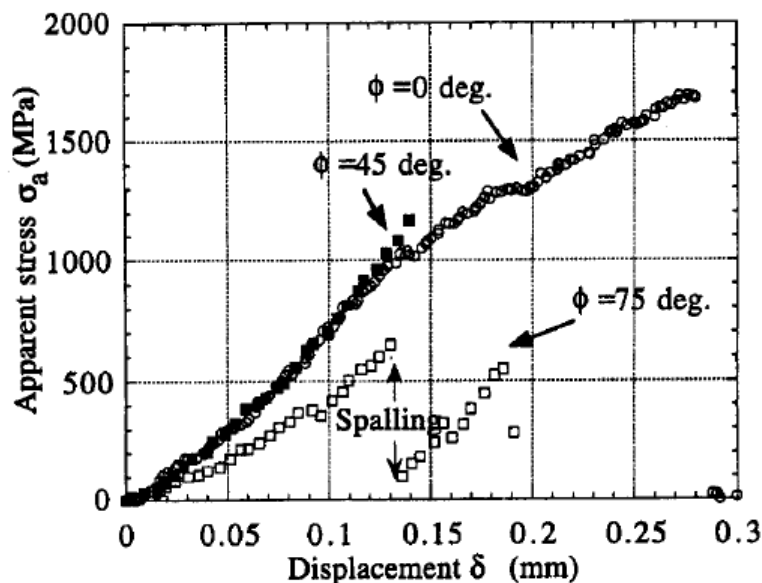


FIG. 12. Results of Embedded Strength Tests

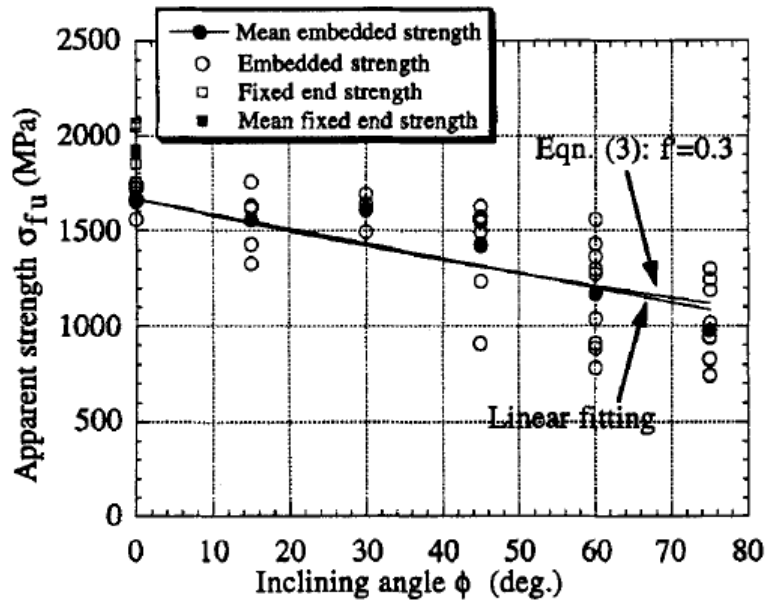
図 4-37 埋め込み角度を変えた場合の繊維の引抜き—破断挙動<sup>124)</sup>

FIG. 15. Inclining Effect on Apparent Fiber Strength

図 4-38 埋め込み角度が見かけ上の繊維強度に及ぼす影響<sup>124)</sup>

#### 4.6.4 ひび割れ架橋応力—開口幅関係（架橋則）

これまでの節で述べたように、架橋応力は個々の繊維の伝達力を配置と配向の分布を考慮した次式の積分をすることで得られる。

$$\sigma = V_f \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{z=0}^{(L_f/2)\cos\phi} \frac{P(\delta, l, \phi)}{\pi \left(\frac{d_f}{2}\right)^2} p(\phi) p(z) dz d\phi \quad (4-168)$$

以後、埋め込み長さ  $l$  について書き直した次式を用いる。

$$\sigma = \frac{2V_f}{\pi d_f^2} \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\tilde{l}=0}^1 P(\delta, \tilde{l}, \phi) e^{f\phi} \sin(2\phi) d\phi d\tilde{l} \quad (4-169)$$

ここで  $\tilde{l}$  は正規化埋め込み長さであり  $\tilde{l} = l/(L_f/2)$  である。

繊維の状態は、埋め込みの長さや角度により、剥離過程、破断、すべり過程に区分され、架橋応



力は力を伝達している剥離過程とすべり過程の繊維について積分を行うことで得られる．図 4-39 において，繊維の埋め込み長さ  $l$  は  $0 \sim L_f/2$  の範囲内にあり，埋め込み角度  $\phi$  は  $0 \sim \pi/2$  の範囲内にある．

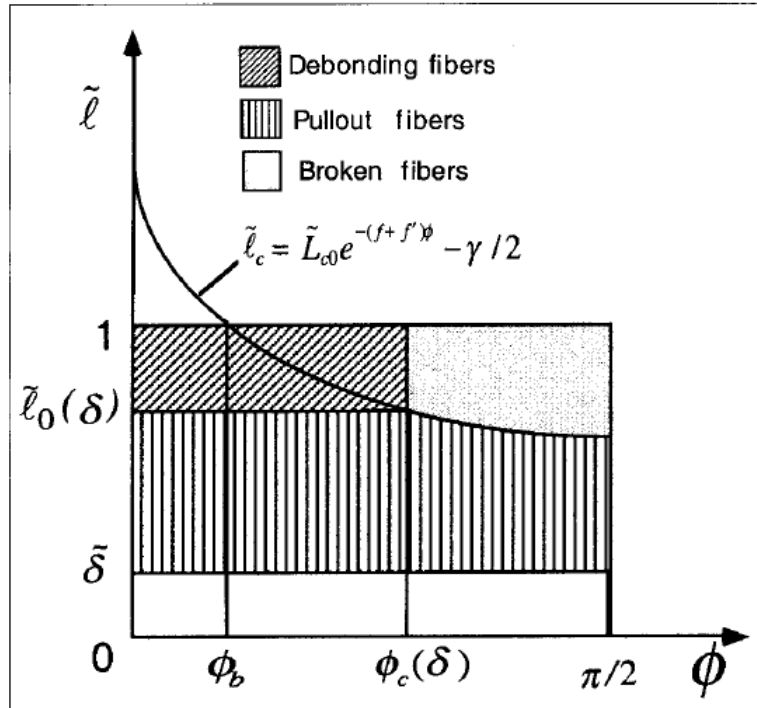


Fig. 6 – Integration domain at an arbitrary crack opening  $\delta$  for normal chemical bond strength case:  $\tilde{L}_c > 1$ .

図 4-39 正規化埋め込み長さ と埋め込み角度による過程の区分<sup>122)</sup>

図 4-39 において，限界埋め込み長さの曲線は次式で表されている．

$$\tilde{l}_c = \tilde{L}_{c0} e^{-(f+f')\phi} - \frac{\gamma}{2} \quad (4-170)$$

ここに，

$$\tilde{L}_{c0} = \frac{\sigma_{fu} d_f}{2\tau_0 L_f} \quad (4-171)$$

は化学付着がない場合の正規化限界埋め込み長さであり，

$$\gamma = \sqrt{\frac{8G_d}{\tau_0 \delta_0^*}} \quad (4-172)$$

は化学付着と摩擦付着の相対的な指標である。ここに、

$$\delta_0^* = \frac{\tau_0 L_f^2}{E_f d_f (1 + \eta)} \quad (4-173)$$

である。限界埋め込み長さの式(4-170)は式(4-164), (4-18), (4-167)を用いて、次式のように引抜き荷重を繊維破断時の荷重と等しくすることで求められる。

$$P = \frac{\pi d_f^2 \sigma_{fu}(\phi)}{4} \quad (4-174)$$

FPRM と同様に、限界埋め込み長さの曲線より上に属する繊維は最終的には破断する。

埋め込み角度が 90 度の繊維は 0 度の繊維より荷重が増加し強度も低減するため破断しやすい条件にある。埋め込み角度 90 度では限界埋め込み長さは

$$\frac{\tilde{L}_r}{2} = \tilde{L}_{c0} e^{-(f+f')\phi \frac{\pi}{2}} - \frac{\gamma}{2} \quad (4-175)$$

であり、一方で 0 度では

$$\tilde{L}_c = \tilde{L}_{c0} - \frac{\gamma}{2} \quad (4-176)$$

である。よって、対象とする複合材料の繊維長について、 $L_f/2 < L_r/2$  ( $2 < \tilde{L}_r$ ) なら繊維長が不十分

なため破断は全く生じない。一方、 $L_c < L_f/2$  ( $\tilde{L}_c < 1$ ) なら全ての角度で破断に達する繊維が生じる。

この場合でも、埋め込み長さは分布しているため、埋め込み長さが小さい繊維は破断に達しない。第 2 項は化学付着の影響を表しており、これにより限界埋め込み長さは小さくなり、繊維破断は助長されることになる。

図 4-39 は  $L_f/2 < L_r/2 < L_c$  の場合を示している。応力を伝達する剥離過程 (Debonding fibers) とすべり過程 (Pullout fibers) の繊維について積分をして、破断した繊維 (Broken fibers) と既に引き抜かれた繊維 (図中  $\tilde{l} < \tilde{\delta}$  の範囲) は応力を伝達しないため積分において考慮しないことになる。ここで、 $\phi_c(\delta)$  は、ひび割れ開口変位が  $\delta$  の時に繊維破断が生じている埋め込み角度を表しており、

この角度以上の繊維はひび割れ開口変位が $\delta$ になるまでに既に破断している。  $\phi_c(\delta)$  は $\pi/2$  より減少して $\phi_b$ に至り、最終的に限界埋め込み長さの曲線より上に属する繊維は破断する。

以上により、得られた架橋則は、 $L_r < L_f < 2L_c$  の場合以下のようになる。

$$\frac{\sigma_B}{\sigma_0} = g \left[ \sqrt{4(1+\gamma)\frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\delta}^*} + \gamma^2} - (1+\gamma)\frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\delta}^*} \right] \quad \text{for } 0 \leq \tilde{\delta} \leq \tilde{\delta}_u \left( \phi = \frac{\pi}{2} \right) \quad (4-177)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_B}{\sigma_0} = & G(\phi_c, f) \left[ \sqrt{4(1+\gamma)\frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\delta}^*} + \gamma^2} - (1+\gamma)\frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\delta}^*} \right] \\ & + \tilde{L}_{c0}^2 A(\phi_c, -f - 2f') - \tilde{L}_{c0} \gamma A(\phi_c, -f') + \frac{1}{4} \gamma^2 A(\phi_c, f) \end{aligned} \quad \text{for } \tilde{\delta}_u \left( \phi = \frac{\pi}{2} \right) \leq \tilde{\delta} \leq \tilde{\delta}^* \quad (4-178)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_B}{\sigma_0} = & \left\{ G(\phi_b, f)(1 - \tilde{\delta})^2 + \tilde{L}_{c0}^2 A(\phi_b, -f - 2f') \right. \\ & \left. - 2\tilde{L}_{c0} \left( \tilde{\delta} + \frac{\gamma}{2} \right) A(\phi_b, -f') + \left( \tilde{\delta} + \frac{\gamma}{2} \right)^2 A(\phi_b, f) \right\} (1 + c\tilde{\delta}) \end{aligned} \quad \text{for } \tilde{\delta}^* \leq \tilde{\delta} \leq \frac{\tilde{L}_r}{2} \quad (4-179)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_B}{\sigma_0} = & \left\{ G(\phi_b, f)(1 - \tilde{\delta})^2 + \tilde{L}_{c0}^2 B(\phi_b, \phi_a, -f - 2f') \right. \\ & \left. - 2\tilde{L}_{c0} \left( \tilde{\delta} + \frac{\gamma}{2} \right) B(\phi_b, \phi_a, -f') + \left( \tilde{\delta} + \frac{\gamma}{2} \right)^2 B(\phi_b, \phi_a, f) \right\} (1 + c\tilde{\delta}) \end{aligned} \quad \text{for } \frac{\tilde{L}_r}{2} \leq \tilde{\delta} \leq 1 \quad (4-180)$$

$L_f > 2L_c$  の場合は、以下のようになる。

$$\frac{\sigma_B}{\sigma_0} = g \left[ \sqrt{4(1+\gamma)\frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\delta}^*} + \gamma^2} - (1+\gamma)\frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\delta}^*} \right] \quad \text{for } 0 \leq \tilde{\delta} \leq \tilde{\delta}_u \left( \phi = \frac{\pi}{2} \right) \quad (4-181)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_B}{\sigma_0} = & G(\phi_c, f) \left[ \sqrt{4(1+\gamma)\frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\delta}^*} + \gamma^2} - (1+\gamma)\frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\delta}^*} \right] \\ & + \tilde{L}_{c0}^2 A(\phi_c, -f - 2f') - \tilde{L}_{c0} \gamma A(\phi_c, -f') + \frac{1}{4} \gamma^2 A(\phi_c, f) \end{aligned} \quad \text{for } \tilde{\delta}_u \left( \phi = \frac{\pi}{2} \right) \leq \tilde{\delta} \leq \tilde{\delta}_u(\phi = 0) \quad (4-182)$$

$$\frac{\sigma_B}{\sigma_0} = \left\{ \tilde{L}_{c0}^2 G\left(\frac{\pi}{2}, -f - 2f'\right) - 2\tilde{L}_{c0} \left(\tilde{\delta} + \frac{\gamma}{2}\right) G\left(\frac{\pi}{2}, -f'\right) + \left(\tilde{\delta} + \frac{\gamma}{2}\right)^2 G\left(\frac{\pi}{2}, f\right) \right\} (1 + c\tilde{\delta})$$

for  $\tilde{\delta}_u(\phi=0) \leq \tilde{\delta} \leq \frac{\tilde{L}_r}{2}$  (4-183)

$$\frac{\sigma_B}{\sigma_0} = \left\{ \tilde{L}_{c0}^2 G(\phi_a, -f - 2f') - 2\tilde{L}_{c0} \left(\tilde{\delta} + \frac{\gamma}{2}\right) G(\phi_a, -f') + \left(\tilde{\delta} + \frac{\gamma}{2}\right)^2 G(\phi_a, f) \right\} (1 + c\tilde{\delta})$$

for  $\frac{\tilde{L}_r}{2} \leq \tilde{\delta} \leq \tilde{L}_c$  (4-184)

ここに,

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} V_f \tau_0 \frac{L_f}{d_f}, \quad c = \frac{\beta L_f}{2d_f}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{8G_d}{\tau_0 \delta_0^*}}, \quad \delta_0^* = \frac{\tau_0 L_f^2}{E_f d_f (1 + \eta)}, \quad \delta^* = \delta_0^* (1 + \gamma), \quad \tilde{\delta}^* = \frac{\delta^*}{L_f/2},$$

$$\tilde{L}_{c0} = \frac{\sigma_{fu} d_f}{2\tau_0 L_f}, \quad \tilde{L}_c = \frac{L_c}{L_f/2} = \tilde{L}_{c0} - \frac{\gamma}{2}, \quad \tilde{L}_r = \frac{L_r}{L_f/2} = 2\tilde{L}_{c0} e^{-(f+f')\frac{\pi}{2}} - \gamma,$$

$$\tilde{\delta}_u(\phi) = \frac{L_{c0}^2}{(1 + \gamma)} \tilde{\delta}^* \left[ e^{-2(f+f')\phi} - \left(\frac{\gamma}{2\tilde{L}_{c0}}\right)^2 \right], \quad \phi_c = -\frac{1}{2(f+f')} \ln \left( \frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\delta}_{c0}} + \frac{\gamma^2}{4\tilde{L}_{c0}^2} \right), \quad \tilde{\delta}_{c0} = \frac{\tilde{L}_{c0}^2 \tilde{\delta}^*}{(1 + \gamma)},$$

$$\phi_b = -\frac{1}{(f+f')} \ln \left( \frac{1}{\tilde{L}_{c0}} + \frac{\gamma}{2\tilde{L}_{c0}} \right), \quad \phi_a = -\frac{1}{(f+f')} \ln \left( \frac{\tilde{\delta}}{\tilde{L}_{c0}} + \frac{\gamma}{2\tilde{L}_{c0}} \right),$$

$$G(\phi, f) = \frac{1}{4 + f^2} \left[ e^{f\phi} (f \sin 2\phi - 2 \cos 2\phi) + 2 \right], \quad g = G\left(\frac{\pi}{2}, f\right),$$

$$A(\phi, f) = \frac{1}{4 + f^2} \left[ e^{f\phi} (2 \cos 2\phi - f \sin 2\phi) + 2e^{\frac{f\pi}{2}} \right],$$

$$B(\phi_1, \phi_2, f) = \frac{1}{4 + f^2} \left[ e^{f\phi_2} (f \sin 2\phi_2 - 2 \cos 2\phi_2) - e^{f\phi_1} (f \sin 2\phi_1 - 2 \cos 2\phi_1) \right]$$

である。

図 4-40 と図 4-41 は、それぞれ低破断傾向と高破断傾向の場合の破断過程完了前の架橋則を示す。低破断傾向は  $\tilde{L}_{c0} = 2.0$  であり、高破断傾向は  $\tilde{L}_{c0} = 0.5$  である。  $\gamma/\tilde{L}_{c0}$  は相対的な化学付着の大きさであり、増大するにつれて初期の架橋応力が大きくなる。低破断傾向の場合には、化学付着により最大架橋応力が著しく大きくなり、破断過程完了時の架橋応力も比較的大きい。

図 4-42 と図 4-43 には、低破断傾向と高破断傾向の場合の破断過程完了後の架橋則であり、そ

れぞれ図 4-40 と図 4-41 の続きである。破断過程完了後のすべり硬化が生じる場合については、図 4-44 に示されている。

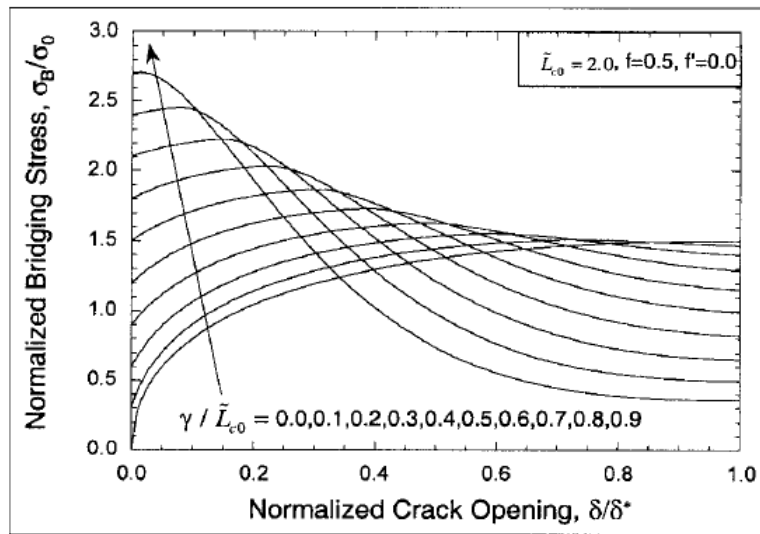


Fig. 8 – Pre-fully-debonding bridging stress - crack opening curves for a system with low tendency of fiber rupture.

図 4-40 破断過程完了前の架橋則（低破断傾向の場合）<sup>12)</sup>

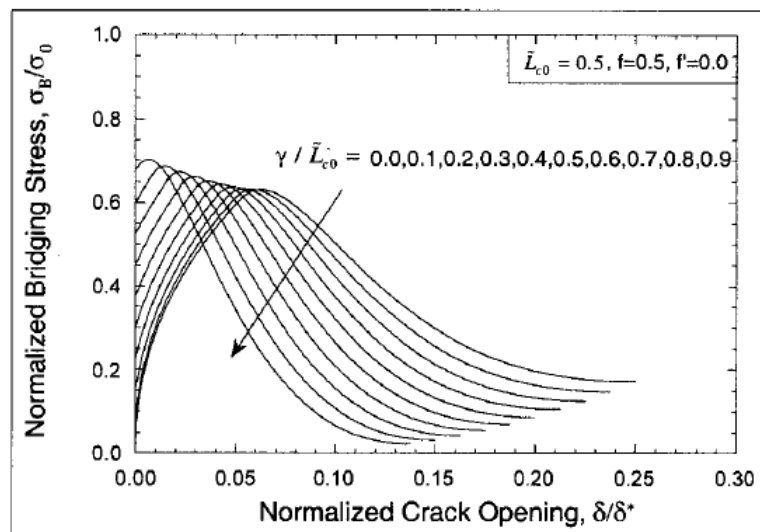


Fig. 9 – Pre-fully-debonding bridging stress - crack opening curves for a system with high tendency of fiber rupture.

図 4-41 破断過程完了前の架橋則（高破断傾向の場合）<sup>12)</sup>

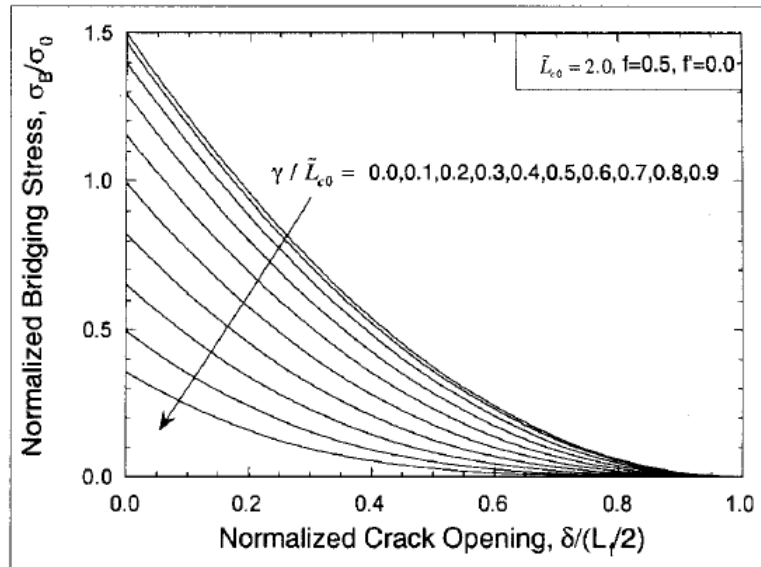


Fig. 10 – Post-fully-debonding bridging stress - crack opening curves for a system with low tendency of fiber rupture (continuation of the curves in Fig. 8).

図 4-42 破断過程完了後の架橋則（低破断傾向の場合）<sup>122)</sup>

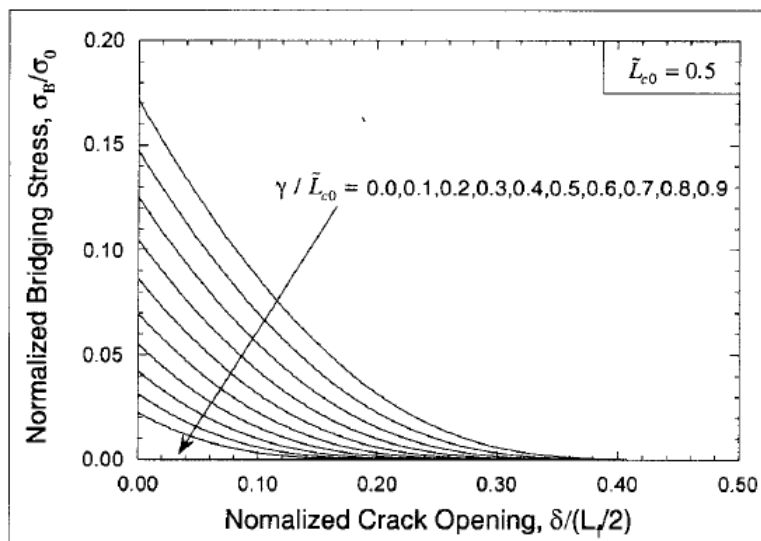


Fig. 11 – Post-fully-debonding bridging stress - crack opening curves for a system with high tendency of fiber rupture (continuation of the curves in Fig. 9).

図 4-43 破断過程完了後の架橋則（高破断傾向の場合）<sup>122)</sup>

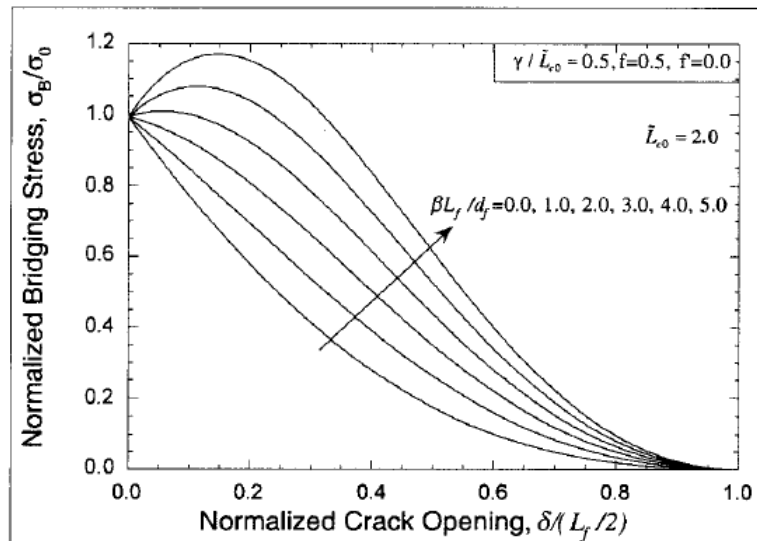


Fig. 12 – Effect of slip-hardening interface on the post-fully-debonding  $\sigma_B$ - $\delta$  relation.

図 4-44 破断過程完了後の架橋則とすべり硬化の影響<sup>122)</sup>

#### 4.6.5 引張強度と破壊エネルギー

架橋則を導出したことにより、引張強度と破壊エネルギーも得られる。図 4-45 は、繊維長が引張強度に及ぼす影響を示している。繊維混入量  $V_f$ 、繊維径  $d_f$ 、繊維強度  $\sigma_{fu}$ 、摩擦付着強度  $\tau_0$  が与えられているとき、引張強度  $\sigma_{cu}$  は単調的に増加し、FRPM の結果 (図 4-21) に帰着する<sup>11)</sup>。化学付着が強くなるにつれて、繊維長が短い場合の引張強度が大きく増加する。この図より、繊維長が十分に長い場合化学付着が十分に強い場合には、引張強度は繊維長に依存しなくなる。このとき、引張強度は繊維破断に支配され、繊維引張強度と繊維混入量に依存する。

図 4-46 は、破壊エネルギーと繊維長、化学付着の関係を示しており、破断過程終了後の架橋則を (図 4-42 および図 4-43) 用いて算出されている。FRPM の結果 (図 4-21) と同様に、最大の破壊エネルギーを与える最適な繊維長が存在することが示されている。また、化学付着が強くなるとともに繊維破断が多くなり、破壊エネルギーが減少することも見て取れる。

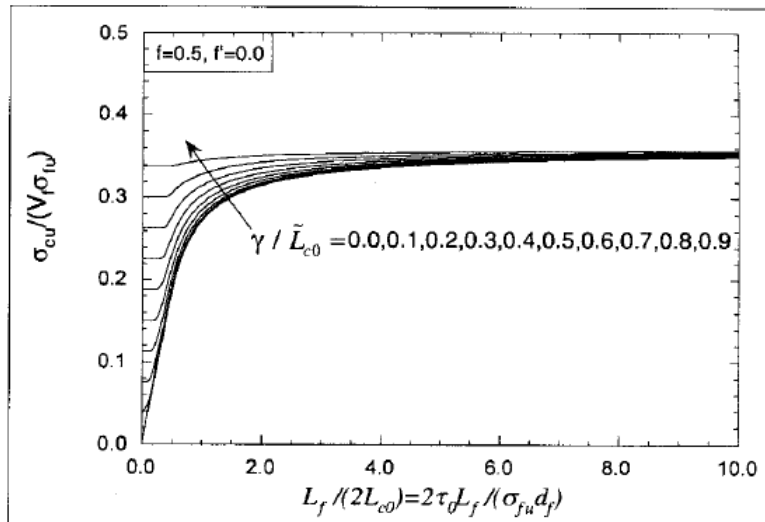


Fig. 13 – Normalized composite tensile strength as a function of normalized fiber length and relative chemical bond strength.

図 4-45 引張強度に及ぼす繊維長と化学付着の影響<sup>122)</sup>

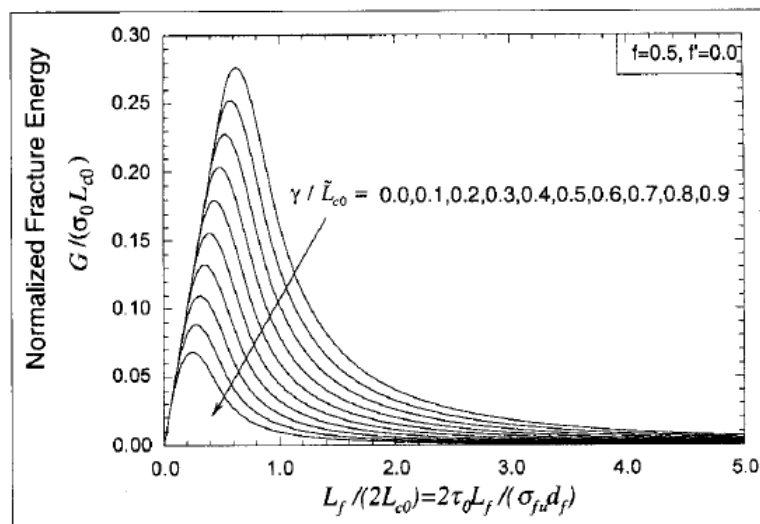


Fig. 14 – Normalized composite fracture energy as a function of normalized fiber length and relative chemical bond strength.

図 4-46 破壊エネルギーに及ぼす繊維長と化学付着の影響<sup>122)</sup>



## 4.7 非直線形状繊維の引抜き破断モデル

これまでの節では繊維の形状について直線形状を仮定していた。繊維製造法においては伸線もしくは紡糸によることが多く、こうしてできた長繊維を切断するため、多くは直線形状の短繊維が得られる。こうした直線形状の繊維について、繊維-母材間界面の摩擦付着強度や化学付着強度に基づいたモデルを説明してきた。

しかし、鋼繊維については、フック、インデント、波形などの加工が施され、機械的な付着が得られるように製造されている繊維もある。また、ポリプロピレン繊維は疎水性であり付着強度が低いため、表面処理剤による親水性付与とともに、波形形状、凹凸状の表面、螺旋状の表面突起、幹枝状、不規則な断面形状などにより機械的な付着向上が図られている。

図4-47に、フックおよび波形形状の鋼繊維の引抜き前と引抜き後の状態を示す。これら非直線形状の鋼繊維はセメント系の母材から引き抜かれる際に塑性変形を受けて直線形状に変形しているのが分かる。引抜き過程において、フックや波形は母材からの抵抗を受けて機械的な付着を向上させ、直線形状への塑性変形によりエネルギーを消費する。これにより、単繊維の引抜き荷重-開口幅関係では、最大荷重と完全引抜きに要するエネルギーが増加する。

本節では、非直線形状繊維の引抜き破断モデルについて説明する。界面においては、全長にわたって生じる付着抵抗（前節までの化学付着と摩擦付着）と曲線部においてのみ生じる摩擦抵抗を考慮している。また、変曲点を通過する際の塑性変形も考慮している。これにより、曲線部の位置、曲率、曲線長を反映した単繊維の引抜き挙動を評価することができる。このモデルは、フック形状と波形形状を持つ鋼繊維の引抜き挙動の研究において発表されている<sup>128)</sup>。以下の説明はChanvillardの論文<sup>128)</sup>に基づいている。

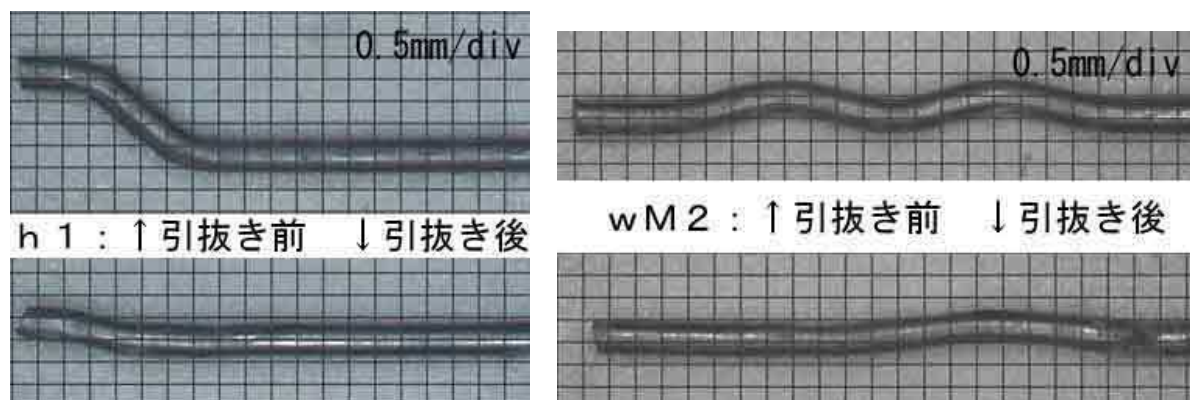


図4-47 フック形状（左）と波形形状（右）鋼繊維の引抜き前と引抜き後

### 4.7.1 非直線形状の効果

本節では、繊維の非直線形状の効果を考えるために、曲線部における摩擦抵抗の発生（図4-48）と繊維が引抜き経路上の変曲点を通過する際の塑性変形（図4-49）を考慮している。これらにより、曲線部の位置、曲率、曲線長を反映した単繊維引抜き挙動の評価を行うことができる。

単繊維の引抜き荷重－変位関係の導出は数値的に行う。まず、繊維の微小要素における力のつり合いを考える。繊維の引抜き荷重と、繊維－母材間の付着抵抗、曲線部における摩擦抵抗がつり合う。付着抵抗は繊維－母材間の化学的付着強度と摩擦付着強度に基づくものであり、繊維全長の界面で発生する。一方、摩擦抵抗は繊維の曲線部においてのみ生じるものである。これは、曲線部において繊維－母材間に垂直抗力が発生するため、これに由来する摩擦力が生じるためである。

繊維が引抜き経路上の変曲点を通る際に塑性変形に消費される内部エネルギーと、外力によってなされる仕事が等しいという関係を用いて、繊維の微小要素に関する支配式が導かれ、これを繊維全長に渡って積分することにより、線形形状を考慮した、単繊維引抜き荷重－変位関係が導かれる。

これまでの節と同様に本節においても、繊維の剥離過程とすべり過程に分けて考える（図 4-50）。剥離過程においては、繊維－母材間の付着破壊がひび割れ側より進展すると仮定する。そして、剥離が繊維埋め込み側端部に達した後すべり過程に移るものとする。

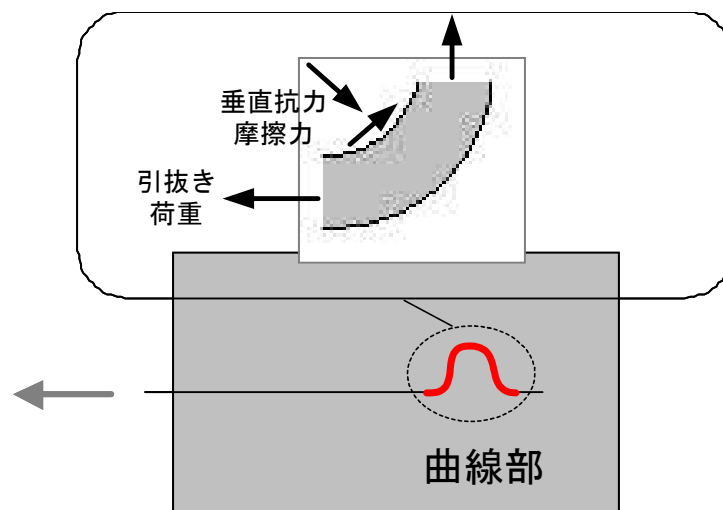


図 4-48 曲線部における摩擦抵抗

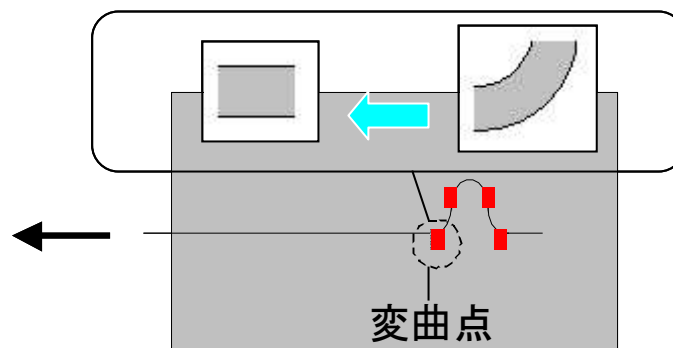


図 4-49 変曲点における塑性変形

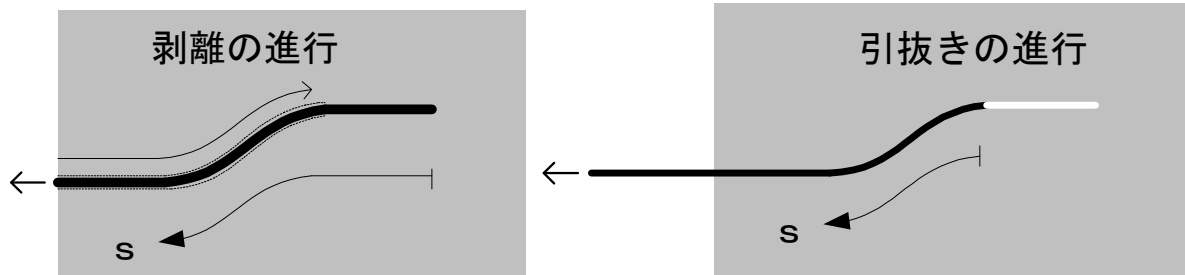


図 4-50 剥離過程（左）とすべり過程（右）

#### 4.7.2 支配方程式の導出

##### 力のつり合い

図 4-51 に示すように、繊維の一部分である曲線の微小要素を考える。この要素に作用する力は、両端の軸力  $P$  及び  $P+dP$ 、母材より繊維側面垂直方向に働く力  $dN$ 、母材より繊維側面で軸方向に働く力  $dT$  である。  $x$  及び  $z$  方向のつり合いは次式で表される。

$$dP \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) = dT \quad (\text{x 方向}) \quad (4-185)$$

$$P \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) + (P + dP) \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = dN \quad (\text{z 方向}) \quad (4-186)$$

$d\theta \ll 1$  とし、高次項は無視することで上式は単純化できる。

$$dP = dT \quad (\text{x 方向}) \quad (4-187)$$

$$dN = Pd\theta \quad (\text{z 方向}) \quad (4-188)$$

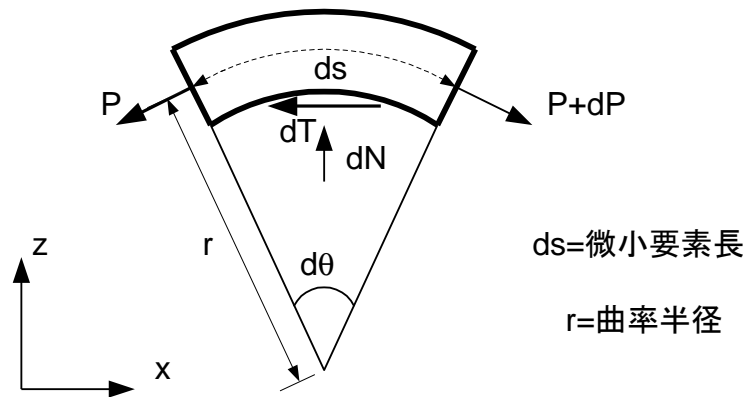


図 4-51 微小要素における力のつり合い

エネルギーバランス

非直線形状の繊維が直線形状に変形する際に、外力によりなされる仕事  $W_{\text{ext}}$  は塑性変形に消費される内部エネルギー  $W_{\text{def}}$  に等しい。

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{def}} \quad (4-189)$$

ここで、外力仕事は微小要素の表面に作用する応力  $p_i$  と対応する変位  $u_i$  の積を微小要素の表面  $A$  において積分することで得られる。

$$W_{\text{ext}} = \int_A p_i u_i dA \quad (4-190)$$

一方で、内部エネルギーは微小要素内の応力  $\sigma_{ij}$  とひずみ  $\varepsilon_{ij}$  の積を微小要素の体積  $V$  において積分することで得られる。

$$W_{\text{def}} = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (4-191)$$

これらの式では変位場とひずみ場が必要となる。以下にこれを述べる。

### 外力仕事

微小要素は、剛体すべり変位により重心位置で  $d\delta$  変位する。また、曲率の変化に伴う微小要素自身の变形も考慮する必要がある。ここで、繊維の軸方向を  $s$  軸、曲率の半径方向を  $z$  軸、 $s$  と  $z$  に直交する軸を  $y$  軸ととると、要素の变形による変位は次式のようにになる。

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_s \\ u_z \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} zsdC \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4-192)$$

ただし、 $dC$  は曲率変化である。

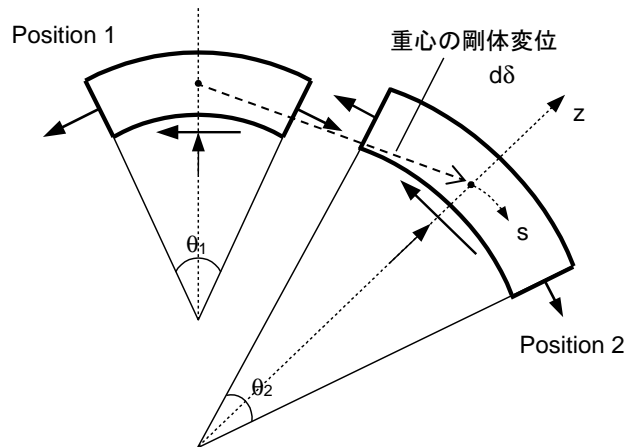


図 4-52 微小要素における変位場

この式を  $W_{\text{ext}}$  の式に代入して、

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} = & -\frac{P}{S} \int_s \left\{ d\delta + z \left( s - \frac{ds}{2} \right) dC \right\} dS \\ & + \frac{P+dP}{S} \int_s \left\{ d\delta + z \left( s + \frac{ds}{2} \right) dC \right\} dS - \frac{dT}{S'} \int_{S'} \{ d\delta + zsdC \} dS' \end{aligned} \quad (4-193)$$

となる。ここで、 $S$  は繊維が伝達する力  $P$  および  $P+dP$  が働く面、すなわち  $s$  軸に直交する微小要素の断面積である、また、 $S'$  は界面抗力  $dT$  が働く面、すなわち繊維とマトリクスとの界面の表面積である。ここで高次の項を無視すると、

$$W_{\text{ext}} = -Pd\delta + (P + dP)d\delta - dTd\delta \quad (4-194)$$

となり,

$$W_{\text{ext}} = dPd\delta - dTd\delta \quad (4-195)$$

を得る.

#### 内部エネルギー

次に内部エネルギー $W_{\text{def}}$ を求めるために、ひずみ場を求める。微小変位において、ひずみと変位の関係は

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4-196)$$

であるから、変位の式より,

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} zdC & \frac{1}{2}sdC & 0 \\ \frac{1}{2}sdC & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-197)$$

を得る.

微小要素には、繊維の荷重伝達による引張、曲率変化による曲げ、そして界面抗力によるせん断が生じる。しかし、微小要素において繊維-母材間界面は一様に接触しており、要素に生じるせん断応力は圧縮もしくは引張応力に比べて小さいと考えられる。よって、応力状態としては、次式のように、繊維軸方向の圧縮もしくは引張応力のみを考慮する。

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-198)$$

よって、 $W_{\text{def}}$ にひずみ場と応力場を代入して,

$$W_{\text{def}} = \int_V \sigma z dC dV \quad (4-199)$$

となる。微小要素において曲率変化が一定だとすると、

$$W_{\text{def}} = dC ds \int_S \sigma z dS \quad (4-200)$$

ここで、積分の項を見てみると、これはモーメントに等しい。よって、

$$W_{\text{def}} = M dC ds \quad (4-201)$$

となる。

モーメントを求めるために、繊維が塑性変形にいたる構成則を次式のように完全弾塑性と仮定する。

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E\varepsilon & \left( \varepsilon \leq \frac{\sigma_y}{E} \right) \\ \sigma_y & \left( \varepsilon > \frac{\sigma_y}{E} \right) \end{cases} \quad (4-202)$$

ただし、 $E$  はヤング率、 $\sigma_y$  は降伏強度である。

完全弾塑性を仮定すると、軸力  $N$  と曲率に応じてモーメント  $M$  の理論解が求められる。本研究で扱う繊維の曲線部の曲率は 200/m~600/m 程度であるので、次に示す 3 次の近似式により、軸力  $N$  に対するモーメント  $M$  の関係を定める。

$$M = M_p \left( 1 - 0.0539 \left( \frac{N}{N_p} \right) - 0.7156 \left( \frac{N}{N_p} \right)^2 - 0.2304 \left( \frac{N}{N_p} \right)^3 \right) \quad (4-203)$$

ただし、 $M_p$  は全塑性モーメント、 $N_p$  は軸方向限界荷重である。

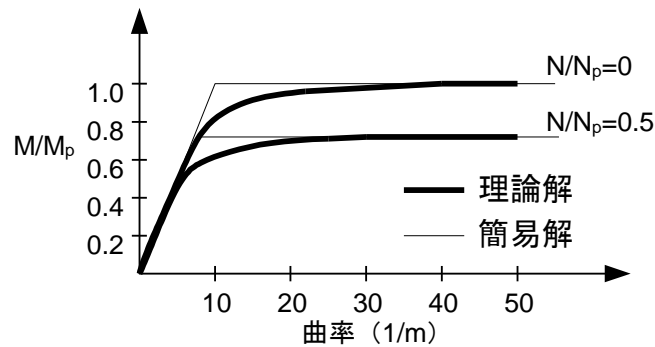


図 4-53 モーメントと曲率の関係

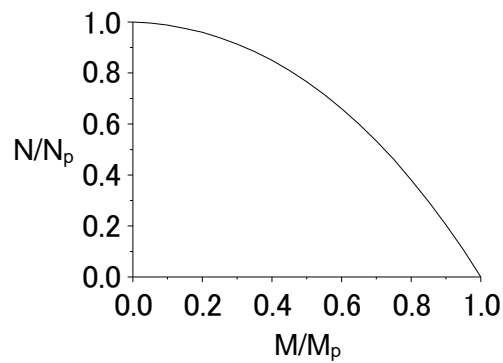


図 4-54 モーメントと軸力の関係

### 摩擦則

繊維が引抜かれる際に、繊維は側面で垂直方向に働く力  $dN$  と軸方向に働く力  $dT$  を受ける。クーロンの摩擦則をもちいて、これらの力を関連付けると、

$$dT = fdN + C_0 \quad (4-204)$$

となる。すなわち、第一項が垂直抗力  $dN$  に摩擦係数  $f$  を乗じた摩擦力であり、第二項は付着力  $C_0$  である。第一項は繊維の曲線部で発生する垂直力により生じる摩擦力である。一方で、第二項は繊維の全長に渡って生じ、繊維-母材間の化学的付着と摩擦付着の両方を含む。第二項に繊維-母材間の付着強度  $\tau_0$  を用いて、

$$dT = fdN + \tau_0 p ds \quad (4-205)$$



となる。ただし、 $p$  は繊維の円周長である。

#### 支配方程式

式(4-189)に、式(4-195)と式(4-201)を代入して  $W_{\text{ext}}$  と  $W_{\text{def}}$  を消去し、さらに式(4-205)と式(4-188)により、 $dT$  と  $dN$  を消去すると、

$$dPd\delta = (\tau_0 p ds + fPC ds)d\delta + MdC ds \quad (4-206)$$

さらに、両辺を  $d\delta$  で割って、

$$dP = (\tau_0 p + fPC + MC') ds \quad (4-207)$$

を得る。ここで、

$$C' = \frac{dC}{d\delta} \quad (4-208)$$

は曲率の経路方向の変化率である。これにより、繊維の線形形状を反映できる荷重-変位関係式の微分形式が導出された。

#### 付着応力

付着応力は化学的付着と摩擦的付着を含んでおり、相対すべり量の関数として表している (図 4-55)。

$$\frac{\tau_0}{\tau_{\max}} = 1 - \left(1 - \frac{\delta}{\delta_{0\tau}}\right)^2 \quad \text{for } \delta \leq \delta_{0\tau} \quad (4-209)$$

$$\frac{\tau_0}{\tau_{\max}} = (1 - \tau_{\text{lim}}) \exp\left[\alpha_{\tau} \left(1 - \frac{\delta}{\delta_{0\tau}}\right)\right] + \tau_{\text{lim}} \quad \text{for } \delta > \delta_{0\tau} \quad (4-210)$$

これらの式において、最大応力までは、化学的結合が有効であり、相対すべり量は繊維と母材の変形の差により生じている。最大応力にて化学的結合強度に達し界面の剥離が生じて、付着応力は減少し残留値 (50%) にまで下がる。残留値は摩擦付着強度に相当する。剥離後の相対すべり量は、繊維のすべりによる。

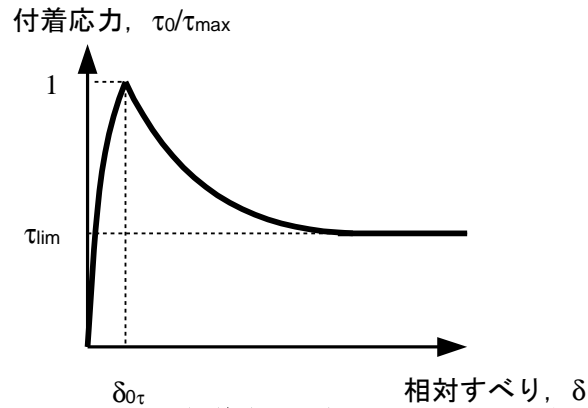


図 4-55 付着応力と相対すべり量の関係

### 摩擦係数

摩擦力は、繊維の曲線部において発生する垂直抗力により生じる。付着応力と同様に、摩擦係数  $f$  と相対すべり量  $\delta$  の関係式は前半と後半に分かれ、剥離後に発生する最大値までの上昇と、すり磨き効果による残留値までの減少を表している。

$$\frac{f}{f_{\max}} = 1 - \left(1 - \frac{\delta}{\delta_{0f}}\right)^2 \quad \text{for } \delta \leq \delta_{0f} \quad (4-211)$$

$$\frac{f}{f_{\max}} = (1 - f_{\lim}) \exp\left[\alpha_f \left(1 - \frac{\delta}{\delta_{0f}}\right)\right] + f_{\lim} \quad \text{for } \delta > \delta_{0f} \quad (4-212)$$

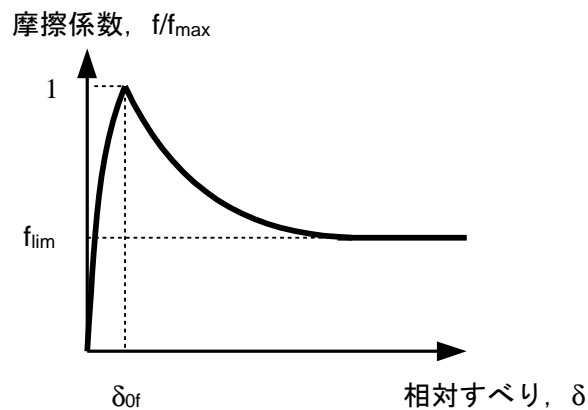


図 4-56 摩擦係数と相対すべり量の関係

以上の界面挙動をまとめると，繊維の引抜きにより母材－繊維間の界面せん断応力が化学的結合強度に達することで界面破壊が生じ，その後は残留的な摩擦付着強度により引抜きに抵抗する（式(4-205)の第二項）．加えて，曲線部では界面破壊後の摩擦付着段階にて垂直力により摩擦付着が付加されて，引抜きに対する抵抗が高まることになる（式(4-205)の第一項）．

#### モーメント係数

繊維が塑性変形するにあたり，相対すべり量がある程度に達するまでは母材が繊維に応じて変形するため，この影響を考慮する必要がある．そこで，モーメント  $M$  に乗じるモーメント係数  $M_0$  を相対すべり量の関数として次式のように表す．

$$M_0 = \frac{\delta}{\delta_{0M}} \quad \text{for } \delta \leq \delta_{0M} \quad (4-213)$$

$$M_0 = 1 \quad \text{for } \delta > \delta_{0M} \quad (4-214)$$

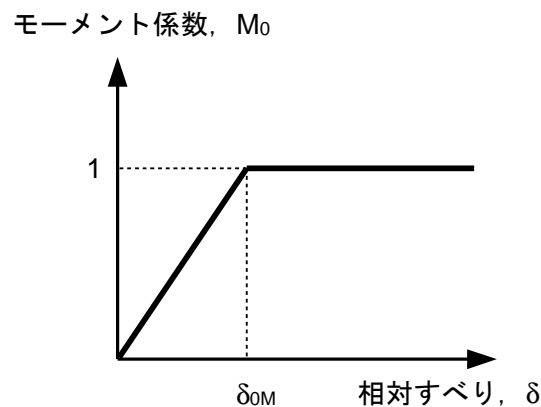


図 4-57 モーメント係数と相対すべり量の関係

### 4.7.3 単繊維の引抜き荷重－開口幅関係

式(4-207)を繊維の軸 ( $s$  軸) に沿って積分することにより，単繊維引抜き挙動における荷重－変位関係が求められる．ここでは単繊維引抜き挙動を剥離過程とすべり過程に分けて関係式を示す．

#### 剥離過程

剥離過程とは，繊維と母材との付着が破壊されていく過程をあらわす（図 4-58）．繊維が引抜き荷重  $P$  を受けると，埋め込み始点  $B$  ( $s=l_f$ ,  $l_f$  は繊維の埋め込み長) から埋め込み終点  $A$  ( $s=0$ ) に向って剥離が進行し，繊維－母材間の相対変位が生じる．一方，剥離先端  $D$  ( $s=l_f-l_{\text{debond}}$ ,  $l_{\text{debond}}$  は剥離長) と  $A$  の間は剥離が起きていない．よって， $D$  における境界条件は

$$\begin{cases} P_0 = 0 \\ \varepsilon_0 = 0 \\ \delta_0 = 0 \end{cases} \quad (4-215)$$

となる。

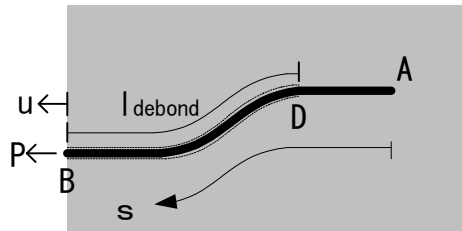


図 4-58 剥離過程

このとき、 $s$ における荷重  $P(s)$ は

$$P(s) = \int_{l_f - l_{\text{debond}}}^s dP \quad \text{for } l_f - l_{\text{debond}} \leq s \leq l_f \quad (4-216)$$

となる。よって、各要素におけるひずみ  $\varepsilon(s)$ は

$$\varepsilon(s) = \frac{P(s)}{E_f A_f} \quad (4-217)$$

となる。ここに、 $E_f$ =繊維弾性係数、 $A_f$ =繊維の断面積である。ひずみを積分して、変位  $u(s)$ が以下のように求められる。

$$u(s) = \int_{l_f - l_{\text{debond}}}^s \frac{P(s')}{E_f A_f} ds' \quad \text{for } l_f - l_{\text{debond}} \leq s \leq l_f \quad (4-218)$$

剥離長  $l_{\text{debond}}$  の増大に伴い、式(4-216)と(4-218)を用いて、剥離過程における引抜荷重  $P=P(l_f)$ 、引抜き変位  $u=u(l_f)$ を導出できる。

#### すべり過程

剥離が繊維全長に及ぶ ( $l_{\text{debond}}=l_f$ ) と引抜き挙動はすべり過程に移行する (図 4-59)。繊維の末端 E にすべり変位  $\delta_{\text{end}}$ が生じて、これに応じて引抜き変位が徐々に大きくなり、最終的に  $\delta_{\text{end}}=l_f$  と

なった時点で繊維は母材から完全に引抜かれることになる。

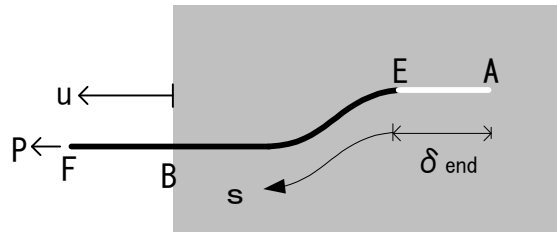


図 4-59 すべり過程

このときの荷重  $P(s)$ ,  $\epsilon(s)$ ,  $u(s)$  は以下のようなになる。ただし、 $s$  軸の原点は E である。

$$P(s) = \begin{cases} \int_0^s dP & \text{for } 0 \leq s \leq l_f - \delta_{\text{end}} \\ P(l_f - \delta_{\text{end}}) & \text{for } s > l_f - \delta_{\text{end}} \end{cases} \quad (4-219)$$

$$\epsilon(s) = \begin{cases} \frac{P(s)}{E_f A_f} & \text{for } 0 \leq s \leq l_f - \delta_{\text{end}} \\ \frac{P(l_f - \delta_{\text{end}})}{E_f A_f} & \text{for } s > l_f - \delta_{\text{end}} \end{cases} \quad (4-220)$$

$$u(s) = \begin{cases} \int_0^s \frac{P(s')}{E_f A_f} ds' & \text{for } 0 \leq s \leq l_f - \delta_{\text{end}} \\ u(l_f - \delta_{\text{end}}) + \frac{P(l_f - \delta_{\text{end}})}{E_f A_f} \delta_{\text{end}} & \text{for } s > l_f - \delta_{\text{end}} \end{cases} \quad (4-221)$$

以上のように、すべり過程においても、繊維埋め込み側端部のすべり変位  $\delta_{\text{end}}$  の増大に伴い、引抜き荷重、引抜き変位が求められる。ここまで、引抜き荷重-変位関係について述べてきたが、FPM の場合と同様の手順により引抜き荷重-開口幅関係を得ることができる。

#### 実験結果との比較

表 4-6 の繊維形状について、単繊維の引抜き荷重-変位関係を実験結果と比較した<sup>129)</sup>。h1 と hh はフック形状系のものである。h1 は繊維端から 1mm 位置と 4mm 位置に曲線部がある。ここで繊維端から 1mm 位置までの直線部を耳と呼ぶ。hh は h1 の繊維端から 2.5mm 位置で切断することで作成した。耳はなく曲線部は繊維端から 1.5mm 位置に 1 箇所である。wL0, wL0a, wL0b, wL0c は波形形状系のものであり、wL0 は波高 0.35mm の山が 2 つある。wL0 を切断することで作

成した wL0a, wL0b, wL0c はそれぞれ山が 1.5, 1, 0.5 ある形状になる。これらの繊維について表 4-7 に示す材料定数を用いて計算した結果との比較をしたのが図 4-60 である。これらの繊維は、全て埋め込み長が 20mm である。

モデルでは、繊維の引抜き抵抗を付着項、摩擦項、変形項の 3 項で評価している。形状によらない付着項と、形状を反映する摩擦項と変形項の和として引抜き抵抗が与えられ、今回用いた形状においては後者が支配的な大きさとなっている。初期剛性は付着が破壊される時点でピークを迎え、一度荷重低下が起こる。その後は付着項の残留強度と、摩擦項と変形項により抵抗が生じ、全体のピークを迎える。

モデル計算の結果では、繊維が経路の曲率変化点を通過する度に荷重が大きく低下し、結果として曲率変化点の数だけ階段上の変化を示す。実験においても、荷重-変位曲線が階段状の変化に近い結果となっている。曲率変化点を 1 点とせず曲率が連続的な変化をする形状を考慮すれば、より実験に近い結果が得られると考えられる。

耳がない形状においては、引抜き変位が曲線長に達する前までは荷重が高く、その後は低い値を保つ。すなわち、繊維が曲線経路を抜ける際に大きな引抜き抵抗を発現しており、その後繊維が直線経路を抜けている状態では抵抗は小さい。曲線形状部が引き伸ばされて、直線経路を通過する際には抵抗が小さくなっているためである。

全体的に、波形形状系においては波数の影響がモデルによりよく表されている。一方、フック形状系は後半で過小評価になっている。これは繊維端から 4mm の部分が繊維軸に対して大きく傾いており、引抜き後の観察でもこの部分が完全に直線に引き伸ばされていないことから、曲線経路を通過した後も直線経路に引っかかりながら引き抜かれているためと考えられる。

表 4-6 繊維形状

名称	写真	模式図 数字は端部からの長さ (mm)	波高 (mm)
h1			1.8
hh			0.9
wL0			0.35
wL0a			0.35
wL0b			0.35
wL0c			0.35

表 4-7 材料定数

$\tau_{\max}$ (MPa)	$\tau_{\lim}$	$\delta_{0\tau}$ (mm)	$\alpha_{\tau}$	$f_{\max}$ (MPa)	$f_{\lim}$	$\delta_{0f}$ (mm)	$\alpha_f$	$\delta_{0M}$ (mm)
4.2	0.28	0.1	0.3	0.5	0.2	1	0.3	1

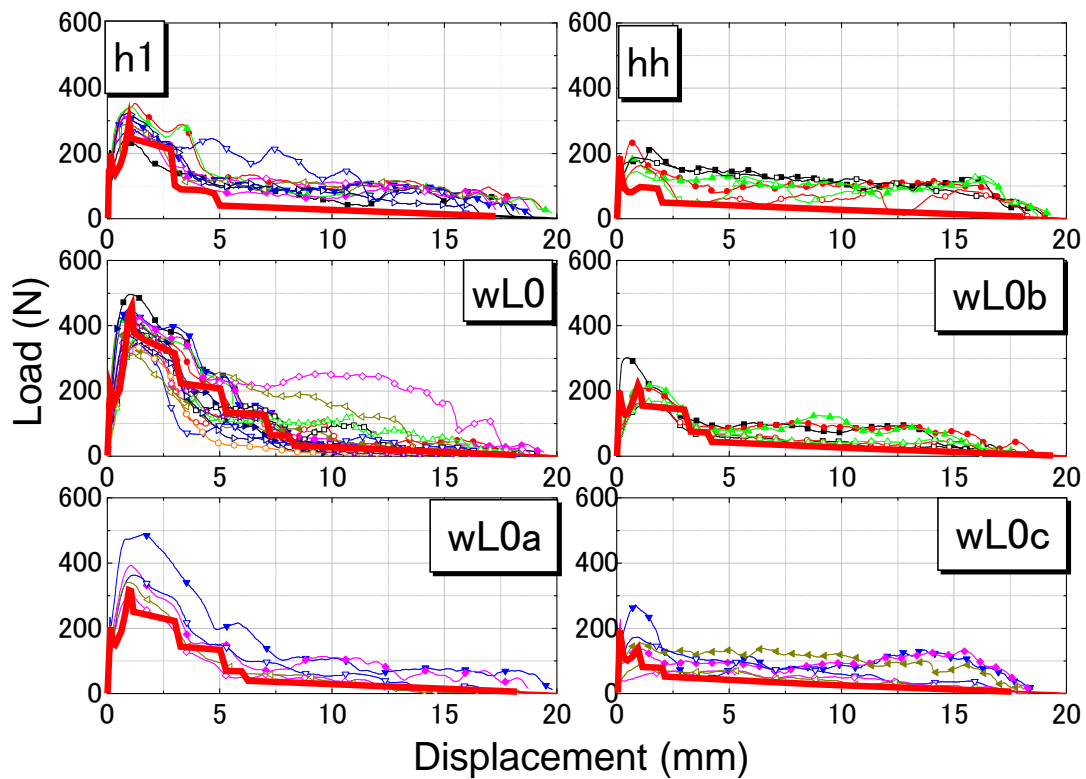


図 4-60 単繊維の引抜き荷重－変位関係

#### 4.7.4 ひび割れ架橋応力－開口幅関係（架橋則）

架橋応力は、これまでの節と同様に、個々の繊維の伝達力を配置と配向の分布を考慮した次式の積分をすることで得られる。

$$\sigma = V_f \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{z=0}^{(L_f/2)\cos\phi} \frac{P(\delta, l, \phi)}{\pi \left(\frac{d_f}{2}\right)^2} p(\phi)p(z) dz d\phi \quad (4-222)$$

ただし、本節では単繊維の引抜き荷重－開口幅関係が数値的に得られているため、架橋応力の算出も数値的に行うことになる。ここでは、繊維補強コンクリートを対象として、繊維架橋応力と骨材架橋応力とを足し合わせた架橋則について以下に示す。

骨材架橋応力にはいくつものモデルが提案されているが、ここでは次式のモデルを用いる<sup>130)</sup>。

$$\sigma_a = \frac{\sigma_m^u}{1 + \left(\frac{w}{w_0}\right)^p} \quad (4-223)$$

ここに、 $\sigma_a$ =骨材架橋応力、 $\sigma_m^u$ =最大骨材架橋応力、 $w$ =開口幅、 $w_0$ =骨材架橋応力が半分になるときの開口幅、 $p$ =軟化パラメータであり、一部  $Li$  らの値<sup>131)</sup>を用いている ( $\sigma_m^u=4\text{MPa}$ ,  $w_0=0.015\text{mm}$ ,  $p=1.2$ )。

また、繊維の埋め込み角度が引抜き荷重に及ぼす効果については、これまでの節で用いてきたスナッピングによる荷重増加あり ( $f=0.5$ ) と荷重増加なし ( $f=0$ ) に加えて、スナッピングによる繊維埋め込み部のモルタル破壊による荷重減少についても検討した。ここでは次式を用いて検討している。

$$P(\delta, \phi) = P(\delta, 0) \cos(\phi) \quad (4-224)$$

以上を用いて得られたひび割れ架橋応力-開口幅関係を図 4-61 に示す。非直線形状が架橋応力に与える要因として、繊維の破断と曲線部の位置について以下に検討する。

繊維の破断は繊維軸応力が破断強度に達した時点で生じると仮定している。単繊維の引抜き荷重-開口幅関係は埋め込み角度が 0 度の場合について上述してきたが、複合材料中では埋め込み角度はランダムに分布すると仮定しており、0 度でない場合も当然ある。この場合にはスナッピングによる荷重増加により繊維軸応力が増加し、0 度では破断しなかった埋め込み長の単繊維であっても破断する可能性が増える。破断した繊維は式(4-222)の積分において以後考慮しないため、破断までは架橋応力が上昇するもの、その後急減する挙動を示す。これは図 4-61 の荷重増加あり ( $f=0.5$ ) の  $wL0$  において顕著に見られる。他の形状においては、荷重減少から荷重増加までの 3 ケースにおいて破断による応力急減挙動は見られない。

曲線部の位置はひび割れ面との相対的な位置関係によりその効果が決まる。図 4-62 に示すのは  $wM0$  と  $wM9$  (表 4-8) の単繊維引抜き荷重-変位関係である。 $wM9$  の曲線部は繊維端部より 9mm 繊維中点側に位置している。ここでは耳が 9mm あると呼ぶ。繊維の埋め込み長はランダムに分布すると仮定しているため、ひび割れ面が 9mm の耳の範囲内にある場合には、この曲線部は全く効果を発揮せずに単なる直線形状繊維の引抜きと同等になってしまう。一方で埋め込み長が 9mm を超える場合には、引抜き時に耳が曲線部を通り抜ける際の塑性変形が生じる。図 4-63 は図 4-62 の単繊維の引抜き荷重-変位関係を積分して求めたひび割れ架橋応力-開口幅関係である。 $wM0$  は 1mm 付近で最大値を示して減少していくのに対して、 $wM9$  は 1mm 付近の最大値の後 9mm あたりまで、なだらかに減少する挙動が示されている。これは  $wM0$  は引抜き初期に曲線部の通り抜けが完了してしまうのに対して、 $wM9$  は引抜き初期のみならず耳が曲線部を通り抜けるまで塑性変形が継続されるためである。



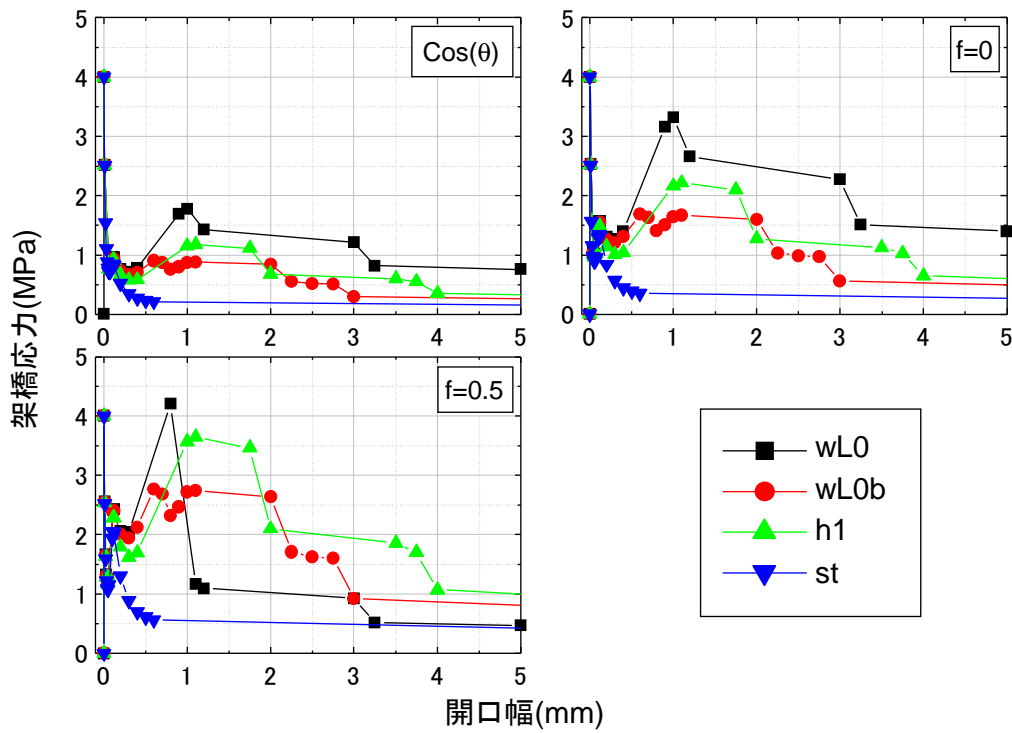
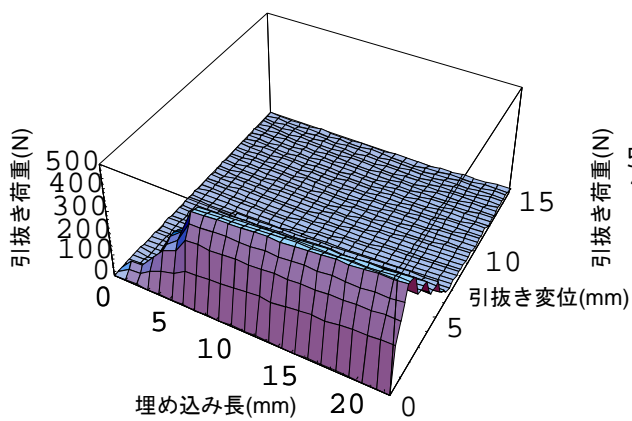


図 4-61 各種形状の繊維のひび割れ架橋応力-開口幅関係

表 4-8 繊維形状

名称	写真	模式図 数字は端部からの長さ (mm)	波高 (mm)
wM0			0.26
wM9			0.26

wM0



wM9

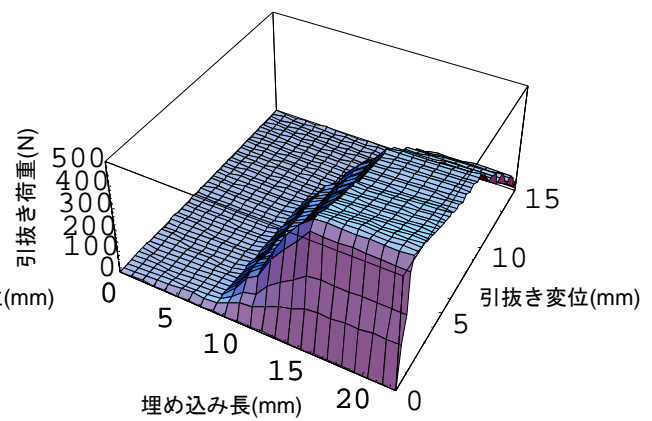


図 4-62 曲線部の位置が異なる単繊維の引抜き荷重—変位関係

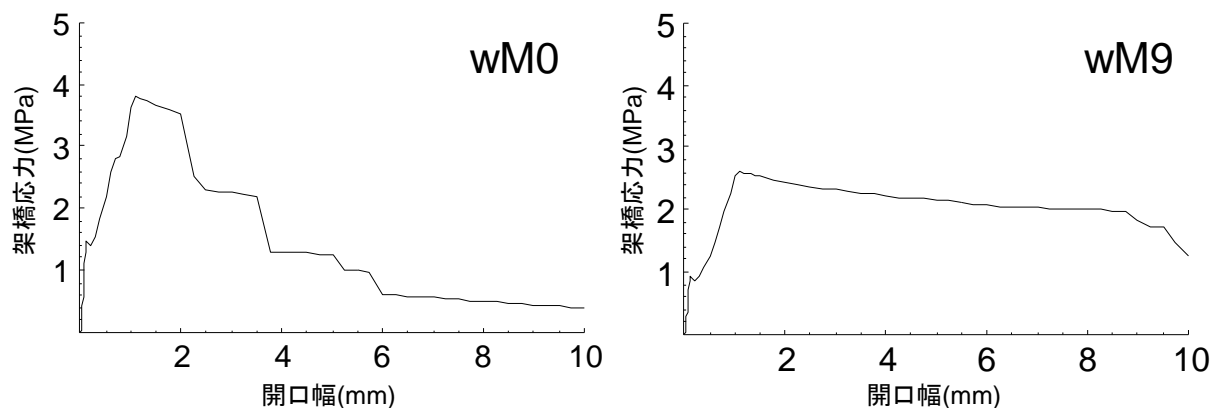


図 4-63 曲線部の位置が異なる繊維のひび割れ架橋応力—開口幅関係

## 4.8 まとめ

本章では、短繊維補強セメント系複合材料の引張挙動について述べ、様々なひび割れ架橋応力—開口幅関係（架橋則）のモデルについて述べた。

まず、短繊維補強セメント系複合材料の引張挙動において基本となる繊維引抜きモデル（Fiber Pullout Model, FPM）に始まり、繊維引抜き破断モデル（Fiber Pullout Rupture Model, FPRM）、すべり依存摩擦付着を考慮した繊維引抜きモデル（Slip-Hardening Fiber Pullout Model, SHFPM）について説明し、繊維引抜き破断モデル（Fiber Pullout Rupture Model, FPRM）における界面付着と繊維強度について考慮したモデルを紹介した。そして、最後に非直線形状繊維の引抜き破断モデルについて、数値的なモデルを紹介した。

これらのモデルでは、単繊維の引抜き荷重—開口幅関係（ $P(\delta)$ ）を導き、ひび割れ架橋応力—開口幅関係（架橋則、 $\sigma(\delta)$ ）を導いている。また、架橋則を用いて複合材料の引張強度と破壊エネルギーを評価することも可能である。架橋則は、繊維、母材、繊維—母材間界面に関する微視的な材料定数によって記述されており、解析解が得られる場合には、微視的な構造が材料特性に及ぼす影響を陽な形で評価できることが特徴である。いずれのモデルにおいても、実際の複合材料における支配的な機構に基づいて、モデルの仮定条件が適切であるものを選択することが必要である。

引張荷重下における架橋則は、部材が曲げ、せん断、圧縮荷重下にあっても、局所的にみたひび割れが引張荷重下にある場合の構成則として用いられる。次章では短繊維補強セメント系複合材料の曲げ特性に対する架橋則の影響について述べる。

## 参 考 文 献

- 106) Li, V. C., "Post-Crack Scaling Relations for Fiber-Reinforced Cementitious Composites", *Journal of Materials in Civil Engineering*, ASCE, Vol. 4, No. 1, pp. 41-57, 1992.
- 107) Wang, Y., Li, V. C., and Backer, S., "Modelling of Fiber Pull-out from a Cement matrix", *The International Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete*, Vol. 10, No. 3, pp. 143-149, 1988.
- 108) Li, V. C., and Wang, Y., and Backer, S., "Effect of Inclining Angle, Bundling, and Surface Treatment on Synthetic Fiber Pull-Out from a Cement Matrix", *Composites*, Vol. 21, 2, pp. 132-140, 1990.
- 109) Li, V. C., Wu, H. C. and Chan, Y. W., "Effect of Plasma Treatment of Polyethylene Fibers on Interface and Cementitious Composite Properties", *Journal of American Ceramic Society*, Vol. 79, No. 3, pp. 700-704, 1996.
- 110) 清田雅量・三橋博三・閑田徹志・川又篤, "セメント系複合材料における繊維の付着特性に関する基礎的研究", *コンクリート工学年次論文集*, Vol. 23, No. 2, pp. 187-192, 2001.
- 111) Maalej, M., Li, V. C., and Hashida, T., "Effect of Fiber Rupture on Tensile Properties of Short Fiber Composites", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 121, No. 8, pp. 903-913, 1995.
- 112) Li, V. C., Wang, Y., and Backer, S., "A Micromechanical Model of Tension Softening and Bridging Toughening of Short Random Fiber Reinforced Brittle Matrix Composites", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 39, No. 5, pp. 607-625, 1991.
- 113) Shao, Y., Li, Z., and Shah, S. P., "Matrix Cracking and Interface Debonding in Fiber-reinforced Cement-matrix Composites", *Advanced Cement Based Materials*, Vol. 1, No. 2, pp. 55-66, 1993.
- 114) Wang, Y., Li, V. C., and Backer, S., "Modelling of Fibre Pull-out from a Cement Matrix", *International Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete*, Vol. 10, No. 3, pp. 143-149, 1988.
- 115) Lin, Z. and Li, V. C., "Crack Bridging in Fiber Reinforced Cementitious Composites with Slip-hardening Interfaces", *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 45, No. 5, pp. 763-787, 1997.
- 116) Bao, G. and Song, Y., "Crack Bridging Models for Fiber Composites with Degraded Interfaces", *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 41, pp. 1425-1444, 1993.
- 117) Cox, H. L., "The Elasticity and Strength of Paper and Other Fibrous Materials", *British Journal of Applied Physics*, Vol. 3, pp. 72-79, 1952.

- 118) Kelly, A. and Macmillan, N. H., "Strong Solids", Oxford Science Publications, p. 263, 1986.
- 119) Leung, C. K. Y. and Li, V. C., "New Strength-based Model for the Debonding of Discontinuous Fibres in an Elastic Matrix", Journal of Materials Science, Vol. 26, pp. 5996-6010, 1991.
- 120) Leung, C. K. Y. and Li, V. C., "Applications of a Two-way Debonding Theory to Short Fibre Composites", Composites, Vol. 21, No. 4, pp. 305-317, 1990.
- 121) Budiansky, B., Hutchinson, J.W., and Evans, A. G., "Matrix Fracture in Fiber-Reinforced Ceramics", Journal of Mechanics and Physics of Solids, Vo. 34, No. 2, pp. 167-189, 1986.
- 122) Lin, Z., Kanda, T., and Li, V. C., "On Interface Property Characterization and Performance of Fiber-Reinforced Cementitious Composites", Concrete Science and Engineering, Vol. 1, No. 3, pp. 173-184, 1999.
- 123) Lin, Z. and Li, V. C., "Crack Bridging in Fiber Reinforced Cementitious Composites with Slip-Hardening Interfaces", Journal of Mechanics and Physics of Solids, Vol. 45, No. 5, pp. 763-787, 1997.
- 124) Kanda, T. and Li, V. C., "Interface Property and Apparent Strength of a High Strength Hydrophillic Fiber in Cement Matrix", Journal of Materials in Civil Engineering, ASCE, Vol. 10, No. 1, pp. 5-13, 1998.
- 125) Li, V. C. and Stang, H., "Interface Property Characterization and Strengthening Mechanisms in Fiber Reinforced Cement Based Composites", Advanced Cement Based Materials, Vol. 6, No. 1, pp. 1-20, 1997.
- 126) Gao, Y. C., Mai, Y. W., and Cotterell, B., "Fracture of Fiber-Reinforced Materials", Journal of Applied Mathematics and Physics, Vol. 39, pp. 550-558, 1988.
- 127) Katz, A. and Li, V. C., "A Special Technique for Determining the Bond Strength of Carbon Fibers in Cement Matrix by Pullout Test", Journal of Materials Science Letters, Vol. 15, pp. 1821-1823, 1996.
- 128) Ghanvillard, G., "Modeling the Pullout of Wire-drawn Steel Fibers", Cement and Concrete Research, Vol. 29, pp. 1027-1037, 1999.
- 129) 川崎紘誉・松本高志：単繊維引抜け挙動における鋼繊維形状の影響，年次学術講演会講演概要集，土木学会， Vol. 57, pp. 1007-1008, 2002.
- 130) Stang, H., "Evaluation of Properties of Cementitious Materials", Proceedings of International RILEM/ACI Workshop, Spon, pp. 388-406, 1992.
- 131) Li, V. C., Stang, H., and Krenchel, H., "Micromechanics of Crack Bridging in Fibre-reinforced Concrete", Materials and Structures, Vol. 26, pp. 486-494, 1993.
- 132) Sumitro, S. and Tsubaki, T., "Micromechanical Fiber Pullout Model for Steel Fiber Reinforced Concrete", Journal of Materials, Concrete Structures and Pavements, JSCE, No. 599/V-40, pp. 155-163,

1998.