

3. 破壊力学の基礎



初期欠陥や切り欠き先端には応力集中によるひび割れが発生し，進展して破壊に至る．

写真はコンクリート供試体の切り欠きから進展したひび割れ．

3.1 はじめに

この章では，破壊力学の基礎について述べていく．破壊力学の歴史を見ると，その発展は事故と切っても切り離せない関係にある．まず，3.1 節では代表的な 2 つの事故事例を取り上げ，破壊と疲労の重要性について述べる．3.2 節では，線形弾性体を対象とした線形破壊力学について述べる．まず，ひび割れ先端の応力場における応力拡大係数について説明し，次に，破壊のエネルギーバランスからエネルギー解放率について説明する．破壊規準は応力拡大係数とエネルギー解放率のそれぞれについて定義される．加えて，ひび割れ進展の安定性と応力拡大係数の重ね合わせの原理について触れる．3.3 節では，非線形破壊力学について述べる．まず，弾塑性体として降伏を起こす金属材料の塑性域補正と，結合力を生じる複合材料の応力拡大係数の評価について説明する．最後に弾塑性体に対するエネルギー解放率として J 積分を導入し，その特徴と適用例を示す．3.4 節は疲労破壊について述べる．応力による方法と破壊力学による方法について説明し，各種材料の疲労特性についても触れる．

3.1.1 リバティシップ：脆性破壊

第2次世界大戦中にアメリカは、戦時標準船としてリバティシップと呼ばれる規格型輸送船を大量に建造した。リバティシップは輸送船として戦時需要に応えるべくブロック工法により短期間で大量に建造され、技術的にはリベット接合に代わり当時としては新しい技術である溶接により鋼板の接合を行った全溶接船であった。

リバティシップは 2,500 隻に達する数が建造され戦時輸送を支える活躍をしたが、そのうち 145 隻の船体が真っ二つに折れ、約 700 隻に深刻な損傷が生じるという非常に重大な事故が生じた。また、船体の破壊は、港での停泊中や穏やかな海上など荷重が大きいとは思えない条件でも生じたことから、その原因は当時の知見では説明不可能であった。図 3-1 左はリバティシップの破壊状況である。同図右は同様に戦時需要に応じて規格建造された T2 タンカー「スケネクタディー」であり、事故が停泊中に起こったため次のように状況が詳しく報告されている¹⁵⁾。

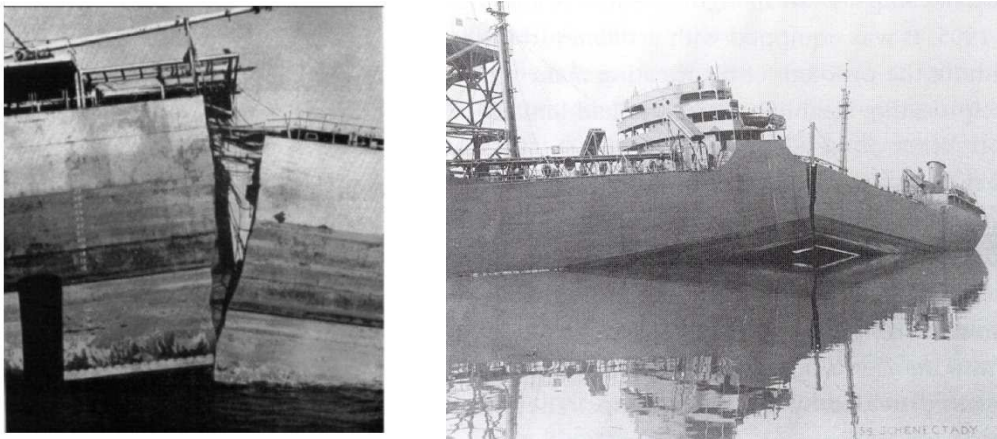


図 3-1 リバティシップ (左)¹⁴⁾，T2 タンカー (右)¹⁵⁾

1943 年 1 月 16 日午後 11 時、試験航海を終えて数日後のことだった。アメリカのオレゴン州ポートランドの造船所で艀装岸壁へ係留中に、全長 152m の T2 タンカー「スケネクタディー」が船体中央部より突然真っ二つに破壊した。港の水温は約 4℃、海は穏やかだった。気温は約 -3℃で、風は微風であった。事故は突然起こり、1 マイル離れたところでもその轟音が聞こえた。

スケネクタディーはカイザー社により建造された。こうした大惨事が初めてのものではあったとともに、穏やかな港で起こったことがさらなる関心を呼んだ。破壊は隔壁間の甲板より生じていた。設計詳細上、応力集中が生じる箇所に溶接欠陥が存在していた。事故調査委員会により、溶接方法の不備が指摘された。しかしながら、当時では、破壊原因は十分に解明されなかった。

こうした事故において塑性変形はほとんど生じておらず、破壊は非常に脆性的であった。延性的であるはずの鋼が、脆性的に破壊することは当時の知見では説明不可能であった。

事故の原因として、鋼の脆性破壊が低温環境と切り欠きや欠陥周辺の三軸応力状態により起こりやすくなることが明らかにされた。室温環境において伸び変形を生じてから破壊する鋼も、低温環境においては、破壊に必要とするエネルギーが低下し、変形よりも破壊を生じるようになる。こうした挙動の変化が見られる温度を延性－脆性遷移温度と呼び、低温下で鋼が脆くなる現象を低温脆性と呼ぶ。また、切り欠きや欠陥周辺の三軸応力状態は塑性変形を拘束し、塑性変形ではなく破壊を生じさせることも明らかにされた。また、一度発生したひび割れの進展を抑制する構造を有していなかったことが、真っ二つに破壊するという衝撃的な現象を生むことにもなった。

こうした知見に基づき以後の設計・建造では、遷移温度が十分に低い材料を用い、切り欠きや欠陥を極力取り除き、ひび割れ進展を抑制するアレスターを設けることが行われた。リバティシップの事故は衝撃的であり、従来の知見では説明不可能な現象であったが、その失敗を活かし教訓を学び取って、結果として破壊力学を大きく進展させたという意味で、工学分野における重要な歴史的事故である。

なお、この節の記述は多くを参考文献 16) によった。

3.1.2 日本航空 123 便墜落事故：疲労破壊

1985 年 8 月 12 日、羽田空港発伊丹空港行き日本航空 123 便（ボーイング 747SR-100）が、群馬県上野村の山中に墜落した。乗員乗客 524 名のうち 520 名が亡くなる単独の航空機事故としては世界航空史上最悪の事故である。

この墜落事故の原因は、機体後部の圧力隔壁の金属疲労とされている（図 3-2(a) (b)）。羽田空港を離陸してから 12 分後、高度 7200m に達した時に、後部圧力隔壁が突如破壊した。これにより、垂直尾翼が吹き飛ばされるとともに、油圧操縦システムが全 4 系統とも機能しなくなり、昇降舵や補助翼も使用不能になった。ゆえに、エンジンを使うことは出来たが、操縦は非常に困難なものとなり、山岳地帯上空を迷走した果てに、同機は離陸約 1 時間後に墜落した。

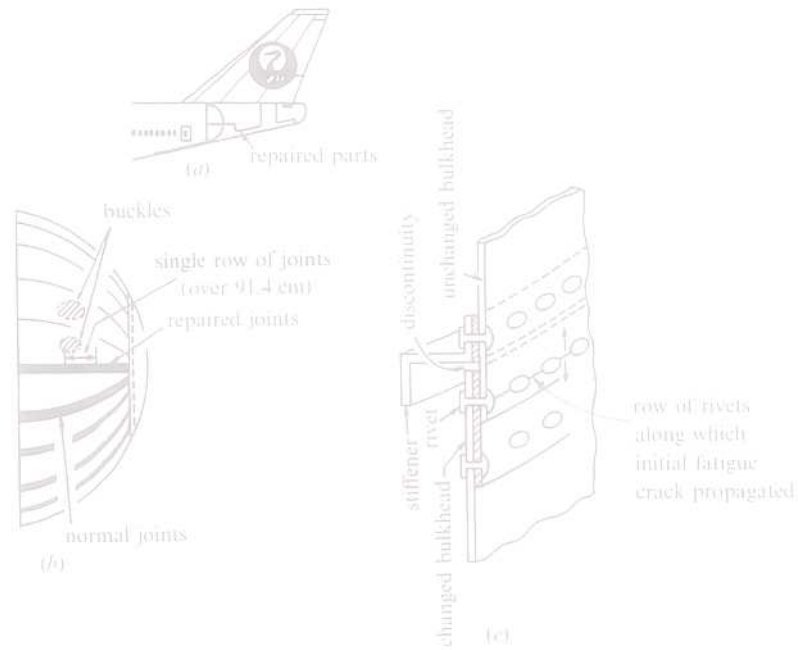


Fig. 10.14. Details of the geometry of the rear pressure bulkhead of the crashed Boeing 747 SR aircraft. (After Kobayashi, 1987.)

図 3-2 (a)機体後部, (b)圧力隔壁, (c)修理後の接合¹⁶⁾

航空機においては疲労に対する設計が非常に重要である。高高度においては、客室にかかる与圧が機体にたいする荷重となり、この荷重は離陸と着陸を繰り返すたびに作用する疲労荷重となる。このことは、ジェット旅客機として世界で初めて定期運行に用いられたデハビランド 106 コメットが空中分解する事故が連続して起きた 1950 年代に初めて知られるようになった。コメットの事故を受けて行われた実験により、与圧による繰返し荷重が作用すると、四角形の客室窓の角部からひび割れが発生し、疲労荷重の繰返しによるひび割れ進展を経て、疲労破壊に至ることが確認された。それ以来、角があるような窓は絶対に設計されないようになった。また、疲労荷重に対する設計は絶対不可欠のものとして行われている。

では、なぜ、日本航空 123 便の墜落事故は起こったのだろうか？そこには、圧力隔壁の疲労破壊につながる原因として、当該機が 1978 年に伊丹空港で着陸時に起こしたしりもち事故とその際の不適切な修理がある。

圧力隔壁は半球状のドーム構造であり、ドームを形作る 18 のウェブ、ドームを同心円状に支える 4 つのストラップ、放射線状に支える 36 のスティフナーとこれらの間のショートスティフナーから構成されている (図 3-3)。これらは全てリベット接合されている。上半部ウェブ、下半部ウェブ、ストラップはそれぞれ 0.8mm, 0.9mm, 1.0mm 厚の 2024-T42 クラッドアルミニウム合金であり、スティフナーとショートスティフナーは、それぞれ 2.4mm と 1.0mm 厚の 2042-T42 アルミニウム合金、そしてリベットは 2017-T3 アルミニウム合金である。

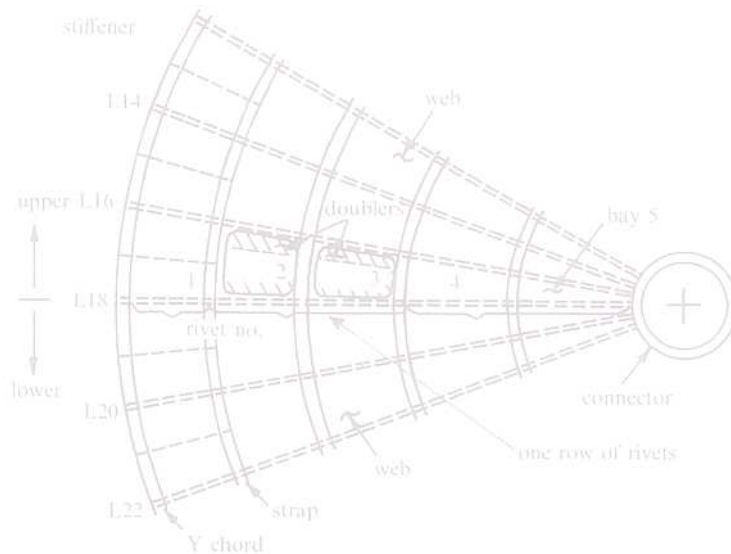


Fig. 10.15. Details of the left side of the rear pressure bulkhead. (After Kobayashi, 1987, and Kobayashi, Arai & Nakamura, 1987.)

図 3-3 圧力隔壁詳細図¹⁶⁾

この圧力隔壁は、しりもち事故での損傷のため、下半分を取替えて接合するという修理がなされた。その際、図 3-2(b)と図 3-3 に示す L18 列の 91.4cm の長さに渡って、図 3-2(c)に示すように接合がなされた。この接合によると荷重は 1 列のリベットにより伝達されることになり、リベット穴に力が集中することとなる。同機体はしりもち事故の修理後より墜落まで、12,319 回の飛行回数（16,196 飛行時間、約 6 回／日）を経ており、この間の与圧による疲労荷重繰返しによりリベット穴よりひび割れが発生・進展し、最終的には同列のリベット穴がつながることで圧力隔壁の破壊に至ったものと考えられている。

墜落事故後に、圧力隔壁の破壊面の分析が行われ、L18 列の不適切な接合部分（リベット穴 35 番から 55 番の間）には疲労によるひび割れ進展が集中して見られることが明らかにされた（図 3-4）。金属材料の破壊面を走査型電子顕微鏡で観察すると、疲労によるひび割れの進展があった場合には、破壊面に進展方向と垂直に縞模様を見ることが出来る。この縞は疲労繰返し荷重の載荷と除荷に対応して形成されるものであり、疲労ひび割れ進展に特有のものである。図 3-5(a)は、リベット穴 34 番から 0.28mm 離れたところでの顕微鏡写真である。縞の間隔は 0.23 μm であり、これは 2024 アルミニウム合金においては、応力拡大係数振幅 ΔK で 10~15 $\text{MPa m}^{1/2}$ に相当する。図 3-5(b)は、同じ穴から 3.05mm 離れたところでの写真である。縞の間隔がより広がっていることが見てとれるが、これは、荷重繰返し 1 回あたりのひび割れ進展長が長くなっていることを意味する。

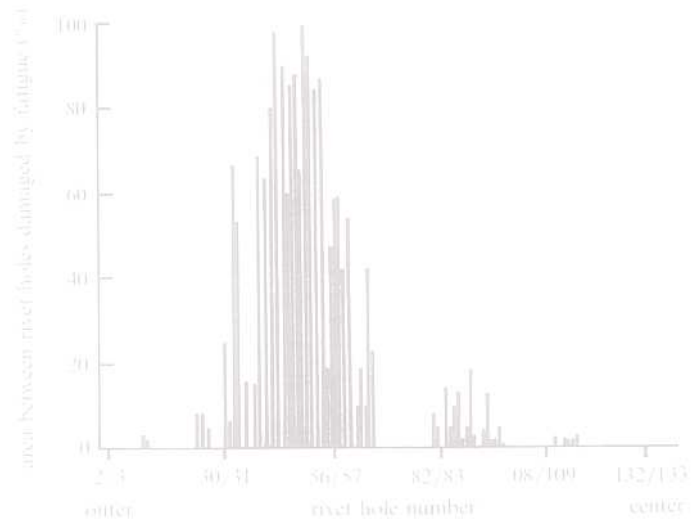


Fig. 10.16. A plot of the fractional area between rivet holes which had undergone failure by fatigue versus the designation number of the rivet holes along row L18. (After Kobayashi, 1987.)

図 3-4 破壊面での疲労損傷度¹⁶⁾





Fig. 10.17. Scanning electron fractographs showing fatigue striation markings near rivet hole 34 along the F18 row. (a) Fatigue fracture surface at about 0.28 mm from the rivet hole. (b) Fatigue fracture surface at about 3.05 mm from the rivet hole. (From Final Report of the JAL Boeing Crash, The Japan Ministry of Transportation, Tokyo, 1987. Photos courtesy of H. Kobayashi, Tokyo Institute of Technology.)

図 3-5 疲労ひび割れ進展による破壊面の縞模様¹⁶⁾ (a)リベット穴 34 番から 0.28mm 離れた位置, (b)同じ穴から 3.05mm 離れた位置

疲労破壊は、航空機のみならず、疲労繰返し荷重を受ける自動車、鉄道、機械などにおいて重要な検討項目である。また、社会基盤分野においても、重交通荷重を受ける鋼橋梁もしくはコンクリート橋梁においては、疲労損傷が問題となっており、疲労に対する検討は不可欠である。破壊力学は、前節で紹介したリバティシップの脆性破壊と本節で触れたコメットの疲労破壊から学び、大きく発展した。現在では破壊と疲労について十分な知見が蓄積されていると言えるが、不適切な設計や維持管理により大惨事は容易に起こりうることをこの墜落事故は示している。

なお、この節の記述は多くを参考文献 16) によった。

3.2 線形破壊力学

本節では、線形破壊力学（Linear Elastic Fracture Mechanics, LEFM）について述べていく。線形破壊力学では、線形弾性体におけるひび割れ問題を扱う。特に断らない限り、線形弾性体の強度は無有限大とする。以下では、弾性体と呼ぶ。

3.2.1 円孔周辺の応力場

弾性体中の円孔周辺の応力場とその特徴について述べる。今、下図に示すように、円孔を有する無限大の大きさの弾性体が無限遠で一様な引張応力下にある。その引張応力を S で表したとき、この円孔周辺の応力場は、次の式によって表される。

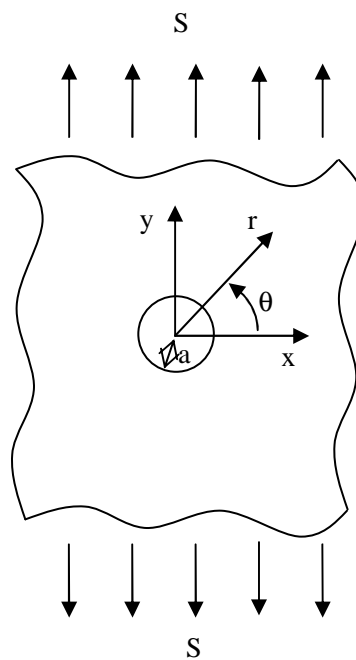


図 3-6 一様引張応力下の円孔を有する無限弾性体

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= \frac{S}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{S \cos 2\theta}{2} \left(\frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} + 1 \right) \\
 \sigma_{r\theta} &= -\frac{S \sin 2\theta}{2} \left(\frac{3a^4}{r^4} - \frac{2a^2}{r^2} - 1 \right) \\
 \sigma_{\theta\theta} &= \frac{S}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{S \cos 2\theta}{2} \left(\frac{3a^4}{r^4} + 1 \right)
 \end{aligned} \tag{3-1}$$

であり、その他の応力については

$$\sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{zz} = 0 \quad (3-2)$$

である。最大引張応力は $(r, \theta) = (a, 0)$ で生じ、

$$\sigma_{\theta\theta} = 3S \quad (3-3)$$

となる。このように、円孔があることで、無限遠での一様な引張応力よりも大きな引張応力が局所的に生じていることが観察される。一様な引張応力 S に対する最大引張応力の比を応力集中係数 (Stress Concentration Factor) と呼ぶ。この問題の場合、応力集中係数は 3 である。よって、このような条件下にあるボルト穴の周辺では与えられた一様な引張応力の 3 倍の応力が生じていることを考慮して設計を行わなければならない。応力集中係数は様々な問題について得られており、例えば Peterson などにまとめられている¹⁶⁾。

応力場の特徴について述べる。まず、円孔より x 軸に沿って y 方向応力と x 方向応力を見る。 y 方向応力は円孔側面で最大引張応力 $3S$ が生じ、円孔から離れるにつれて減少し、無限遠での引張応力 S へと近づいていく。 x 方向応力は円孔側面でゼロであるが、一旦増加し、円孔から離れるにつれて再びゼロへと近づく。円孔より y 軸に沿って見ると、 y 方向応力は側面でゼロであり、離れるにつれて S へと近づく。 x 方向応力は側面で圧縮応力 $-S$ が生じ、離れるにつれて正の値に転じる。

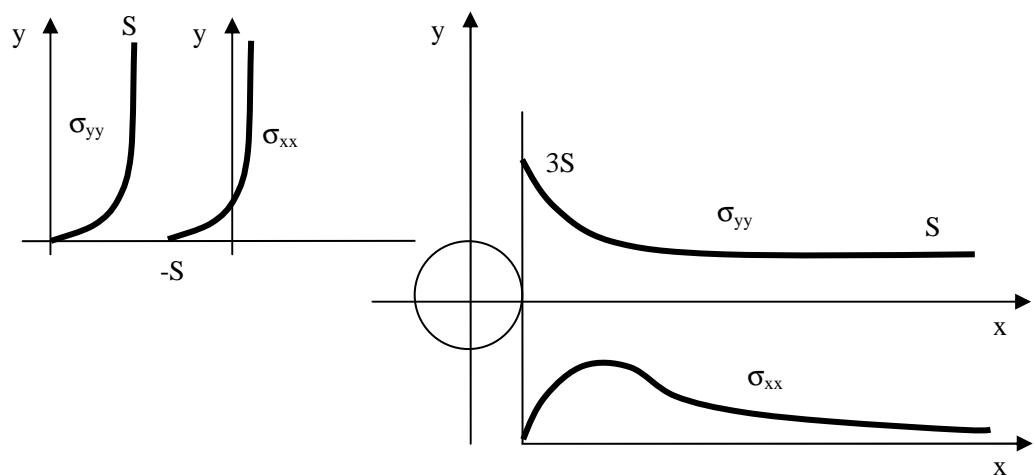


図 3-7 円孔周辺の応力場

なお、与えられた応力は y 方向のみなので、 y 軸上で x 方向応力を積分すると、力のつりあいにより次式が成り立つ。

$$F_x = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{xx} t dy = 0 \quad (3-4)$$

ここに、 t = 弾性体の厚さ.

また、線形弾性体であるため、圧縮応力下にある場合には応力の符号が変わるが大きさは同じである.

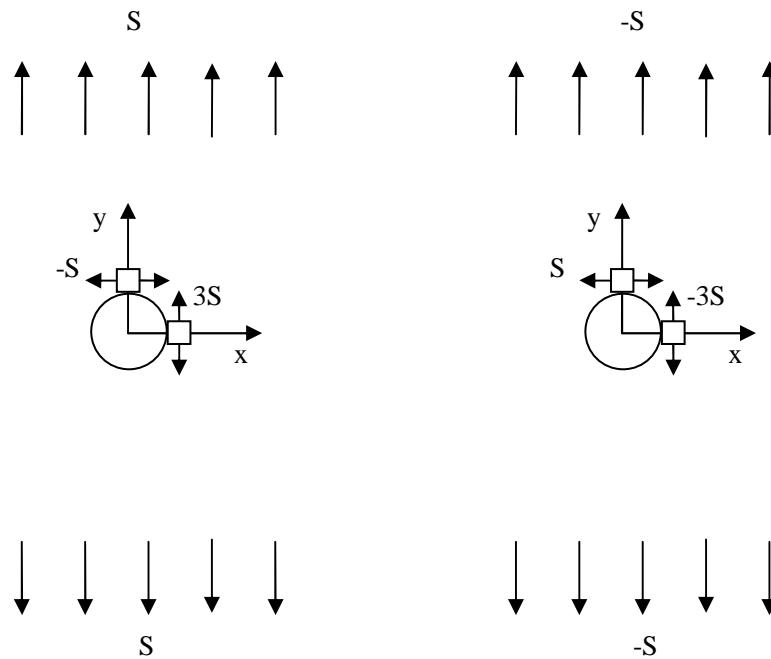


図 3-8 引張応力下の場合 (左) と圧縮応力下の場合 (右)

3.2.2 ひび割れ先端の応力場－応力による破壊へのアプローチ

次に、弾性体中のひび割れ周辺での応力場について述べ、応力の視点から破壊規準を考える。

破壊モード

破壊には、開口、面内せん断、面外せん断の 3 つのモードがあり、それぞれを、モード I、モード II、モード III と呼ぶ。破壊はいずれかのモードが卓越して生じる場合が多いが、混合モードで生じる場合もある。

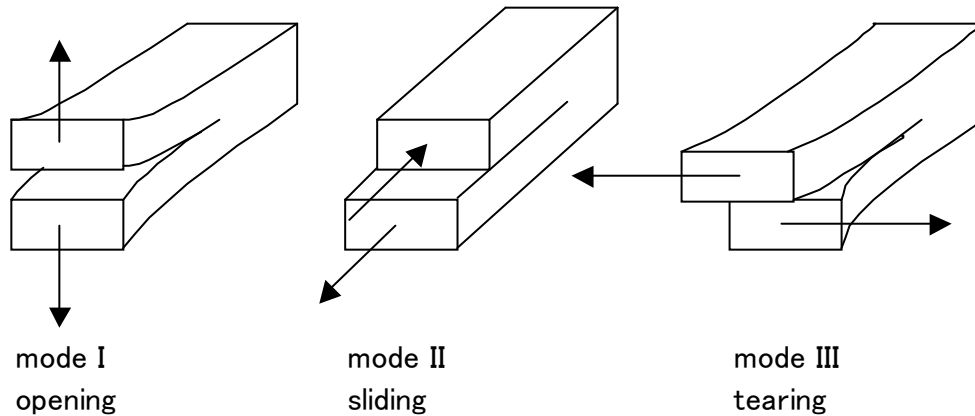


図 3-9 破壊モード

モード I は日常生活においても馴染み深い。割り箸を割るときには、多くの人がモード I で割るであろう。引張に弱い材料の破壊ではモード I が重要である。モード II は日常では見かけないが、地震を引き起こす断層の破壊はモード II である。また、構造物の補強目的で接着される繊維シートは、最終的にはモード II で剥離破壊する。モード III 破壊も日常でよく用いる。お菓子や醤油の袋を開くときには、モード III で破るであろう。構造物においては、飛行機などで見られる薄い部材において重要となる。社会基盤構造物におけるコンクリートや鋼、そして本書で取り扱う短繊維補強セメント系複合材料においては、破壊はモード I により起こるため、以後はモード I 破壊を主に取り上げる。

応力場

ひび割れ周辺での線型弾性応力場は簡潔な解析的表現で表される。モード I での式を下に示す。x-y 座標系と r- θ 座標系の二通りで示されている。

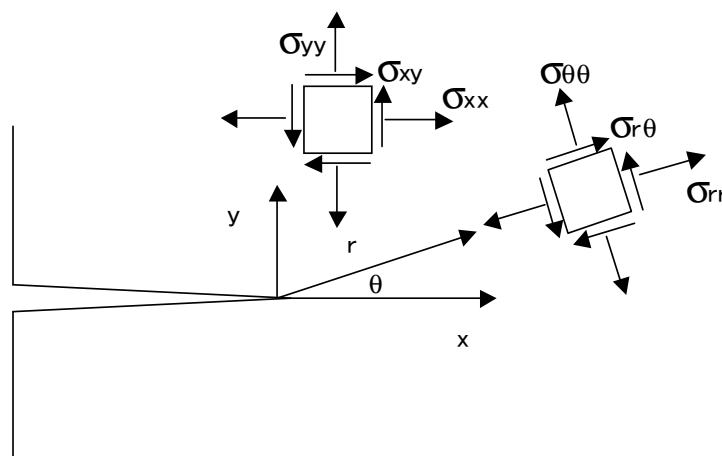


図 3-10 座標系

モード I において，応力は次式で表される．

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{cases} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{cases} \cos(\theta/2)[1 - \sin(\theta/2)\sin(3\theta/2)] \\ \cos(\theta/2)[1 + \sin(\theta/2)\sin(3\theta/2)] \\ \sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\cos(3\theta/2) \end{cases} \quad \text{x-y 座標系} \quad (3-5)$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{cases} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{cases} \cos(\theta/2)[1 + \sin^2(\theta/2)] \\ \cos^3(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)\cos^2(\theta/2) \end{cases} \quad \text{r-}\theta\text{座標系} \quad (3-6)$$

その他の応力は次式で表される．

$$\sigma_{zz} = \nu'(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \nu'(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}), \quad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0 \quad (3-7)$$

変位は次式で表される．

$$\begin{cases} u_x \\ u_y \end{cases} = \frac{K_I}{2E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{cases} (1+\nu)[(2\kappa-1)\cos(\theta/2) - \cos(3\theta/2)] \\ (1+\nu)[(2\kappa+1)\sin(\theta/2) - \sin(3\theta/2)] \end{cases} \quad \text{x-y 座標系} \quad (3-8)$$

$$\begin{cases} u_r \\ u_\theta \end{cases} = \frac{K_I}{2E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{cases} (1+\nu)[(2\kappa-1)\cos(\theta/2) - \cos(3\theta/2)] \\ (1+\nu)[-(2\kappa+1)\sin(\theta/2) + \sin(3\theta/2)] \end{cases} \quad \text{r-}\theta\text{座標系} \quad (3-9)$$

面外変位は次式で表される．

$$u_z = -(\nu''z/E)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -(\nu''z/E)(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \quad (3-10)$$

ここで， E はヤング率， ν はポアソン比である．また下記の定数にも注意する

$$\kappa = (3-\nu)/(1+\nu), \quad \nu' = 0, \quad \nu'' = \nu \quad (\text{平面応力}) \quad (3-11)$$

$$\kappa = (3-4\nu), \quad \nu' = \nu, \quad \nu'' = 0 \quad (\text{平面ひずみ}) \quad (3-12)$$

x 軸上の応力を考えると，

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3-13)$$

で表され、 σ_{xx} と σ_{yy} は K_I に比例し、 $r^{-1/2}$ の形となっている。つまり、ひび割れ先端に近づくにつれ無限大に発散し、ひび割れ先端から遠ざかるにつれ 0 に近づくことが分かる。応力が無限大に発散するひび割れ先端を特異点とも呼ぶ。ここでは、強度無限大の線形弾性体を仮定しているため、無限大の応力は許される。x 軸に沿って σ_{yy} を図示すると下図のようになる。円孔周辺の応力場と異なることが確認できる。

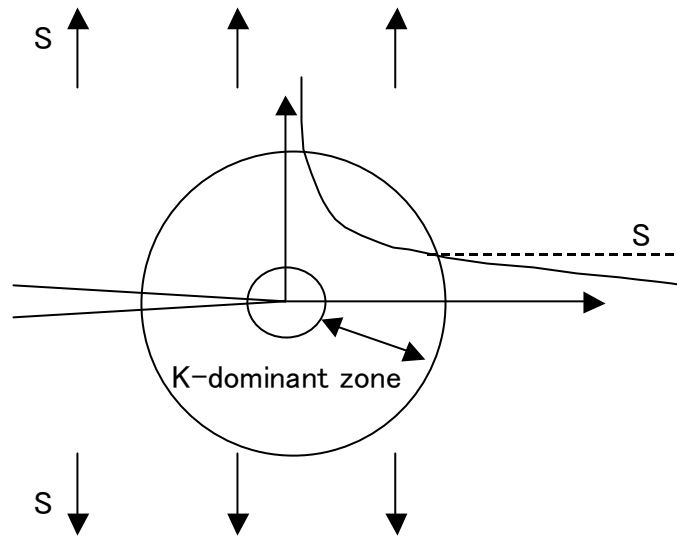


図 3-11 K-卓越領域

同様に、モード II において、応力は次式で表される。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin(\theta/2)[2 + \cos(\theta/2)\cos(3\theta/2)] \\ \sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\cos(3\theta/2) \\ \cos(\theta/2)[1 - \sin(\theta/2)\sin(3\theta/2)] \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{x-y 座標系} \\ (3-14) \end{matrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} \sin(\theta/2)[1 - 3\sin^2(\theta/2)] \\ -3\sin(\theta/2)\cos^2(\theta/2) \\ \cos(\theta/2)[1 - 3\sin^2(\theta/2)] \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{r-}\theta \text{座標系} \\ (3-15) \end{matrix}$$

$$\sigma_{zz} = \nu'(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \nu'(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}), \quad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0 \quad (3-16)$$

変位は次式で表される.

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{2E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} (1+\nu)[(2\kappa+3)\sin(\theta/2) + \sin(3\theta/2)] \\ -(1+\nu)[(2\kappa-3)\cos(\theta/2) + \cos(3\theta/2)] \end{Bmatrix} \quad \text{x-y 座標系} \quad (3-17)$$

$$\begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{2E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} (1+\nu)[-(2\kappa-1)\sin(\theta/2) + 3\sin(3\theta/2)] \\ (1+\nu)[-(2\kappa+1)\cos(\theta/2) + 3\cos(3\theta/2)] \end{Bmatrix} \quad \text{r-}\theta\text{座標系} \quad (3-18)$$

$$u_z = -(\nu''z/E)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -(\nu''z/E)(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}). \quad (3-19)$$

最後に、モード III において、応力は次式で表される.

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{r\theta} = 0, \quad (3-20)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{Bmatrix} \quad \text{x-y 座標系} \quad (3-21)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta z} \end{Bmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{Bmatrix} \quad \text{r-}\theta\text{座標系} \quad (3-22)$$

変位は次式で表される.

$$u_x = u_y = u_r = u_\theta = 0, \quad u_z = \frac{K_{III}}{2E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [2(1+\nu)\sin(\theta/2)] \quad (3-23)$$

応力拡大係数

上式の K (K_I , K_{II} , K_{III}) は応力拡大係数 (Stress Intensity Factor) と呼ばれ、ひび割れ周辺の局所場 (応力場と変位場) の強さを表している。局所場は K と r と θ の変数が分離した関数で表される。

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad \text{応力} \quad (3-24)$$

$$u_i = \frac{K}{2E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} f_i(\theta) \quad \text{変位} \quad (3-25)$$

応力拡大係数は荷重，ひび割れ形状，供試体形状の要因が組み合わさった関数で表される．引張荷重下にある無限体中のひび割れの K_I は次式で表される．

$$K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a} = (\text{荷重 } \sigma^\infty) \times (\text{ひび割れ形状 } \sqrt{\pi a}) \times (\text{供試体形状 } 1) \quad (3-26)$$

ここで，幅を有限 (=W) とした場合に K_I は次式で表される．

$$\begin{aligned} K_I &= \sigma^\infty \sqrt{\pi a} \left(\sec \frac{\pi a}{W} \right)^{1/2} \\ &= (\text{荷重 } \sigma^\infty) \times (\text{ひび割れ形状 } \sqrt{\pi a}) \times (\text{供試体形状 } \left(\sec \frac{\pi a}{W} \right)^{1/2}) \end{aligned} \quad (3-27)$$

また,引張荷重下にある半無限体中の切り欠きひび割れの K_I は次式で表される．

$$K_I = 1.1259 \sigma^\infty \sqrt{\pi a} = (\text{荷重 } \sigma^\infty) \times (\text{ひび割れ形状 } \sqrt{\pi a}) \times (\text{供試体形状 } 1.1259) \quad (3-28)$$

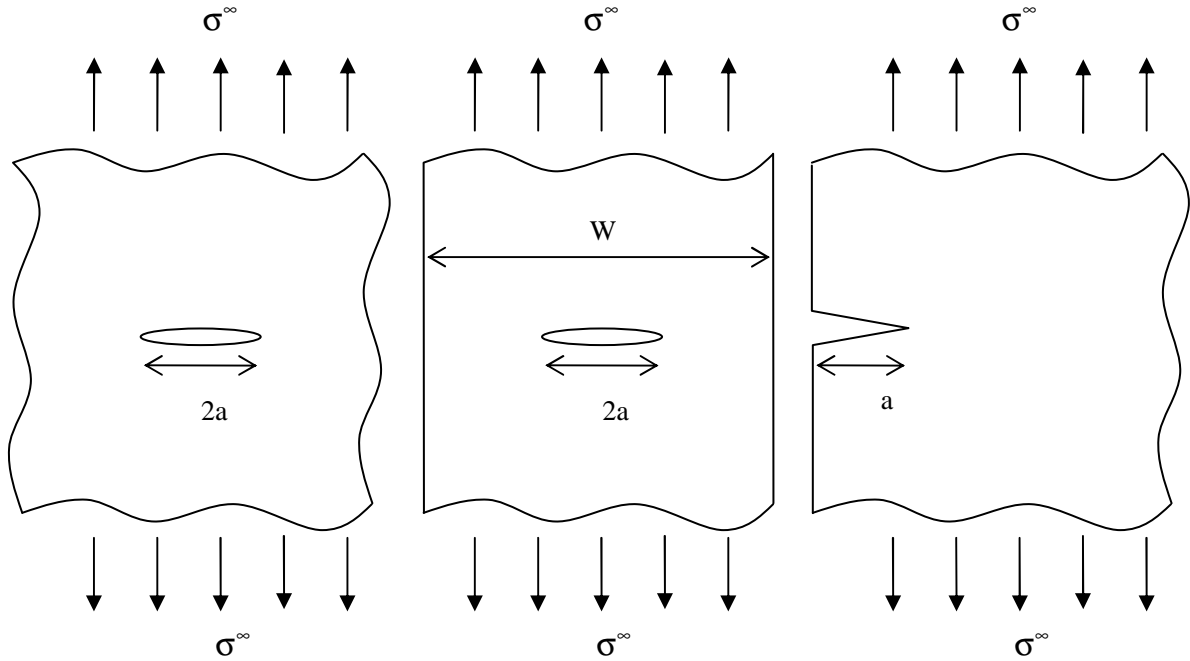


図 3-12 様々なひび割れ問題

下図に代表的な問題における応力拡大係数を示す。

応力場と変位場は距離 r と角度 θ を含むが、この部分は問題に依存しない。問題により変わるのは応力拡大係数 K のみである。よって、局所場の形状や特徴は、いかなるひび割れにおいても変わらず、強さ (Intensity) のみが応力拡大係数 (Stress Intensity Factor) を通して変わることになる。

TABLE 3.1
K for practical geometries

| | | |
|--|---|--|
| | $K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \left(\sec \frac{\pi a}{W} \right)^{1/2}$ $K_{II} = \tau\sqrt{\pi a} \left(\text{small } \frac{a}{W} \right)$ | |
| | $K_I = 1.12\sigma\sqrt{\pi a} \left(\text{small } \frac{a}{W} \right)$ <p>or $K_I = Y\sigma\sqrt{a}$</p> <p>with $Y = 1.99 - 0.41 \frac{a}{W} + 18.7 \left(\frac{a}{W} \right)^2 - 38.48 \left(\frac{a}{W} \right)^3 + 53.85 \left(\frac{a}{W} \right)^4$ $(1.99 - 1.12\sqrt{\pi})$</p> | |
| | $K_I = 1.12\sigma\sqrt{\pi a} \left(\text{small } \frac{a}{W} \right)$ <p>or $K_I = Y\sigma\sqrt{a}$</p> <p>with $Y = 1.99 + 0.76 \frac{a}{W} - 8.48 \left(\frac{a}{W} \right)^2 + 27.36 \left(\frac{a}{W} \right)^3$ $(1.99 - 1.12\sqrt{\pi})$</p> | |
| | <p>Thickness B</p> $K_I = \frac{PS}{BW^{3/2}} \left[2.9 \left(\frac{a}{W} \right)^{1/2} - 4.6 \left(\frac{a}{W} \right)^{3/2} + 21.8 \left(\frac{a}{W} \right)^{5/2} - 37.6 \left(\frac{a}{W} \right)^{7/2} + 38.7 \left(\frac{a}{W} \right)^{9/2} \right]$ | |
| | <p>Thickness B</p> $K_I = \frac{P}{BW^{1/2}} \left[29.6 \left(\frac{a}{W} \right)^{1/2} - 185.5 \left(\frac{a}{W} \right)^{3/2} + 655.7 \left(\frac{a}{W} \right)^{5/2} - 1017 \left(\frac{a}{W} \right)^{7/2} + 63.9 \left(\frac{a}{W} \right)^{9/2} \right]$ | |
| | <p>p per unit thickness</p> $K_I = p\sqrt{\pi a}$ | |
| | $K_{I_{max}} = 1.12 \frac{a}{\phi} \sqrt{\pi a}$ $K_{I_{max}} = 1.12 \frac{a}{\phi} \sqrt{\pi a^2/c}$ $\phi = \int_0^{\pi/2} \left[1 - \frac{c^2 - a^2}{c^2} \sin^2 \varphi \right] d\varphi$ $\phi = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8} \frac{a^2}{c^2}$ | |

図 3-13 代表的な問題における応力拡大係数¹⁶⁾

K-卓越領域

K を用いて表される $r^{-1/2}$ の局所場 (**K-field**) は、実際の材料でみられる場に対して近似的な場でしかない。別の言い方をすると、**K-field** は $r^{-1/2}$ の局所場が卓越する領域 (**K-dominant field**) においてのみ正しい。

上で見たように、**K-field** では、ひび割れから遠ざかるにつれて全ての応力が 0 になる。しかしこのようなことは現実の材料では起きないし、ここでの前提 (強度無限大の線形弾性体) においても起きない。これは、**K-field** が厳密解の最初の卓越項のみを用いており、他の高次項を無視しているからである。**K-field** と厳密解との違いはひび割れから遠ざかるにつれて顕著になる。

さらに、**K-field** はひび割れ先端近くにおいて、現実の材料における応力場と異なる。これは、現実の材料強度は有限であるため、無限大の応力は生じないためである。

このように、**K-field** を現実の材料に適用した場合、ひび割れ先端近くとひび割れから離れた領域では、実際の応力分布と異なる (下図参照)。 $r^{-1/2}$ の局所場が卓越する中間の領域のみで、実際の応力分布とよく一致する。ゆえに、この領域を **K-卓越領域 (K-dominant field)** と呼ぶ。

K-field は中間の領域でのみ正しいものの、ひび割れの進展はこの領域の応力により支配されるため、卓越項のみで表されている **K-field** を用いることが妥当とされる。

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) \quad (3-29)$$

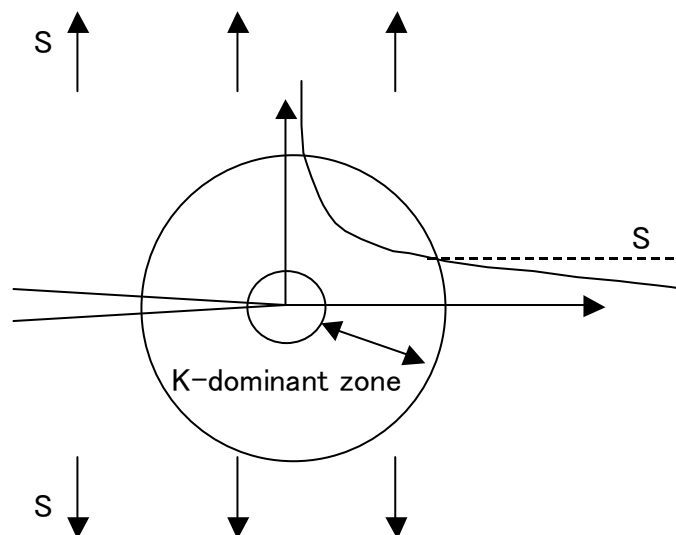


図 3-14 K-卓越領域

混合モード

ひび割れが三つのモードの組み合わせで载荷されている場合には、それぞれのモードを重ね合わせることで応力場と変位場が得られる。これは問題が線型弾性だからである。

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) + \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{III}(\theta) \\ u_i &= \frac{K_I}{2E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} f_i^I(\theta, \nu) + \frac{K_{II}}{2E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} f_i^{II}(\theta, \nu) + \frac{K_{III}}{2E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} f_i^{III}(\theta, \nu)\end{aligned}\tag{3-30}$$

Irwin の破壊規準

これまで見てきたように、応力場の強さは応力拡大係数により決まる。応力拡大係数は荷重、ひび割れ形状、供試体形状の要因を組み合わせた関数で表される。

一般的に、力学では「荷重」と「抵抗」を比較し、「荷重」が「抵抗」を上回れば、材料や構造物は壊れる、とする。

応力拡大係数は「荷重」に相当する。ひび割れが進展を始めるかどうかは、「荷重」を「抵抗」と比較すればよい。ここで「抵抗」に相当するのは、限界応力拡大係数（Critical stress intensity factor）もしくは破壊靱性（Fracture toughness）と呼ばれ、材料によって異なる値であり、 K_c で表される。

つまり、破壊規準は

$$K = K_c\tag{3-31}$$

と表される。 K_c は材料特性値である。下表に各種材料の値を示す。

表 3-1 破壊エネルギーと破壊靱性²³⁾Table 13.1 Toughness, G_c , and fracture toughness, K_{Ic}

| Material | G_c (kJ/m ²) | K_{Ic} (MN/m ^{3/2}) |
|---|----------------------------|---------------------------------|
| Pure ductile metals (e.g. Cu, Ni, Ag, Al) | 100-1000 | 100-350 |
| Rotor steels (A533; Discalloy) | 220-240 | 204-214 |
| Pressure-vessel steels (HY130) | 150 | 170 |
| High-strength steels (HSS) | 15-118 | 50-154 |
| Mild steel | 100 | 140 |
| Titanium alloys (Ti6Al4V) | 26-114 | 55-115 |
| GFRPs | 10-100 | 20-60 |
| Fibreglass (glassfibre epoxy) | 40-100 | 42-60 |
| Aluminium alloys (high strength-low strength) | 8-30 | 23-45 |
| CFRPs | 5-30 | 32-45 |
| Common woods, crack \perp to grain | 8-20 | 11-13 |
| Boron-fibre epoxy | 17 | 46 |
| Medium-carbon steel | 13 | 51 |
| Polypropylene | 8 | 3 |
| Polyethylene (low density) | 6-7 | 1 |
| Polyethylene (high density) | 6-7 | 2 |
| ABS polystyrene | 5 | 4 |
| Nylon | 2-4 | 3 |
| Steel-reinforced cement | 0.2-4 | 10-15 |
| Cast iron | 0.2-3 | 6-20 |
| Polystyrene | 2 | 2 |
| Common woods, crack \parallel to grain | 0.5-2 | 0.5-1 |
| Polycarbonate | 0.4-1 | 1.0-2.6 |
| Cobalt/tungsten carbide cermets | 0.3-0.5 | 14-16 |
| PMMA | 0.3-0.4 | 0.9-1.4 |
| Epoxy | 0.1-0.3 | 0.3-0.5 |
| Granite (Westerly Granite) | 0.1 | 3 |
| Polyester | 0.1 | 0.5 |
| Silicon nitride, Si ₃ N ₄ | 0.1 | 4-5 |
| Beryllium | 0.08 | 4 |
| Silicon carbide SiC | 0.05 | 3 |
| Magnesia, MgO | 0.04 | 3 |
| Cement/concrete, unreinforced | 0.03 | 0.2 |
| Calcite (marble, limestone) | 0.02 | 0.9 |
| Alumina, Al ₂ O ₃ | 0.02 | 3-5 |
| Shale (oilshale) | 0.02 | 0.6 |
| Soda glass | 0.01 | 0.7-0.8 |
| Electrical porcelain | 0.01 | 1 |
| Ice | 0.003 | 0.2* |

*Values at room temperature unless starred.

3.2.3 エネルギーバランス—エネルギーによる破壊へのアプローチ

次に、弾性体の破壊についてエネルギーバランスを考察し、エネルギーの視点から破壊規準を考える。

風船の破裂

エネルギーの視点から破壊を考えるにあたって、例として風船の破裂を考える。まずケース 1 として、風船を膨らました後に針などで破裂させることを考える。風船はゴムでできているため、膨らませることでゴムが伸びる。つまり風船を膨らませることで、風船に弾性エネルギーが蓄積されたことになる。膨らました後に針を刺すと、蓄積された弾性エネルギーがゴムを破裂させることに

消費され、弾性エネルギーは減少する。

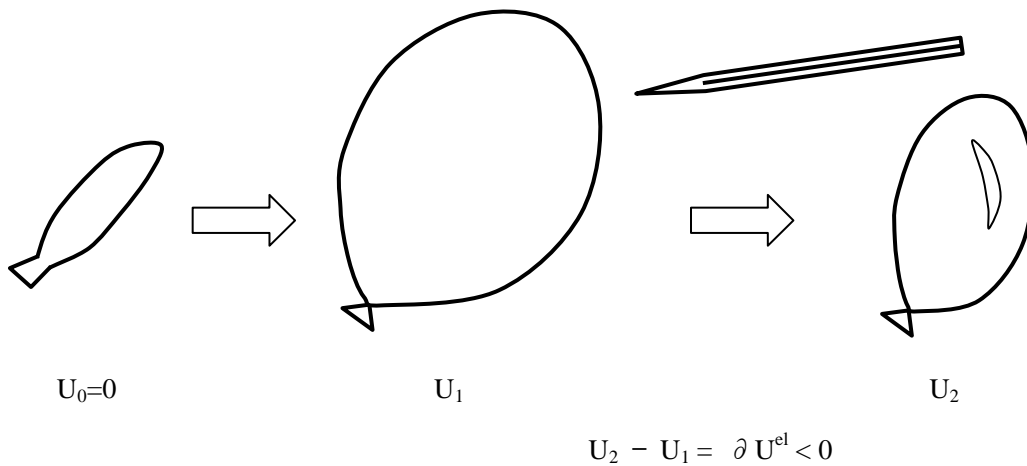


図 3-15 膨らました風船の破裂

よって、ケース 1 のエネルギーバランスは下記のように表される。

$$-\partial U^{el} \rightarrow \partial C + (\text{熱} \cdot \text{音などの散逸}) \quad (3-32)$$

ここに、 ∂U^{el} は弾性エネルギー変化である。 ∂C は破壊に消費されたエネルギーであり、

$$\partial C = G_c t \delta a \quad (3-33)$$

と表され、 G_c は破壊エネルギー [J/m^2]、または臨界エネルギー解放率と呼ばれ、単位面積当たりのひび割れを生成するために消費されるエネルギーを意味する。ここに、 t はゴムの厚み、 δa はひび割れ長さの増分である。

次に別のケースとして、あらかじめ穴の開いていた風船を膨らませることを考える。風船の口から空気を入れて膨らましていくと、途中で風船の穴から破裂が生じる。これをケース 2 とする。このケースでは、空気を入れるという外部からの仕事が破裂の際にもなされており、この仕事は風船の膨張における弾性エネルギー増加と破裂におけるエネルギー消費に転換されている。

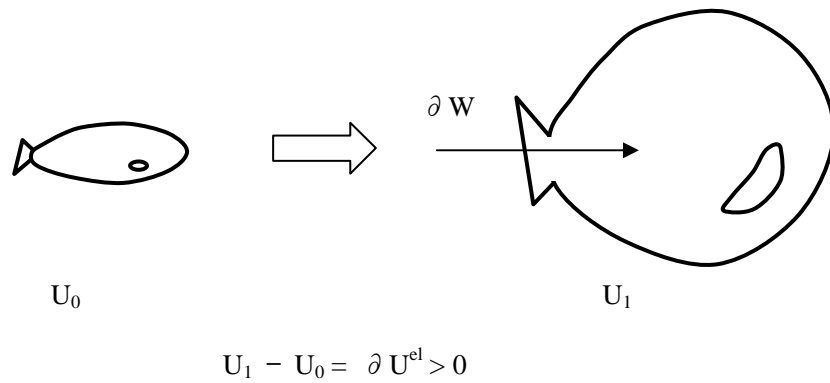


図 3-16 穴の開いた風船の破裂

ケース 2 のエネルギーバランスは下記のように表される.

$$\partial W \rightarrow \partial U^{el} + \partial C + (\text{熱} \cdot \text{音などの散逸}) \quad (3-34)$$

ここに, ∂W は仕事である.

Fixed end ケースと Dead weight ケース

風船の破裂における上記二つのケースを参考にしつつ, ひび割れを有する弾性体の破壊を考える. まずケース 1 に類する Fixed end もしくは変位制御と呼ぶケースを考える.

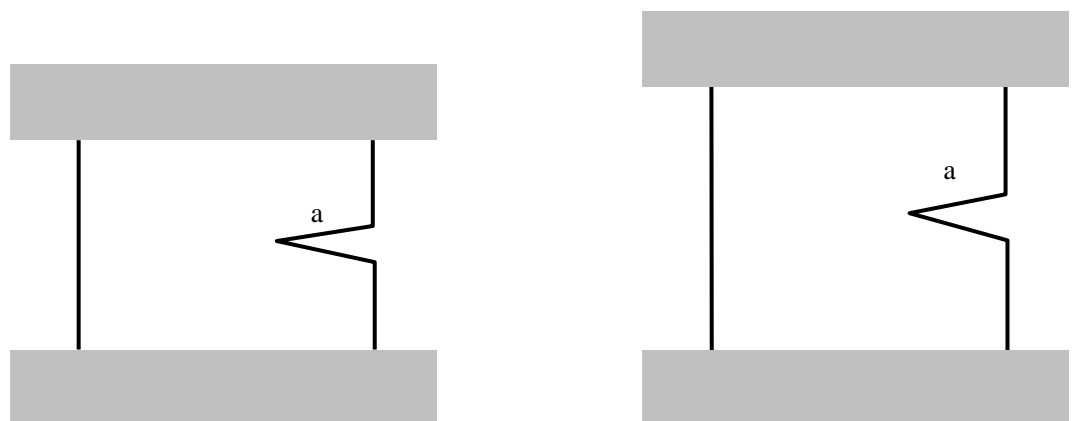


図 3-17 Fixed end ケース

ここでは, 弾性体は両端を固定されており, 両端が段階的に引き離される. 段階に伴い引張応力

が上昇し，ある段階まで引き離れた時に破壊が生じる．破壊が生じる際には外部からの仕事はなく，前段階までに蓄積された弾性エネルギーがひび割れを生成するために消費される．

$$\partial W = 0, \partial U^{el} < 0 \therefore -\partial U^{el} = G_c t \delta a \quad (3-35)$$

次にケース 2 に類する Dead weight もしくは荷重制御と呼ぶケースを考える．

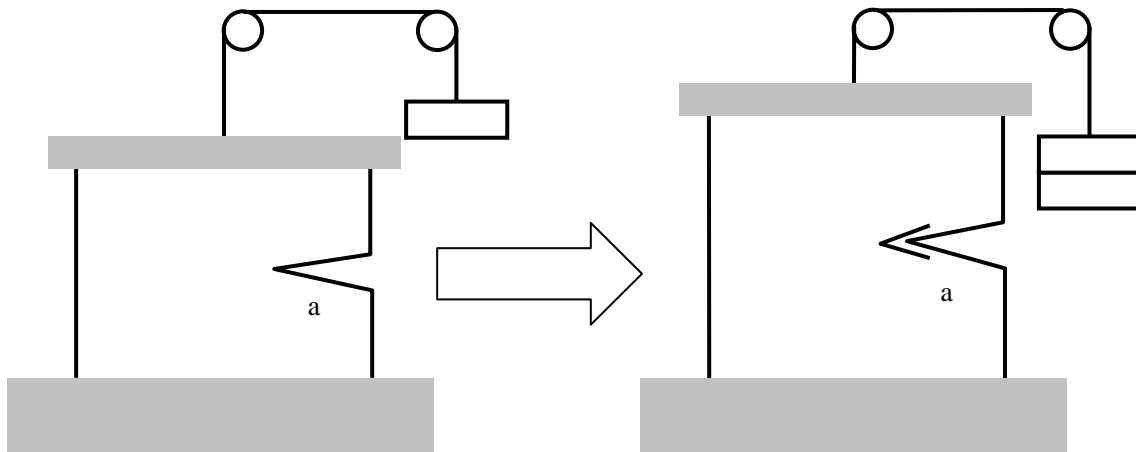


図 3-18 Dead weight ケース

ここでは，段階的に重りを増やすことによって，弾性体の引張応力も段階的に上昇していき，ある段階で破壊が生じる．破壊が生じる際にも重りは外部からの仕事をし続け，弾性体の弾性エネルギーを増加させると同時に，ひび割れを生成するために消費されるエネルギーを供給することになる．

$$\partial W > 0, \partial U^{el} > 0 \therefore \partial W = \partial U^{el} + G_c t \delta a \quad (3-36)$$

ここで，弾性体において

$$\partial U^{el} = \frac{1}{2} \partial W \quad (3-37)$$

であるため，

$$\begin{aligned} 2\partial U^{el} &= \partial U^{el} + G_c t \delta a \\ \therefore \partial U^{el} &= G_c t \delta a \end{aligned} \quad (3-38)$$

となり，Fixed end と Dead weight の両ケースにおいて次式が成り立つ．

$$|\partial U^{\text{el}}| = G_c t \delta a \quad (3-39)$$

ちなみに，弾性体において成り立つ

$$\partial U^{\text{el}} = \frac{1}{2} \partial W \quad (3-40)$$

の式は以下のように導かれる．今，弾性体に引張荷重 F を加え，変位 u をとの関係をグラフにすると下図のようになる．

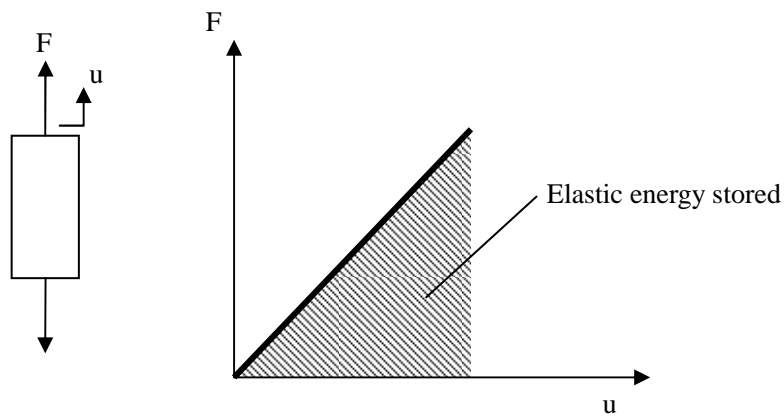


図 3-19 引張荷重を加えた弾性体

次に，ひび割れを有する弾性体について，ひび割れ進展の前後を考える．

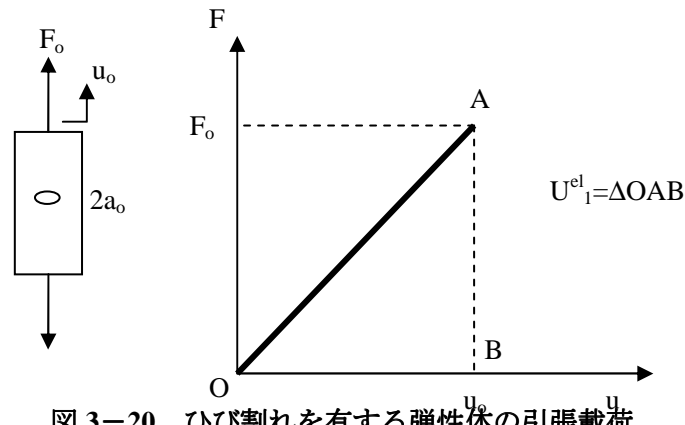


図 3-20 ひび割れを有する弾性体の引張載荷

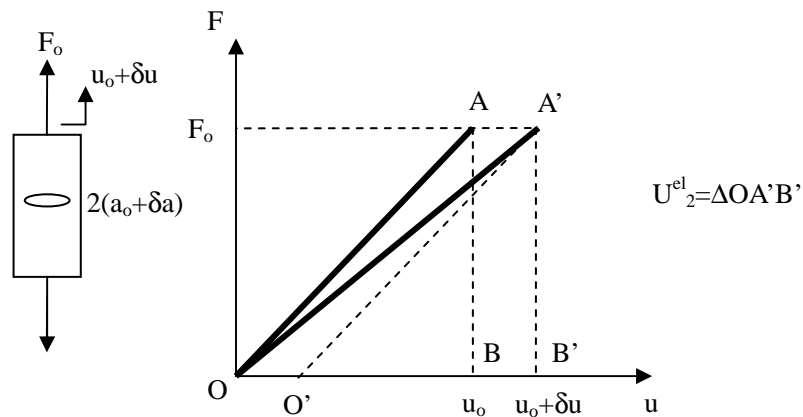


図 3-21 ひび割れ進展後の弾性体の引張載荷

上図より，弾性エネルギーの変化 δU^{el} は，

$$\delta U^{el} = U_2^{el} - U_1^{el} = \Delta OA'B' - \Delta OAB = \Delta OA'O' = \Delta OAA' = \frac{1}{2} AA'B'B = \frac{1}{2} F_0 \delta u = \frac{1}{2} \delta W \quad (3-41)$$

となる。

エネルギー解放率

上記の例では，破壊の瞬間のエネルギーバランス，つまりは「荷重」＝「抵抗」となっている瞬間を説明した。「抵抗」は材料特性値である破壊エネルギーもしくは臨界エネルギー解放率 G_c である。「荷重」の方について以下に述べる。

ひび割れが進展するには，新たなひび割れの生成に十分なエネルギーが供給されることが必要で

ある。エネルギーの供給は次式で表される。

$$\frac{d}{dA}(W - U^{el}) = G \quad (3-42)$$

ここに、 dA = ひび割れ面積の増分、 W = 仕事、 U^{el} = 弾性エネルギーである。この式で表されるエネルギーの供給を G で表し、エネルギー解放率と呼ぶ。エネルギー解放率は、弾性体中のひび割れ進展に伴う全ポテンシャルエネルギーの変化でも表される。

$$G = -\frac{\partial \Pi}{\partial A} \quad (3-43)$$

ここに、 Π は全ポテンシャルエネルギーであり、次式で表される。

$$\Pi = \int_{\Sigma} U(\epsilon_{ij}) dV - \int_{\Gamma} t_i u_i dS \quad (3-44)$$

ここに、 U はひずみエネルギー密度であり、

$$U(\epsilon_{ij}) = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij}(\epsilon_{ij}) d\epsilon_{ij} \quad (3-45)$$

で表される。また、 t_i は表面力、 u_i は変位である。 Π の第 1 項は蓄積された弾性エネルギーであり、第 2 項は外力によりなされた仕事を表している。

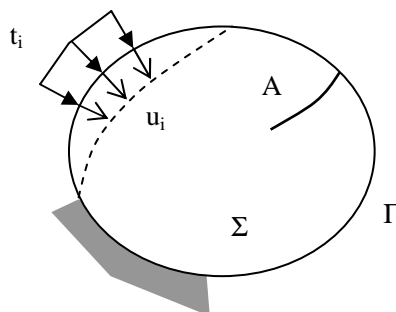


図 3-22 ひび割れを有する弾性体

エネルギー解放率 G が臨界値である G_c に達したときにひび割れが進展する。次の例では、エネ

ルギー解放率が载荷条件によらないことを示す。

まず、荷重が一定の場合を考える。下図に示す弾性体はつり合い下にあるとする。ひび割れが進展しない限りにおいて、コンプライアンス $C=C(a)$ を用いて v と P の関係は $v = C(a)P$ と表される。また、 U^{el} は次式で表される。

$$U^{el} = \frac{1}{2}Pv = \frac{1}{2}CP^2 = \frac{1}{2} \frac{v^2}{C} \quad (3-46)$$

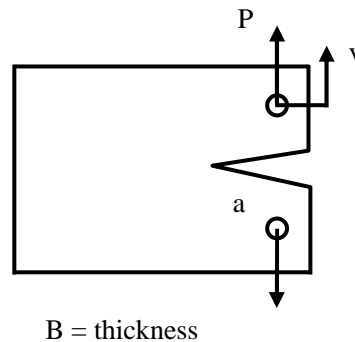


図 3-23 つり合い下にあるひび割れを有する弾性体

いま、一定荷重 P の下 (Dead weight) でひび割れが da 進展したとする。ひび割れ進展に伴い、荷重作用点変位が dv 増加するため、外力によりなされた仕事は Pdv となる。よって、

$$G = \frac{d}{dA} (W - U^{el}) = \frac{1}{B} \left(P \frac{dv}{da} - \frac{dU^{el}}{da} \right) \quad (3-47)$$

となる。 v と U^{el} を消去し P のみで表すと、

$$G = \frac{1}{B} \left(P^2 \frac{dC}{da} + CP \frac{dP}{da} - \frac{1}{2} P^2 \frac{dC}{da} - CP \frac{dP}{da} \right) = \frac{P^2}{2B} \frac{dC}{da} \quad (3-48)$$

であり、

$$G = \frac{1}{B} \left(\frac{dU^{el}}{da} \right)_P \quad (3-49)$$

とも表すことができる。

一方、一定変位 v の下 (Fixed end) で、ひび割れが da 進展したとすると、外力によりなされた

仕事はゼロであるため,

$$G = \frac{d}{dA} (W - U^{el}) = \frac{1}{B} \left(- \frac{dU^{el}}{da} \right)_v \quad (3-50)$$

となり, v を残して表すと,

$$G = \frac{-1}{B} \frac{d}{da} \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{C} \right) = \frac{v^2}{2BC^2} \frac{dC}{da} \quad (3-51)$$

となる. よって, いずれの場合 G も $v = C(a)P$ の関係の下に等しく, 载荷条件に依らないことが示される.

図解による方法でも説明できる. 下図に示す 2 本の直線は, ひび割れ進展前と後の供試体の荷重-変位関係である. 荷重一定でひび割れが進展したとすると, 点 A から E に状態が変わったことに相当する. 直線の下面積が蓄積された弾性エネルギーであるため, 前後で解放されたエネルギーは $\triangle OAE$ の面積になる. 変位一定の場合には点 A から B に状態が変わったことに相当し, $\triangle OAB$ が解放されたエネルギーになる. 両者の相違は $\triangle ABE$ であるが, この面積は小さいため無視しうる. よって, $\triangle OAE = \triangle OAB$ となり, 载荷条件によらず解放されたエネルギーは等しく, 進展面積で割ったエネルギー解放率も等しい.

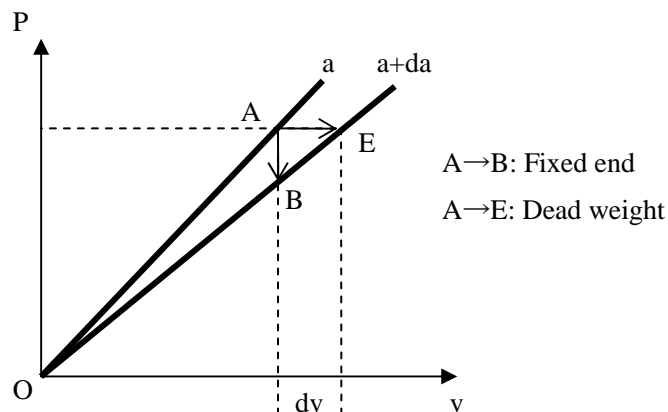


図 3-24 エネルギー解放

Griffith の破壊規準

ひび割れ進展は, エネルギー解放率 G が臨界エネルギー解放率もしくは破壊エネルギー G_c に等しくなったときに生じる. つまり, 破壊規準は

$$G = G_c \quad (3-52)$$

と表される。

G_c は材料特性値であり，表 3-1 に示されている。ガラスは脆性材料であるため，破壊エネルギー G_c は表面エネルギーに等しく，一定の値を示す。

$$\frac{dQ}{dA} = R = 2\gamma \quad (3-53)$$

金属は延性材料であり，破壊エネルギー G_c は塑性変形に要する塑性エネルギーであり，平面ひずみ条件では一定の値を示す。

$$\frac{dQ}{dA} = R = G_c \quad (3-54)$$

3.2.4 K と G の関係

さて，応力とエネルギーの視点から破壊を考え，それぞれに破壊規準を説明したが，両者には当然関係がある。K と G の関係式は以下のようにして得られる。

今，下図のように，開口しているひび割れの先端部 δa の区間について，ひび割れ面に閉口する向きの応力を作用させて完全に閉口させることで，ひび割れ長を δa 短くするという操作を考える。

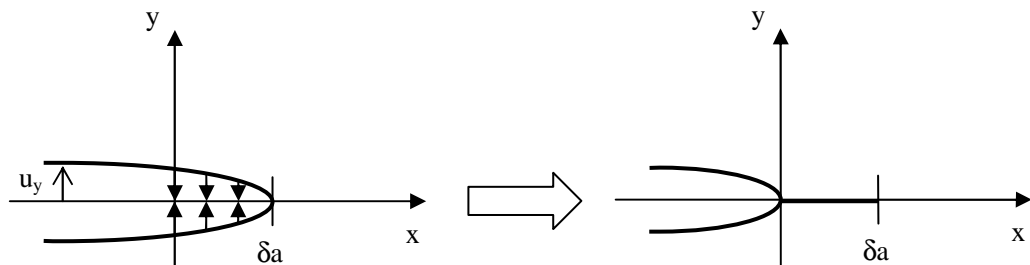


図 3-25 ひび割れ先端部の閉口操作

まず，ひび割れ周辺での y 方向変位 u_y は 3.2.2 項で示したとおり，

$$u_y = \frac{K_I}{2E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1+\nu) [(2\kappa+1)\sin(\theta/2) - \sin(3\theta/2)] \quad (3-55)$$

で表される。座標系は下図のとおり，ひび割れ先端を原点とする。

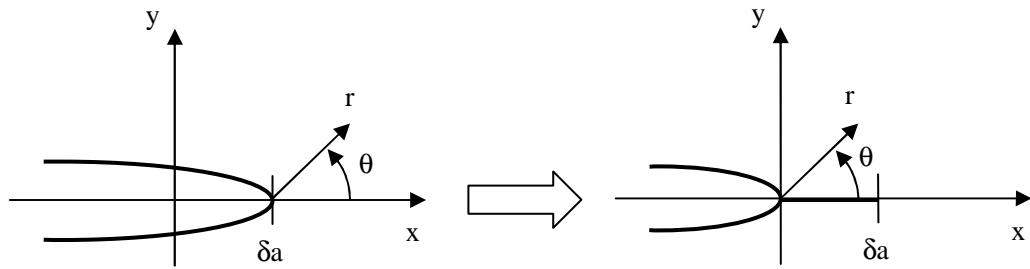


図 3-26 ひび割れ先端での座標系

$\theta = \pi$ では,

$$u_y = \frac{4K_I}{E'} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (3-56)$$

となり, これは開口変位を表す. ここに,

$$E' = \begin{cases} E & \text{平面ひずみ} \\ \frac{E}{1-\nu^2} & \text{平面応力} \end{cases} \quad (3-57)$$

である. 閉口前の x-y 座標系で表すと,

$$u_y = \frac{4K_I}{E'} \sqrt{\frac{\delta a - x}{2\pi}} \quad (3-58)$$

である.

一方, ひび割れ周辺の y 方向応力 σ_{yy} も 3.2.2 項で示したとおり,

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\theta/2) [1 + \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2)] \quad (3-59)$$

であり, $\theta = 0$ では,

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (3-60)$$

となり，閉口後に x 軸上で生じる y 方向応力はこれにより表される．よって，閉口後の x - y 座標系を用いると，

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} \quad (3-61)$$

となる．

先端部 δa の区間について閉口させる操作で行う仕事は，エネルギー解放率 G に等しい．よって次式が成り立つ．

$$G = \frac{1}{t} \lim_{\delta a \rightarrow 0} \frac{2}{\delta a} \int_0^{\delta a} \frac{1}{2} \sigma_{yy} \cdot t \cdot dx \cdot u_y \quad (3-62)$$

本式では，まず，応力 σ_{yy} に面積 $t dx$ をかけて力とし，変位 u_y をかけて 2 で割ることで仕事を算出している．これを δa の区間について積分し，ひび割れ上面と下面の両面を考えるため 2 をかける． G は単位面積当たりのひび割れ進展のエネルギー供給なので， $t \delta a$ で割り，最終的に δa の区間をゼロにする極限を考えている．本式に，上記の σ_{yy} と u_y を代入する．

$$\begin{aligned} G &= \lim_{\delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\delta a} \int_0^{\delta a} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} \frac{4K_I}{E'} \sqrt{\frac{\delta a - x}{2\pi}} dx \\ &= \lim_{\delta a \rightarrow 0} \frac{2K_I^2}{\pi E' \delta a} \int_0^{\delta a} \sqrt{\frac{1 - x/\delta a}{x/\delta a}} dx \\ &= \frac{K_I^2}{E'} \end{aligned} \quad (3-63)$$

よって， K と G の関係式は，

$$G = \frac{K_I^2}{E'} \quad \text{もしくは} \quad K_I = \sqrt{E'G} \quad (3-64)$$

となる．また，破壊規準を満たす場合には，

$$G_c = \frac{K_{Ic}^2}{E'} \quad \text{もしくは} \quad K_{Ic} = \sqrt{E'G_c} \quad (3-65)$$

となる．表 3-1 の破壊エネルギーと破壊靱性の関係は本式で得られる．

3.2.5 ひび割れ進展の安定性

ある条件では、ひび割れは一瞬にして成長し、物体を破壊に至らしめる。これを即時破壊（fast fracture）と呼ぶ。例えば、真ん中にひび割れのある板に重りで荷重をかける場合を考えよう（図 3-27（左））。重りを増やしていくと、ある限界の重さで、ひび割れは進展を始め、止まらずに板を破壊に至らしめる。

一方で、同じく真ん中にひび割れのある板を考えるが、今回は円錐型のくさびをひび割れの真ん中に打ち込むという荷重を考えよう（図 3-27（右））。くさびを打ち込むことにより、ひび割れの表面に力を加えることになる。くさびは円錐型なので、打ち込めば打ち込むほど、ひび割れは開き、ひび割れに力がかかることになる。ある限界の荷重で、ひび割れは進展を始めるが、幾分成長した後、ひび割れは止まってしまう。ここでくさびをさらに打ち込めば、再び進展するが、やはり幾分成長した後、止まるであろう。

ひび割れ進展の安定性の観点から見て、これら二つは異なる。前者は不安定な場合であり、後者は安定な場合である。

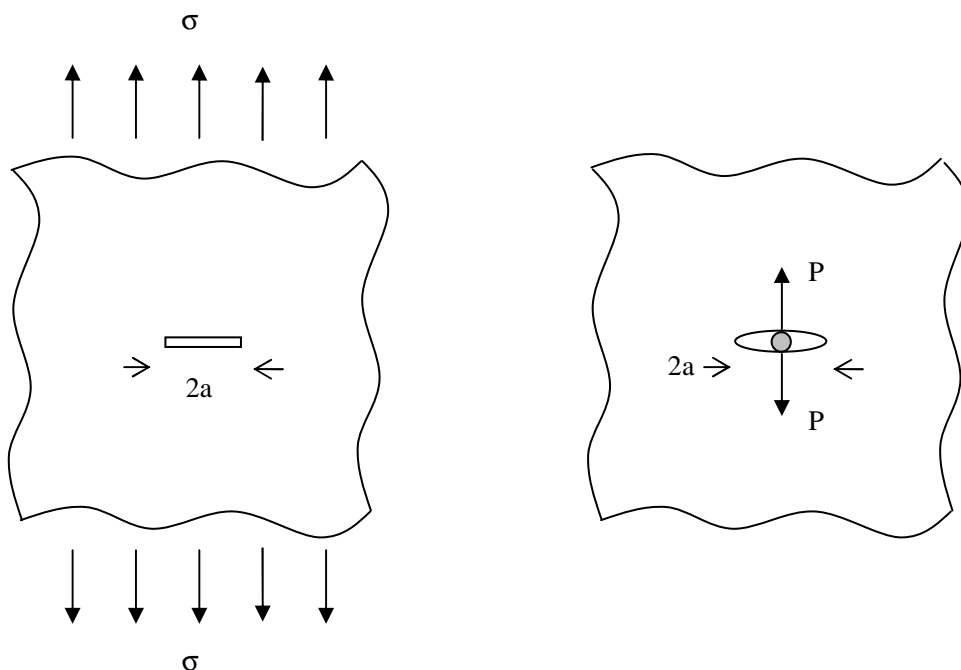


図 3-27 不安定ひび割れ進展の場合（左）と安定ひび割れ進展の場合（右）

ひび割れ進展の安定性はエネルギー解放率のひび割れ長さに対する変化率の符号で確認できる。エネルギー解放率を、ひび割れ長さについて微分をとり、正であれば進展は不安定となり、負であれば安定となる。

$$\frac{\partial G}{\partial a} > 0 \quad (\text{不安定進展の場合}) \quad (3-66)$$

$$\frac{\partial G}{\partial a} < 0 \quad (\text{安定進展の場合}) \quad (3-67)$$

または応力拡大係数でも確認ができる.

$$\frac{\partial K}{\partial a} > 0 \quad (\text{不安定進展の場合}) \quad (3-68)$$

$$\frac{\partial K}{\partial a} < 0 \quad (\text{安定進展の場合}) \quad (3-69)$$

ひび割れ進展の安定性は以下のように図を用いても説明できる. 上図の不安定ひび割れ進展の場合の応力拡大係数とエネルギー解放率は次の式で表される.

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (3-70)$$

$$G = \frac{\sigma^2 \pi a}{E} \quad (3-71)$$

今, 初期ひび割れの長さを a^* とする. 応力 σ_1 が限界応力 σ_c より小さい時, エネルギー解放率は点 **A** であり, 当然限界エネルギー解放率 G_c より小さい. 応力が限界応力に達した時, エネルギー解放率も限界エネルギー解放率 (破壊エネルギー) に達する (点 **B**). つまり, Griffith 破壊規準が満たされ, ひび割れは進展を始める. さらに, ひび割れが進展し長さが少し成長した時点を考えて, 応力が限界応力に保たれたままであっても, エネルギー解放率は破壊エネルギーを上回ったままの状態であることが分かる. これは, ひび割れ進展中, 常に破壊エネルギーを上回るエネルギーが供給されることを意味し, ひび割れは止まらずに成長し続けることになる. これが微分が正となることの意味である.

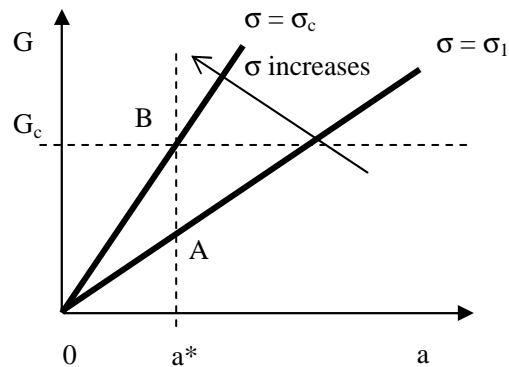


図 3-28 不安定ひび割れ進展

安定ひび割れ進展の場合についても同様に説明できる。この場合，応力拡大係数とエネルギー解放率は次の式で表わされる。

$$K_1 = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \quad (3-72)$$

$$G = \frac{P^2}{\pi E a} \quad (3-73)$$

ここで， P は単位板厚あたりの力である。応力拡大係数の単位を一応確認しておく。

$$K_1 = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} = \frac{[N/m]}{[m^{1/2}]} = [Pa\sqrt{m}] \quad (3-74)$$

初期ひび割れの長さを a^* とする。荷重が P_1 で限界荷重 P_c より小さいとき，エネルギー解放率 G は図中の点 A であり，当然限界エネルギー解放率 G_c より小さい。荷重が限界荷重 P_c に達した時，エネルギー解放率も G_c に達する（点 B ）。つまり，Griffith 破壊規準が満たされ，ひび割れが進展する。ここで，ひび割れが進展していく際に，荷重が P_c に保たれているならば，エネルギー解放率は破壊エネルギーを下回ることが図より分かる。これは，エネルギーの供給が破壊エネルギーに満たないことを意味し，ひび割れは幾分進展した後には止まることになる。ひび割れをさらに進展させるには，荷重を増加させなければならない。例えば，進展後停止したひび割れの長さを $a^* + \Delta a$ とすると，荷重を P_2 に増加させることにより，再度破壊規準を満たしてひび割れが進展する。このような安定ひび割れ進展の場合，即時破壊は起きない。

安定ひび割れ進展の一例として，鉄筋コンクリート構造物において内部鉄筋腐食により生じたひび割れがある。腐食により鉄筋は体積が膨張する。体積膨張はコンクリートのひび割れに対してく

さび荷重として働く。腐食に伴い体積膨張が進むに連れて、コンクリートひび割れは鉄筋位置から構造物表面へと進展していく。

別の例として、斧による薪割りがある。斧を叩いて薪に押し込むと、縦ひび割れが進展するが、幾分成長した後止まる。薪を完全に割るには、斧を叩いてさらに押し込むということを何度も繰り返さないといけない。

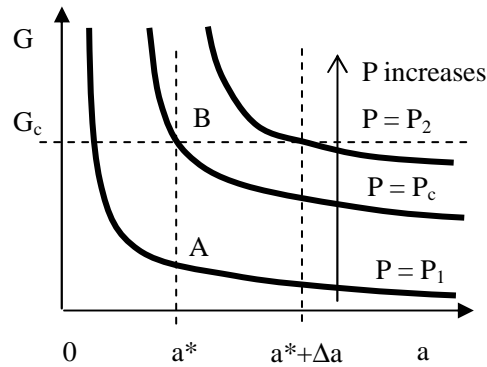


図 3-29 安定ひび割れ進展

以上に説明したように、Griffith 破壊規準は即時破壊の必要条件ではあっても、十分条件ではない。エネルギー解放率のひび割れ長さに対する微分の符号の正負がひび割れ進展の安定性を決めることになる。

3.2.6 重ね合わせの原理

応力拡大係数は同じモード内で重ね合わせることができる。異なるモード間では重ね合わせることができない。例えば、荷重 p , q , r …の作用下にあるひび割れについて、モード I の応力拡大係数 K_I は、

$$K_I = K_{I_p} + K_{I_q} + K_{I_r} + \dots \quad (3-75)$$

で表される。以下に 3 つの例を示す¹⁶⁾。

内圧を受けるひび割れ

重ね合わせの原理を用いて、既知の応力拡大係数から新たな問題の応力拡大係数を導き出すことができる。ここでは、無限体中にある内圧 p を受けるひび割れの応力拡大係数を導き出すことを考える (図 3-30)。

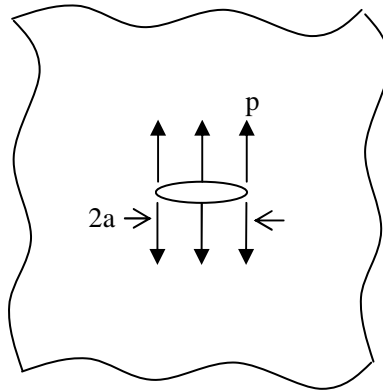


図 3-30 無限体中にある内圧を受けるひび割れ

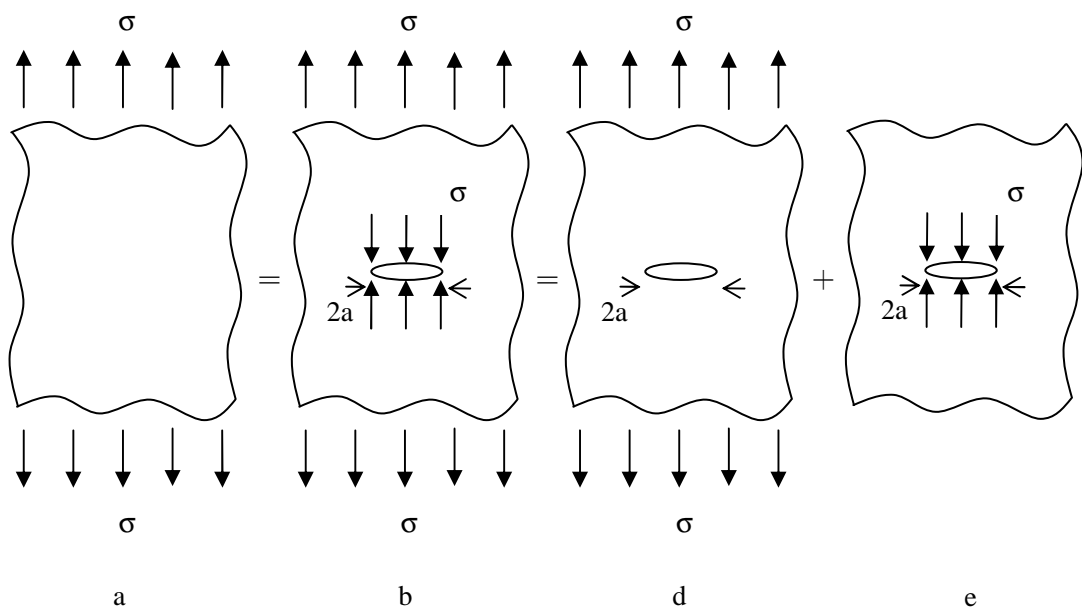


図 3-31 重ね合わせ

図 3-31 に示す a は一様引張荷重下にある無限体である。ひび割れは存在しないため、 $K_{Ia}=0$ である。b はひび割れが存在するが、ひび割れ面に σ を作用させることで閉口させる。よって、a と等しく、 $K_{Ib}=0$ となる。b は d と e に分解される。d は一様引張荷重下にある無限体中のひび割れであり、前述したとおり、

$$K_{Id} = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (3-76)$$

である。図 3-31 の重ね合わせは、

$$0 = K_{Ib} = K_{Id} + K_{Ie} \quad (3-77)$$

で表される。よって、

$$K_{Ie} = -\sigma\sqrt{\pi a} \quad (3-78)$$

が得られる。d は図 3-30 と力の向きが異なるだけなので、求める応力拡大係数は

$$K_I = p\sqrt{\pi a} \quad (3-79)$$

となる。

リベット穴から生じたひび割れ

次に、荷重を受けるリベットの穴から生じたひび割れの応力拡大係数を導き出すことを考える (図 3-32)。リベットの穴はひび割れと比べて十分に小さいものとする。この問題 a は、一様引張荷重下のひび割れ問題 b とくさび荷重 P を受けるひび割れ問題 d を重ね合わせて、問題 a とは上下逆だが等しい問題 e を引いたものと考えることができる。

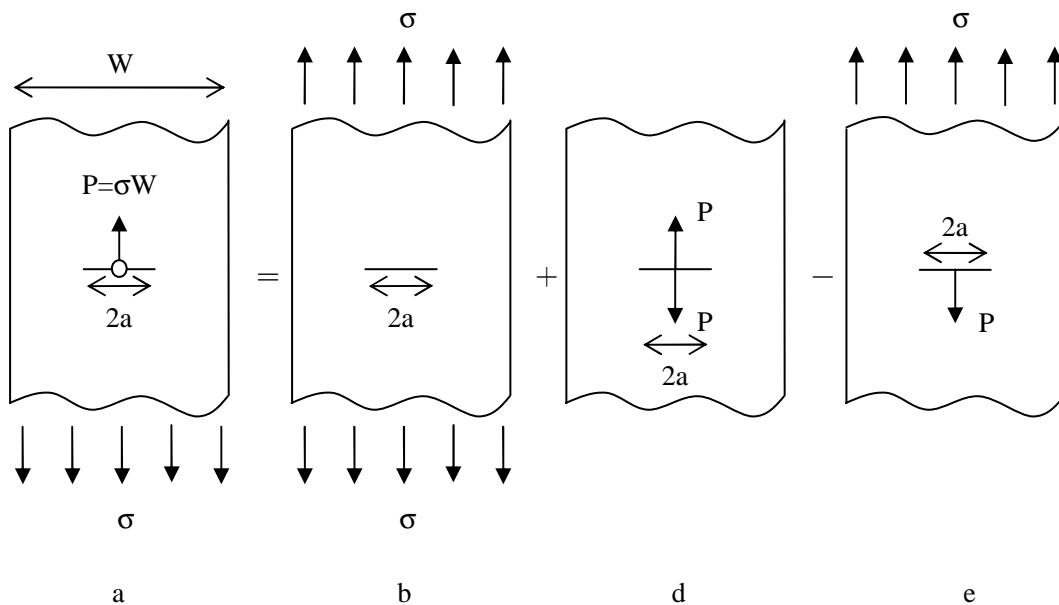


図 3-32 重ね合わせ

応力拡大係数の重ね合わせは,

$$K_{Ia} = K_{Ib} + K_{Id} - K_{Ie} \quad (3-80)$$

で表され, $K_{Ia}=K_{Ie}$ であるので,

$$K_{Ia} = \frac{1}{2}(K_{Ib} + K_{Id}) \quad (3-81)$$

を求めればよい. 今, ひび割れ長さ a が板幅 W より十分に小さいとしたとき, 求める応力拡大係数は

$$K_{Ia} = \frac{1}{2} \left(\sigma \sqrt{\pi a} + \frac{\sigma W}{\sqrt{\pi a}} \right) \quad (3-82)$$

となる.

内圧を受けるひび割れ (別の方法)

内圧を受けるひび割れの応力拡大係数は別の方法でも求められる. まず, ひび割れ面の位置 x にくさび荷重 P を受ける問題を考える (図 3-33).

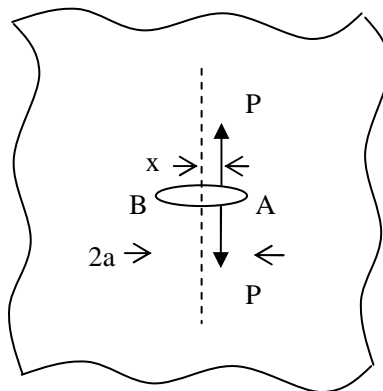


図 3-33 くさび荷重を受けるひび割れ

応力拡大係数はひび割れ先端 A と B とでは異なり,

$$K_{IA} = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}, \quad K_{IB} = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \quad (3-83)$$

で与えられる。これらの式を用いてひび割れ面で積分を行うことにより、内圧を受けるひび割れの応力拡大係数を得る。ひび割れの右半分 ($0 < x < a$) に作用する内圧 p については K_{IA} を用い、左半分 ($-a < x < 0$) については K_{IB} を用い、

$$K_I = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \int_0^a \left\{ \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \right\} dx = 2p \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (3-84)$$

となり、 x を $a \cos \phi$ で置換積分することで、

$$K_I = p \sqrt{\pi a} \quad (3-85)$$

が求まる。

3.3 非線形破壊力学

本節では非線形破壊力学 (Non Linear Fracture Mechanics, NLFM) について述べていく。線形破壊力学は線形弾性体を対象としていたが、金属材料については弾塑性挙動を、複合材料ではひび割れ間の結合力を考慮する必要がある。これらの材料を扱う方法を以下に述べる。

3.3.1 塑性域補正 (金属材料)

線型弾性応力場において、ひび割れ先端は近づくにつれて応力が無限大に発散する特異点である。しかし、実際の材料は強度が有限であるため、応力が強度を超えることはない。金属材料の場合には降伏強度を超えることはなく、ひび割れ前方には降伏強度に達した塑性領域が形成されることになる。この塑性領域の大きさを以下では推定する。

塑性域の第一推定

下図のような応力-ひずみ関係を有する弾塑性体を考える。一様引張応力下にあるひび割れ周辺において、引張载荷方向の応力 σ_{yy} はひび割れ先端に近づくにつれて無限大に向かうが、降伏強度 σ_y を超えないため、 $\sigma_{yy} = \sigma_y$ となる長さ r_p^* の塑性域が形成されると考える。

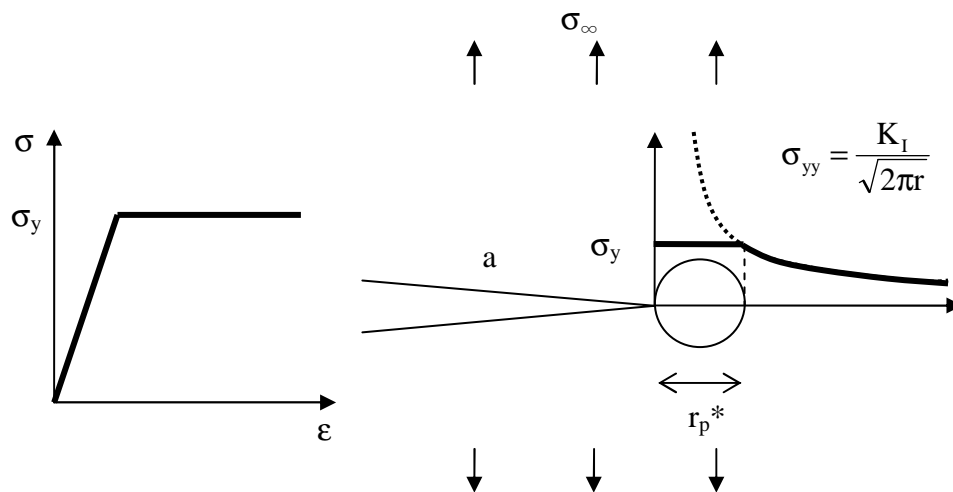


図 3-34 塑性域の推定

r_p^* は引張载荷方向の応力 σ_{yy} の式に降伏強度 σ_y を代入し、

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_p^*}} \quad (3-86)$$

$$r_p^* = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_y} \right)^2 = \frac{\sigma_\infty^2 a}{2\sigma_y^2} \quad (\because K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi a}) \quad (3-87)$$

となる。

しかしながら、実際の塑性域長さは r_p^* よりも長いと考えられる。これは、 r_p^* の範囲において応力が σ_y になったため、図中の①の面積に相当する応力が②のように再配分されなければならない、 $\sigma_{yy} = \sigma_y$ となる塑性域が r_p^* より長くなるためである。

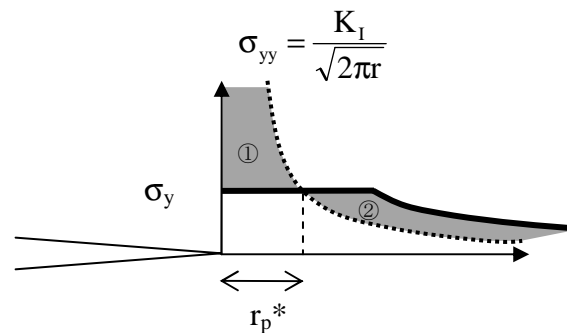


図 3-35 応力再配分

Irwin の塑性域補正

ひび割れ前方の塑性変形により、ひび割れは実際よりも長いひび割れのようにふるまうと Irwin は考えた。つまり弾性体と比較すると、塑性域の形成により弾塑性体の変位は大きくなり剛性は下がることになる (図 3-36)。

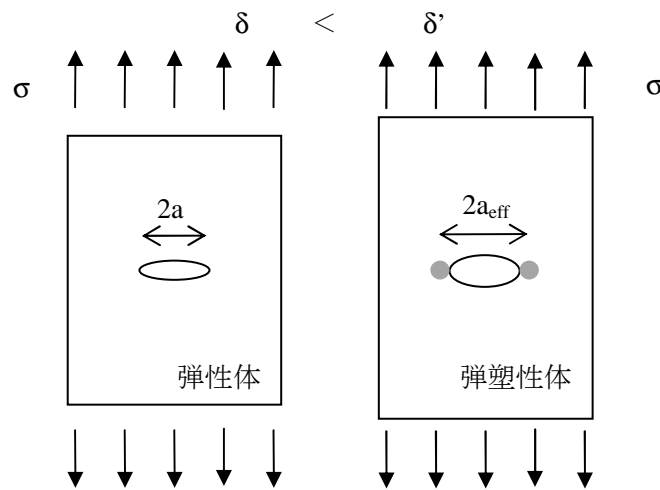


図 3-36 塑性域の影響

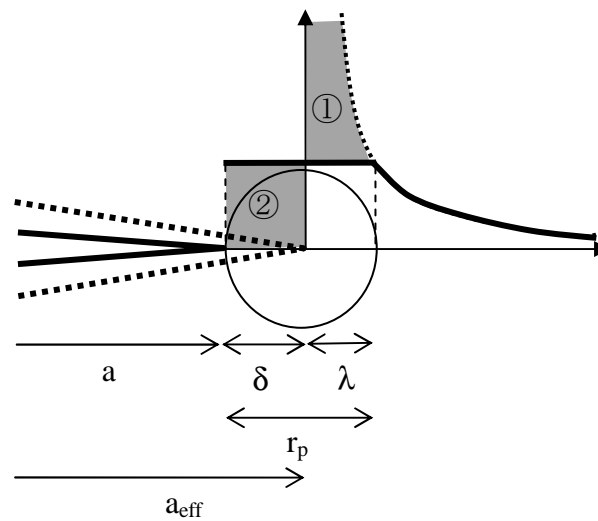
図 3-37 ひび割れの物理的長さ a と見かけの長さ a_{eff}

図 3-37 は、実際のひび割れ（実線，物理的長さ a ）と塑性域により見かけ上長く見えるひび割れ（点線，見かけの長さ a_{eff} ）を示している．図 3-35 と同様の応力再配分がなされたとして，塑性域を含む y 方向の応力分布が示されている．見かけのひび割れ a_{eff} の先端から λ 離れたところで y 方向応力 σ_y は降伏強度 σ_y に達するため，

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\lambda}} \quad (3-88)$$

となる。ここで、 K_I は

$$K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi(a + \delta)} \quad (3-89)$$

とあらわされるため、両式より

$$\lambda = \frac{\sigma_\infty^2 (a + \delta)}{2\sigma_y^2} \quad (3-90)$$

$\delta \ll a$ なので、

$$\lambda = \frac{\sigma_\infty^2 (a + \delta)}{2\sigma_y^2} \approx \frac{\sigma_\infty^2 a}{2\sigma_y^2} = r_p^* \quad (3-91)$$

となり、これを r_p^* と呼ぶ。図 3-37 の灰色領域の①が②に応力再配分されたと考えられるので、双方の面積が等しくなるとして、

$$\sigma_y \delta = \int_0^{r_p^*} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} dr - \sigma_y r_p^* = \int_0^{r_p^*} \sigma_\infty \sqrt{\frac{a + \delta}{2r}} dr - \sigma_y r_p^* = \sigma_\infty \sqrt{\frac{a + \delta}{2}} \left[r^{\frac{1}{2}} \right]_0^{r_p^*} - \sigma_y r_p^* \quad (3-92)$$

を整理して、

$$0 = \sigma_\infty \sqrt{\frac{a + \delta}{2}} 2\sqrt{r_p^*} - \sigma_y r_p^* - \sigma_y \delta. \quad (3-93)$$

$\delta \ll a$ なので、

$$\sigma_\infty \sqrt{2ar_p^*} \approx \sigma_y (r_p^* + \delta) \quad (3-94)$$

とでき、

$$\frac{2\sigma_\infty^2 a}{\sigma_y^2} r_p^* = (r_p^* + \delta)^2 \quad (3-95)$$

となる。式(3-83)より、

$$4r_p^{*2} = (r_p^* + \delta)^2 \quad (3-96)$$

が得られ、 $\delta = r_p^*$ と $r_p = 2r_p^*$ という結果になる。

このように、Irwin の塑性域補正は第一推定による長さの 2 倍となる。

Dugdale の方法

Dugdale と Barenblatt により、別の方法を用いた推定が得られている。ここでも、見かけ上実際よりも長いひび割れを考えることで塑性域の長さを推定しているが、応力拡大係数を用いた議論に基づいている。

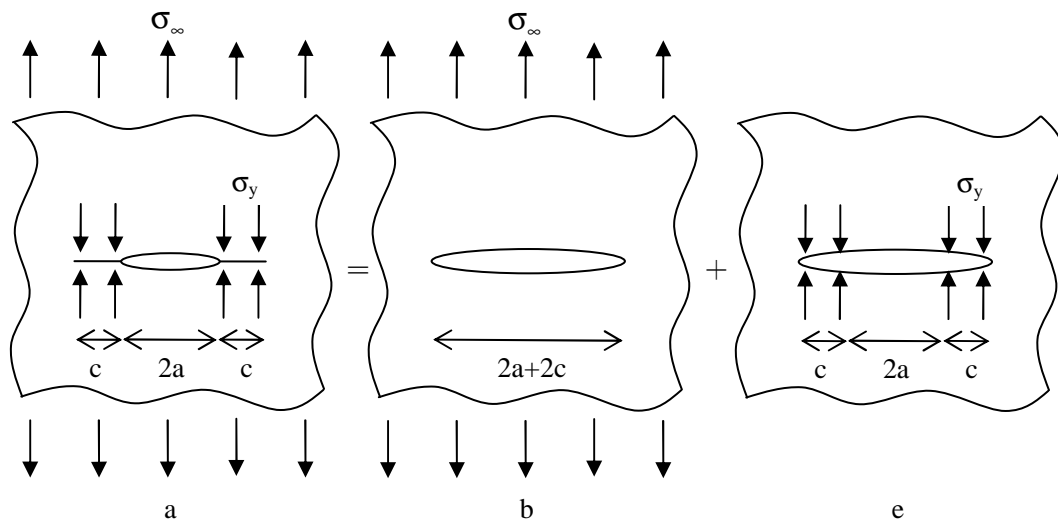


図 3-38 問題の重ね合わせ

図 3-38a に示されている一様引張応力下にある無限体において、長さ $2(a + c)$ のひび割れを考える。ひび割れ両端の長さ c の領域においては、ひび割れを閉口させる方向に、降伏強度に等しい σ_y の表面力が作用しているとする。長さ c の両端部は降伏強度に達した塑性域と考える。

この問題は、b と e の重ね合わせとして考えることができる。すなわち、b は長さ $2(a + c)$ のひび割れを有する無限体に一様引張応力が作用している問題であり、e は無限体中の長さ $2(a + c)$ のひび割れの両端の長さ c の領域に σ_y の閉口方向の表面力が作用している問題である。よって、問題 a の応力拡大係数 K_{Ia} は、問題 b と e の応力拡大係数を重ね合わせることで得られる。

$$\begin{aligned}
K_{Ia} &= \sigma_{\infty} \sqrt{\pi(a+c)} + \frac{-\sigma_y}{\sqrt{\pi(a+c)}} \left[\int_a^{a+c} \sqrt{\frac{a+c+x}{a+c-x}} dx + \int_{-a-c}^{-a} \sqrt{\frac{a+c-x}{a+c+x}} dx \right] \\
&= \sigma_{\infty} \sqrt{\pi(a+c)} - \sigma_y \sqrt{\pi(a+c)} \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{a}{a+c} \right)
\end{aligned} \tag{3-97}$$

問題 a のひび割れ先端は K_{Ia} による応力場の特異点であるが、今は降伏による塑性域形成を考えているため、特異点として応力が無限大に発散してはならない。つまり、 K_{Ia} がゼロでなければならず、ゼロになるような c が塑性域の長さになると考えることができる。

$K_{Ia} = 0$ として、

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{\cos \left(\frac{\pi \sigma_{\infty}}{2 \sigma_y} \right)} - 1 \tag{3-98}$$

が得られる。 $\sigma_{\infty} / \sigma_y$ が大きい場合、 c は上式により計算できる。 $\sigma_{\infty} / \sigma_y$ が小さい場合、

$$\frac{1}{\cos \theta} = 1 + \frac{\theta^2}{2} \text{ for } \theta \ll 1 \tag{3-99}$$

を用いて、

$$c \approx \frac{\pi}{8} \left(\frac{K_I}{\sigma_y} \right)^2 = 0.393 \left(\frac{K_I}{\sigma_y} \right)^2 \tag{3-100}$$

となる。

一方で、Irwin による塑性域補正は、

$$r_p = 2r_p^* = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_y} \right)^2 = 0.318 \left(\frac{K_I}{\sigma_y} \right)^2 \tag{3-101}$$

である。二つの方法による推定はほぼ同じ塑性域の長さを示している。

小規模降伏

線形破壊力学で K を用いて表される $r^{1/2}$ 特異性の局所場は、ひび割れ先端と離れた領域において、実際の弾塑性体の応力場と異なる (3.2.2 項参照)。しかし、ひび割れ先端近くの塑性域の大き

さが十分に小さければ、 K -卓越領域を考えることは妥当であり、線形破壊力学を用いることができる。このためには塑性域長さ r_p がひび割れ長さよりも十分に小さい必要がある。これを小規模降伏 (Small Scale Yielding) と呼ぶ。ひび割れ長さ a については、次式を満たす必要があることが実験により示されている¹⁹⁾。

$$a \gg 2.5 \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_y} \right)^2 \quad (3-102)$$

上式は、供試体寸法に関する他の制約条件と合わせて ASTM E399 に規定されている²⁰⁾。

3.3.2 結合力 (繊維補強/粒子分散複合材料)

繊維や粒子で補強された複合材料では、ひび割れにおいて応力が伝達される。伝達応力はひび割れ面に作用する閉口方向の力と考えることができ、結合力とも呼ばれる。結合力はひび割れ後方の過程であるが、ひび割れ先端での応力拡大係数に影響を与える。つまり、補強されていない母材と比較して応力拡大係数は減少する。これを以下に説明する。

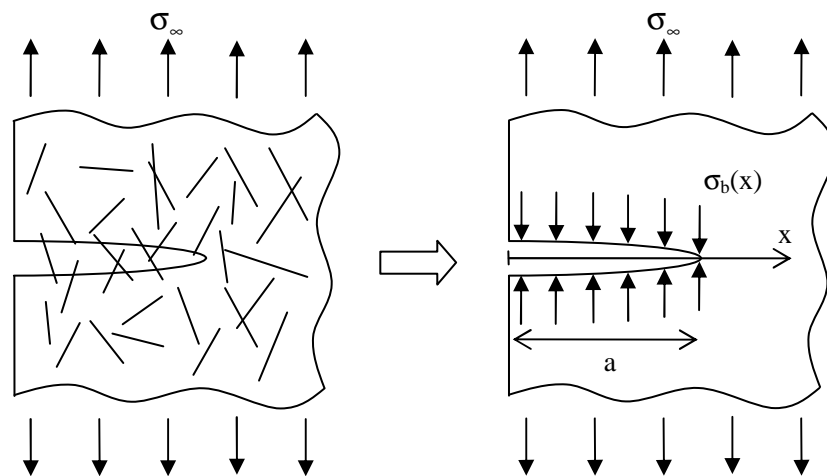


図 3-39 結合力

図 3-40 に示すように、応力拡大係数 K_{tip} は、外力による応力拡大係数 K_a と結合力による応力拡大係数 K_b との和として表される。

$$K_{tip} = K_a + K_b \quad (3-103)$$

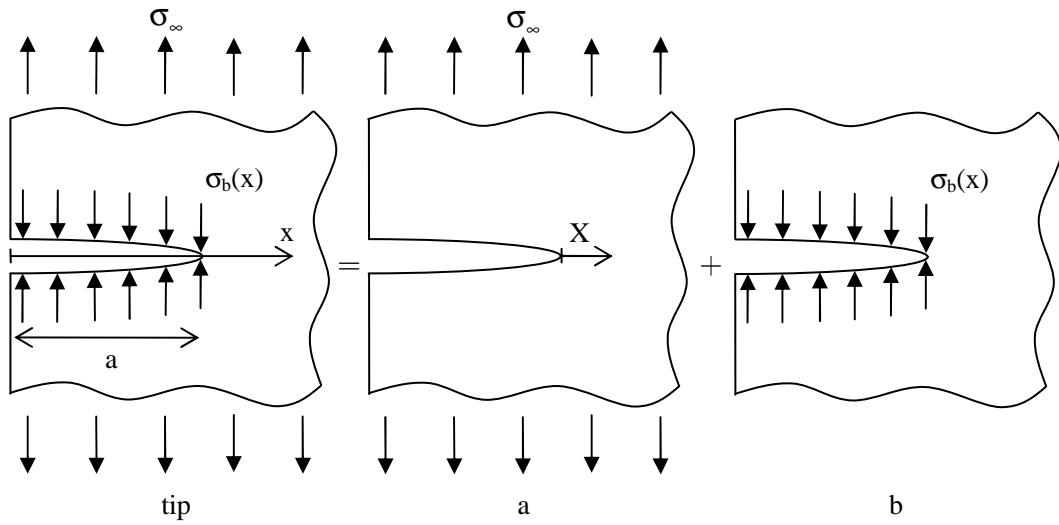


図 3-40 問題の重ね合わせ

一様引張応力下にある半無限体の場合,

$$K_a = 1.12\sigma_\infty\sqrt{\pi a} \quad (3-104)$$

である． K_b は図 3-33 の問題の応力拡大係数

$$K_{IA} = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \quad (3-105)$$

を用いて以下のように得られる．点荷重 P を単位面積当たりの荷重 $p(x)$ に置き換えて，座標系を x から X に変換すると，

$$K_{IA} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a p(x) \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-2a}^0 p(X+a) \sqrt{\frac{2a+X}{-X}} dX \quad (3-106)$$

となる．今，ひび割れが十分に大きいとして，無限体中のひび割れを半無限体中のひび割れとみなすと，

$$\lim_{a \rightarrow \infty} K_{IA} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{\pi a}} \int_{-2a}^0 p(X+a) \sqrt{\frac{X}{2a} + 1} \sqrt{\frac{-X}{-X}} dX = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{q(X)}{\sqrt{-X}} dX \quad (3-107)$$

となる。ここに、 $q(X)=p(X+a)$ である。 $q(X)$ は開口方向が正であるため、閉口方向を正とする結合力 $\sigma_b(x)$ に置き換える。

$$q(X) = -\sigma_b(X) \quad (3-108)$$

結合力による応力拡大係数 K_b は、

$$K_b = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{-\sigma_b(X)}{\sqrt{-X}} dX \quad (3-109)$$

が得られる。 K_a と K_b を重ね合わせることで、 K_{tip} が得られる。

$$K_{tip} = 1.12\sigma_{\infty}\sqrt{\pi a} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{-\sigma_b(X)}{\sqrt{-X}} dX \quad (3-110)$$

右辺の第2項は負であるため、 K_{tip} は K_a よりも小さくなる。これは、ひび割れの長さ a と荷重による応力 σ_{∞} が同じときに、ひび割れに結合力が生じる複合材料においては補強されていない母材よりも応力拡大係数が小さくなることを意味している。仮に、破壊靱性 K_c が複合材料と母材とで大きく違わないとすると、破壊はIrwinの破壊規準 $K_{tip}=K_c$ を満たすときであるため、補強されていない母材が先に破壊することになる。

結合力 $\sigma_b(x)$ についてももう少し考える。繊維補強セメントのような複合材料では、長さ10~20mm程度の繊維がひび割れで応力を伝達する。荷重を加えるにつれてひび割れは徐々に開口し、同時に繊維は母材であるセメントから抜け出てくる。最終的には開口幅が繊維長を超えると伝達応力がゼロになる。このように結合力は開口幅によって変化する。結合力を知るには、着目位置の開口幅と繊維長のような材料特性を知る必要がある。

しかし、開口幅は、同じ供試体でも荷重条件によって異なり、供試体の寸法やひび割れの配置が変われば当然異なる。結合力 $\sigma_b(x)$ は、荷重条件、ひび割れ形状、供試体形状により影響を受ける構造挙動であるので、 σ_b は位置の関数として考えるより、開口幅 δ の関数とするほうが扱いやすい。つまり、

$$\sigma_b(x) = \sigma_b(\delta(x)) \quad (3-111)$$

として、材料特性としての $\sigma_b(\delta)$ と構造挙動としての $\delta(x)$ を分けて考えるほうがよい。

$\sigma_b(\delta)$ は架橋則と呼ばれ、 δ が位置によらずに一定の条件、例えば一軸引張試験、を行うことで、伝達応力と開口幅の関係を得ることができる（図3-41）。

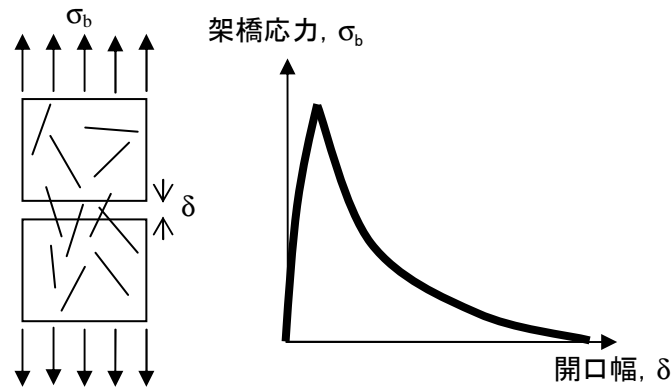


図3-41 架橋則の計測

3.3.3 J積分

エネルギー解放率 G については線形弾性体を用いて説明を行った。実際の材料では、小規模降伏を起こす弾塑性材料に適用可能である。ひび割れ先端周辺での降伏領域が大きい場合には、 G を線形弾性応力場から求めることができない。J積分を用いることで、弾塑性材料についてエネルギー解放率を求めることができる。

エネルギー解放率

J積分は、非線形弾性体中でひび割れ進展が起こる際の全ポテンシャルエネルギーの変化として定義される。3次元空間において全ポテンシャルエネルギー Π は、

$$\Pi = \int_{\Sigma} U(\epsilon_{ij}) dV - \int_{\Gamma} t_i u_i dS \quad (3-112)$$

であらわされる。ここに、 U はひずみエネルギー密度であり、

$$U(\epsilon_{ij}) = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij}(\epsilon_{ij}) d\epsilon_{ij} \quad (3-113)$$

であらわされる。

2次元空間において Π は、

$$\Pi = \int_{\Sigma} U(\epsilon_{ij}) dA - \int_{\Gamma} t_i u_i ds \quad (3-114)$$

とあらわされる (図 3-42 参照).

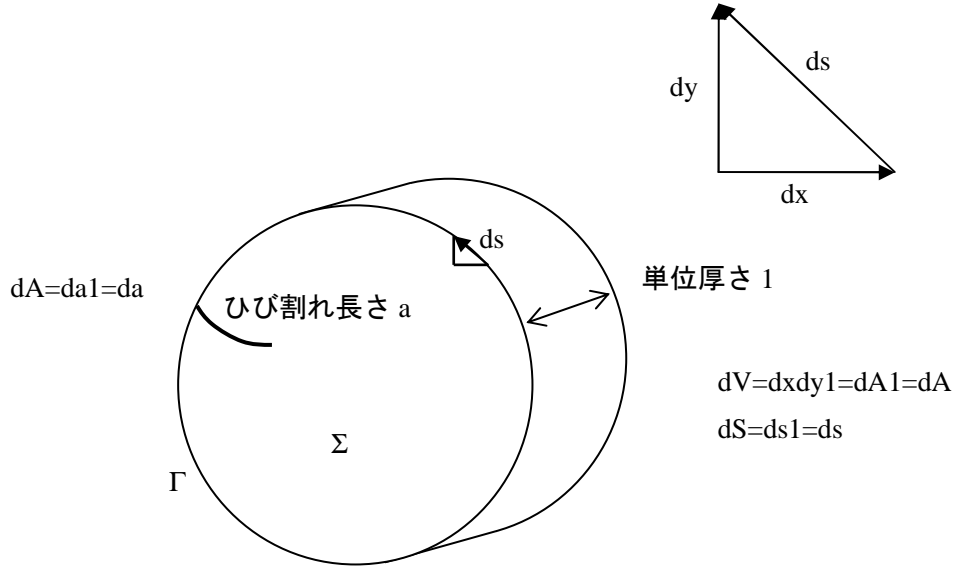


図 3-42 ひび割れを有する 2 次元物体

よって、ひび割れ進展の際の全ポテンシャルエネルギーの変化は、

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = \int_{\Sigma} \frac{\partial U}{\partial a} dA - \int_{\Gamma} t_i \frac{\partial u_i}{\partial a} ds \quad (3-115)$$

となる。J 積分は

$$J = -\frac{\partial \Pi}{\partial a} \quad (3-116)$$

で定義されるが、以下では x - y 座標系で使いやすい形に変形する。

まず、自己相似ひび割れ進展を仮定する。自己相似ひび割れ進展とは、ひび割れ進展の前後でひび割れ周辺の変位場が同じであることを意味する。つまり、進展の前後でひび割れ先端から相対的に同じ位置での変位やひずみエネルギーが同じになり、

$$u_i(x, y, a + \Delta a) = u_i(x - \Delta a, y, a) \quad (3-117)$$

$$U(x, y, a + \Delta a) = U(x - \Delta a, y, a) \quad (3-118)$$

の関係式が得られる.

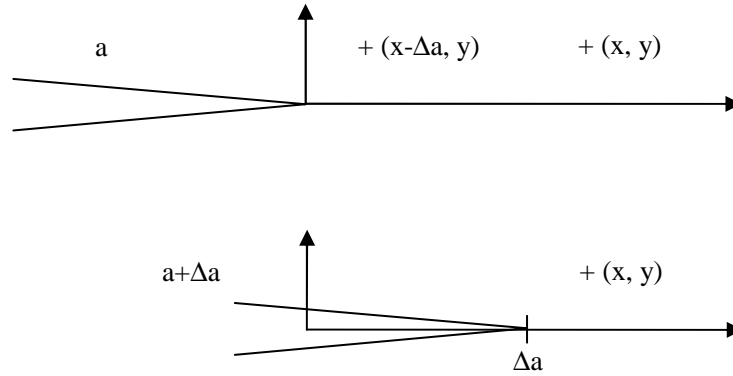


図 3-43 自己相似ひび割れ進展

この関係式を変形すると,

$$u_i(x, y, a + \Delta a) - u_i(x, y, a) = u_i(x - \Delta a, y, a) - u_i(x, y, a) \quad (3-119)$$

$$\frac{u_i(x, y, a + \Delta a) - u_i(x, y, a)}{\Delta a} = \frac{u_i(x - \Delta a, y, a) - u_i(x, y, a)}{\Delta a} \quad (3-120)$$

$$\frac{u_i(x, y, a + \Delta a) - u_i(x, y, a)}{(a + \Delta a) - a} = - \frac{u_i(x, y, a) - u_i(x - \Delta a, y, a)}{x - (x - \Delta a)} \quad (3-121)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial a} = - \frac{\partial u_i}{\partial x} \quad (3-122)$$

が得られ, また,

$$\frac{\partial U}{\partial a} = - \frac{\partial U}{\partial x} \quad (3-123)$$

となる. これらを用ると, J 積分の定義式は次式のようになる.

$$J = - \frac{\partial \Pi}{\partial a} = \int_{\Sigma} \frac{\partial U}{\partial x} dx dy - \int_{\Gamma} t_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \quad (3-124)$$

さらに，ガウスの発散定理

$$\int_{\Sigma} F_{,j} dV = \int_{\Gamma} F n_j dS \quad (3-125)$$

を用いて体積積分を表面積分に変換することにより

$$J = \int_{\Gamma} \left[U n_x - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right] ds \quad (3-126)$$

となる．

下図の関係を用いて，第1項の ds を消去し，

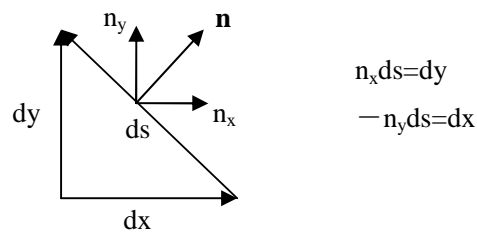


図 3-44 ds の関係式

$$J = \int_{\Gamma} \left[U dy - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right] \quad (3-127)$$

コーシーの関係式

$$t_j = \sigma_{ij} n_i \quad (3-128)$$

を用いると，

$$\begin{aligned} t_i \frac{\partial u_i}{\partial x} &= t_x \frac{\partial u}{\partial x} + t_y \frac{\partial v}{\partial x} + t_z \frac{\partial w}{\partial x} \\ &= (\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y) \frac{\partial u}{\partial x} + (\sigma_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y) \frac{\partial v}{\partial x} + (\sigma_{zx} n_x + \sigma_{zy} n_y) \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (3-129)$$

であるため，第2項の ds を消去できる．最終的に J 積分は

$$J = \int_{\Gamma} \left[\left\{ U - \left(\sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{yx} \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_{zx} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} dy + \left(\sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_{zy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \right] \quad (3-130)$$

と表すことができる。ここで、 J 積分は x - y 座標系の変位と応力で表されている。

経路非依存性

J 積分の値は積分経路に依存しない。今、線形弾性体内に閉じた積分経路 Γ を考える (図 3-45)。 Γ に囲まれた領域 Σ の弾性体には、ひび割れがなく体積力も作用していないとする。

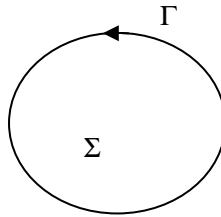


図 3-45 積分経路 Γ

この時の J 積分を I と呼ぶ。 I はコーシーの関係式を用いて、

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{\partial U}{\partial x} dx dy - \int_{\Gamma} t_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds = \iint_{\Sigma} \frac{\partial U}{\partial x} dx dy - \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \quad (3-131)$$

となり、ガウスの発散定理により、

$$I = \iint_{\Sigma} \left[\frac{\partial U}{\partial x} - \sigma_{ij,j} \frac{\partial u_i}{\partial x} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} \right] dx dy \quad (3-132)$$

を得る。ここで、つり合いにより

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (3-133)$$

であるため、

$$I = \iint_{\Sigma} \left[\frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} \right] dx dy \quad (3-134)$$

となる。ここで、

$$\frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \quad (3-135)$$

であり、また、変位とひずみの関係から、

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3-136)$$

であるため、

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} \left[\sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} \right] dx dy \\ &= \iint_{\Sigma} \left[\sigma_{11} \frac{\partial \epsilon_{11}}{\partial x} + \sigma_{12} \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x} + \sigma_{21} \frac{\partial \epsilon_{21}}{\partial x} + \sigma_{22} \frac{\partial \epsilon_{22}}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. - \sigma_{11} \frac{\partial u_{1,1}}{\partial x} - \sigma_{12} \frac{\partial u_{1,2}}{\partial x} - \sigma_{21} \frac{\partial u_{2,1}}{\partial x} - \sigma_{22} \frac{\partial u_{2,2}}{\partial x} \right] dx dy \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3-137)$$

となり、積分値は 0 になる。

次に、図 3-46 の積分経路 $\Gamma_1 + \Gamma_+ - \Gamma_0 + \Gamma_-$ について J 積分を考える。この積分経路で囲まれる領域には、図 3-45 と同じく、ひび割れが存在せず体積力も作用しないことから、積分値は I と等しく 0 となる。

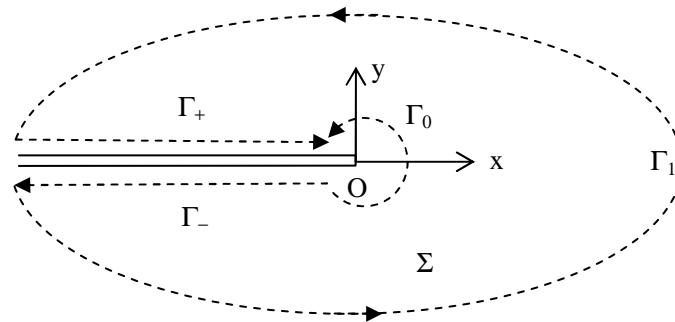


図 3-46 積分経路

J積分は

$$\begin{aligned}
 0 &= I \\
 &= J_{\Gamma_1} - J_{\Gamma_0} \\
 &+ \int_{\Gamma_+ + \Gamma_-} \left[\left\{ U - \left(\sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{yx} \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_{zx} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} dy + \left(\sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_{zy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \right]
 \end{aligned} \tag{3-138}$$

で表される。 Γ_+ と Γ_- の区間については、 dy が0であり、ひび割れ面で荷重が作用していないため $\sigma_{xy}=0$ 、 $\sigma_{yy}=0$ 、 $\sigma_{zy}=0$ であるので、積分値は0となる。よって、

$$0 = J_{\Gamma_1} - J_{\Gamma_0} \tag{3-139}$$

となり、

$$J_{\Gamma_1} = J_{\Gamma_0} \tag{3-140}$$

である。これは、ひび割れの周りでJ積分を評価すると積分経路に依らず同じ値になることを示している。以上により、J積分は経路非依存性を有することが示された。

3.3.4 J積分の特徴

線形弾性体における応力拡大係数 K とエネルギー解放率 G の特徴と比較しながら、J積分の特徴を以下に述べる。

荷重－変位曲線における J 積分の意味

J 積分は、非線形弾性体において、ひび割れ長さ a の場合の荷重－変位曲線と $a+da$ の場合の曲線で挟まれる面積に等しい。ひび割れ進展に際しての線形弾性体のエネルギー解放については既に 3.2.3 項において述べたが、非線形弾性体においても同様に図解による方法で説明できる。

下図に示す 2 本の曲線は、ひび割れ進展前と後の非線形弾性体の供試体の荷重－変位関係である。荷重一定 (Dead weight) でひび割れが進展したとすると、点 A から E に状態が変わったことに相当する。曲線の下面積が蓄積された弾性エネルギーであるため、前後で解放されたエネルギーは OAE の面積になる。変位一定 (Fixed end) の場合には点 A から B に状態が変わったことに相当し、OAB が解放されたエネルギーになる。両者の相違は ABE であるが、この面積は小さいため無視しうる。よって、 $OAE=OAB$ となり、载荷条件によらず解放されたエネルギーは等しく、進展面積で割ったエネルギー解放率も等しくなる。両者の面積は以下の式で表される。

$$J = \frac{1}{B} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial a} \right)_P = \frac{1}{B} \int_0^P \left(\frac{\partial v}{\partial a} \right)_P dP \quad (\text{Dead weight}) \quad (3-141)$$

$$J = \frac{-1}{B} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial a} \right)_v = \frac{-1}{B} \int_0^v \left(\frac{\partial P}{\partial a} \right)_v dv \quad (\text{Fixed end}) \quad (3-142)$$

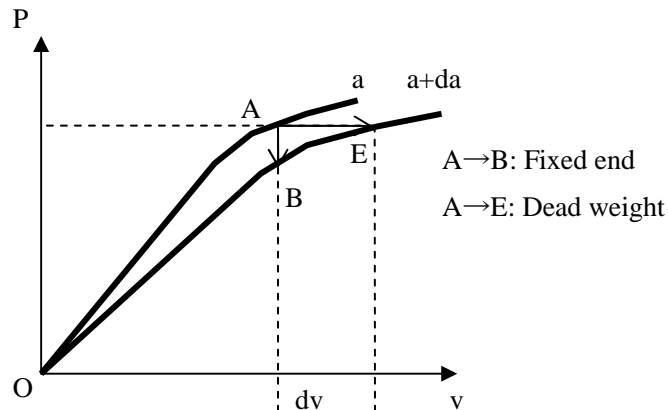


図 3-47 エネルギー解放

HRR 特異性

線形弾性体において、エネルギー解放率 G はひび割れが単位面積を進展する時に解放されるエネルギーであり、応力拡大係数 $K=(EG)^{1/2}$ を通して、ひび割れ周辺の局所場の強さを表している。同様に、J 積分も非線形弾性体においてひび割れ周辺の局所場の強さを表す。

今、非線形弾性体の応力－ひずみ関係が次の Ramberg-Osgood 則に従うものとする。

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_y} = \frac{\sigma}{\sigma_y} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_y} \right)^n \quad (3-143)$$

ここに、 ε_y =降伏時ひずみ、 σ_y =降伏強度、 α =ひずみ硬化係数、 n =ひずみ硬化指数である。右辺第1項による線形成分が第2項の非線形成分よりも十分に小さいなら、第1項を無視することで単純な関係とできる。

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_y} = \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_y} \right)^n \quad (3-144)$$

この応力-ひずみ関係に従う非線形弾性体の応力場は $r^{-1/(n+1)}$ の特異性を持ち、ひずみ場は $r^{-n/(n+1)}$ の特異性を持つことが、Hutchinson¹⁹⁾、Rice と Rosengren²²⁾ により示されている。彼らの名前にちなんで HRR 特異性と呼ばれるこの特異性は、ひずみ硬化指数 n を含むため、材料によって異なることになる。ここで、 J 積分は応力とひずみの局所場の強さを表している。 J 積分を用いて表される HRR 特異性の局所場を、HRR-field と呼んでいる。K-field と同様に、適用されるのはひび割れ周辺の局所場に限られる。

線形弾性体と小規模降伏における J と G の等価性

J 積分は、線形弾性体もしくは小規模降伏の場合に、エネルギー解放率 G と等価となり、 $J=G$ となる。線形弾性体を考えると、 J 積分の定義は G の定義と同じである。ゆえに J と G は等価である。線形弾性体ではなく弾塑性体を考えると、ひび割れ先端周辺には塑性域が形成されるが、塑性域の大きさが小規模降伏条件を満足する限りにおいては、線形破壊力学が適用可能であり、ゆえに J と G は等価となる。しかし、塑性域の大きさが小規模降伏条件を満足しないならば、線形破壊力学の適用範囲を超えており、 J 積分を用いなければならず、 J と G は等価ではない。さらに塑性域が大きく HRR 特異性が支配的な領域を超える場合は、全体降伏をしている状態であり、破壊の問題ではなく塑性変形の問題であり、 J 積分を用いることはしない。

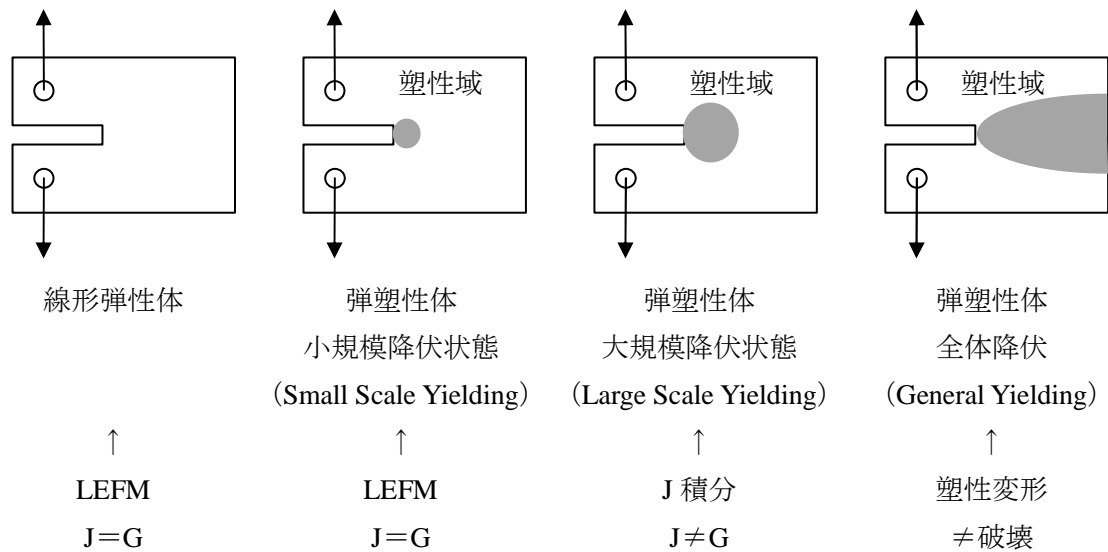


図 3-48 LEFM と J 積分の適用範囲

塑性破壊規準

J 積分は、非線形弾性体においてひび割れが単位長さを自己相似進展する際に解放されるエネルギーを意味する。ゆえに、J 積分は塑性破壊規準として用いることができる。つまり、

$$J = J_c \quad (3-145)$$

のときに、塑性破壊が生じる。しかしながら、実際の材料に適用するには幾つかの制限があることに注意が必要である（文献 16) の 9 章参照）。

3.3.5 J 積分による G の評価

J 積分を用いて線形弾性体のエネルギー解放率 G を評価することができる。ここでは下図のダブルカンチレバーを例として考える。供試体の上端と下端がそれぞれ一様に v_0 変位するとき、ひび割れ先端 O での G を求める。J 積分の積分経路は、ひび割れ先端 O を含むようにとる。下図には、ひび割れ先端近傍とした Γ_0 と、供試体の端部内側の点 O から点 A~F を通り、点 O に戻る Γ_1 が示されている。J 積分は経路非依存であるため、いずれの経路を通っても J 積分の値は変わらない。よって計算の容易な Γ_1 を用いて計算するものとする。

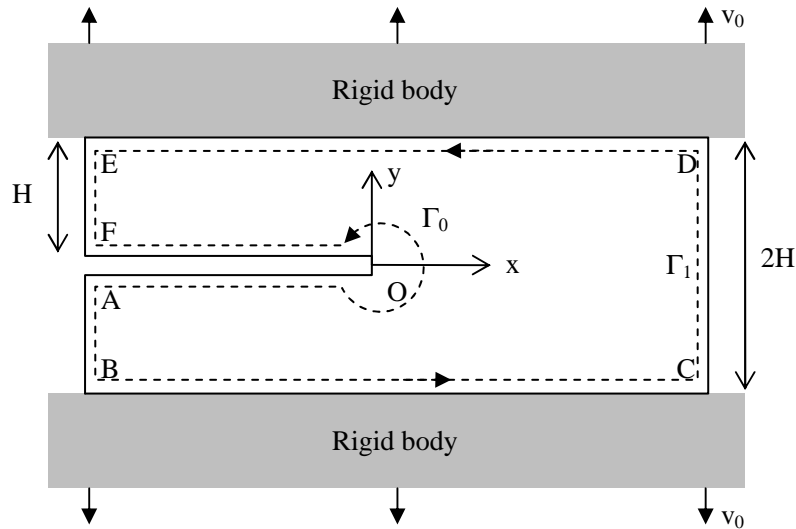


図 3-49 ダブルカンチレバー

J 積分は,

$$J = \int_{\Gamma_1} \left[\left\{ U - \left(\sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{yx} \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_{zx} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} dy + \left(\sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_{zy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \right] \quad (3-146)$$

により与えられる。まず、 Γ_1 上の区間 AB と EF について考える。原点 O より十分に遠いため、EF と AB はそれぞれ剛体とともに剛体変位をすることを考えられる。よって、ひずみエネルギー密度 U は 0 であり応力 σ_{ij} も 0 であるため、上式により $J_{AB}=J_{EF}=0$ となる。

区間 FO と OA は x 軸に平行であるため $dy=0$ である。また、ひび割れ面において荷重は作用しておらず、 $\sigma_{xy}=0$, $\sigma_{yy}=0$, $\sigma_{zy}=0$ である。よって、 $J_{FO}=J_{OA}=0$ となる。

区間 BC と DE も x 軸に平行であるため $dy=0$ となる。供試体の上端と下端は一樣に v_0 変位するため x に依存しない。つまり、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (3-147)$$

である。よって、 $J_{BC}=J_{DE}=0$ となる。

最後に区間 CD では y 軸に平行であるため $dx=0$ となる。また、供試体右端では荷重が作用していないため、 $\sigma_{xx}=0$, $\sigma_{yx}=0$, $\sigma_{zx}=0$ である。CD は上下方向にそれぞれ v_0 伸長している状態であり、ひずみエネルギー密度 U は、

$$U = \frac{1}{2} E \varepsilon_{yy}^2 = \frac{1}{2} E \left(\frac{v_0}{H} \right)^2 \quad (3-148)$$

となる。よって、 J_{CD} は

$$J_{CD} = \int_{-H}^H U dy = 2HU = \frac{E v_0^2}{H} \quad (3-149)$$

となる。

以上をまとめると、

$$J = J_{CD} = \frac{E v_0^2}{H} \quad (3-150)$$

であり、線形弾性体であるため、これはエネルギー解放率 G に等しい。また、応力拡大係数 K は

$$K = \sqrt{EG} = \frac{E v_0}{\sqrt{H}} \quad (3-151)$$

となる。

3.3.6 結合力を有するひび割れの J 積分

結合力が作用するひび割れの応力拡大係数について 3.3.2 項では述べた。ここでは J 積分について述べる。積分経路は、ひび割れ先端を含む近傍の Γ_0 、ひび割れ上面に沿った Γ_+ 、ひび割れ下面に沿った Γ_- 、ひび割れ先端より十分に離れた Γ_1 を考える (図 3-50 参照)。結合力は、ひび割れ面の直角方向のみを考え、せん断方向については考えないものとする。ひび割れは結合力の作用の下で開口変位を生じ、上面の変位を v_+ 、下面の変位を v_- とする。

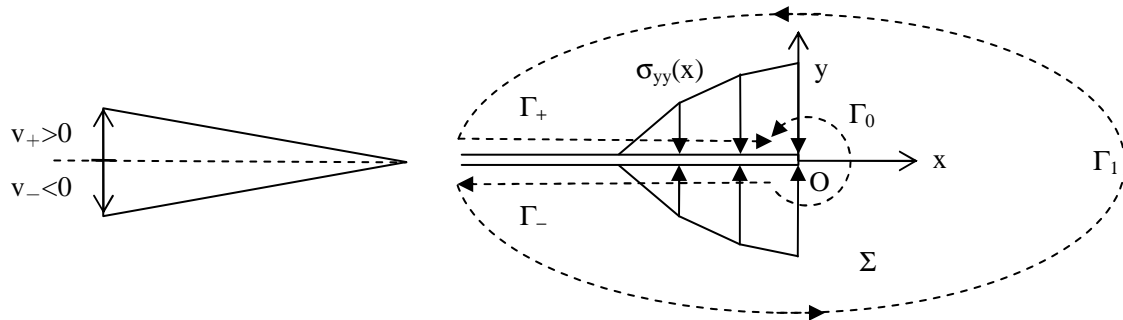


図 3-50 積分経路と開口変位

まず，区間 Γ_+ について考える．J積分は，

$$J_{\Gamma_+} = \int_{\Gamma_+} \left[U - \left(\sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{yx} \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_{zx} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] dy + \left(\sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_{zy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \quad (3-152)$$

であるが，区間 Γ_+ は x 軸に平行なため $dy=0$ である．また，結合力は σ_{yy} のみ仮定しているため， $\sigma_{xy}=0$ ， $\sigma_{zy}=0$ である．よって，

$$J_{\Gamma_+} = \int_{\Gamma_+} \sigma_{yy} \frac{\partial v_+}{\partial x} dx \quad (3-153)$$

となる．同様に，区間 Γ_- については， Γ_+ と向きが逆であることを考慮して，

$$J_{\Gamma_-} = \int_{\Gamma_-} \sigma_{yy} \frac{\partial v_-}{\partial x} dx = - \int_{\Gamma_+} \sigma_{yy} \frac{\partial v_-}{\partial x} dx \quad (3-154)$$

となる．両区間を合わせると，

$$J_{\Gamma_+} + J_{\Gamma_-} = \int_{\Gamma_+} \sigma_{yy} \frac{\partial(v_+ - v_-)}{\partial x} dx = \int_{\Gamma_+} \sigma_{yy} \frac{\partial \delta}{\partial x} dx = \int_{\Gamma_+} \sigma_{yy}(\delta(x)) \frac{\partial \delta}{\partial x} dx \quad (3-155)$$

が得られる。ここに、 $\sigma_{yy}(\delta)$ は架橋則と呼ばれ、別途材料試験から得られる材料特有の関係である（4章参照）。もし結合力が Γ_+ の区間内で0に消失するのであれば、区間 Γ_+ と Γ_- のJ積分値は架橋則の曲線の下面積に等しい。

$$J_{\Gamma_+} + J_{\Gamma_-} = \int_{\Gamma_+} \sigma_{yy}(\delta(x)) \frac{\partial \delta}{\partial x} dx = \int_0^{\delta_{crit}} \sigma_{yy}(\delta) d\delta = J_b \quad (3-156)$$

これを J_b と呼ぶことにする。

次に、 Γ_- 、 Γ_1 、 Γ_+ を通り、 Γ_0 を負の方向に通る閉じた積分経路を考える。この積分経路で囲まれる領域内にはひび割れ先端が含まれないため、J積分の値は0となる。

$$J_{\Gamma_1} - J_{\Gamma_0} + J_{\Gamma_+} + J_{\Gamma_-} = I = 0 \quad (3-157)$$

区間 Γ_1 のJ積分値を J_∞ 、 Γ_0 を J_a 、 Γ_+ と Γ_- を J_b と呼ぶこととすると、

$$J_\infty - J_a + J_b = 0 \quad (3-158)$$

$$J_\infty = J_a - J_b \quad (3-159)$$

結合力の作用によりエネルギー解放率が低減されていることを本式は示している。0項で得た応力拡大係数による式と類似している。

$$K = K_a + K_b \quad (3-160)$$

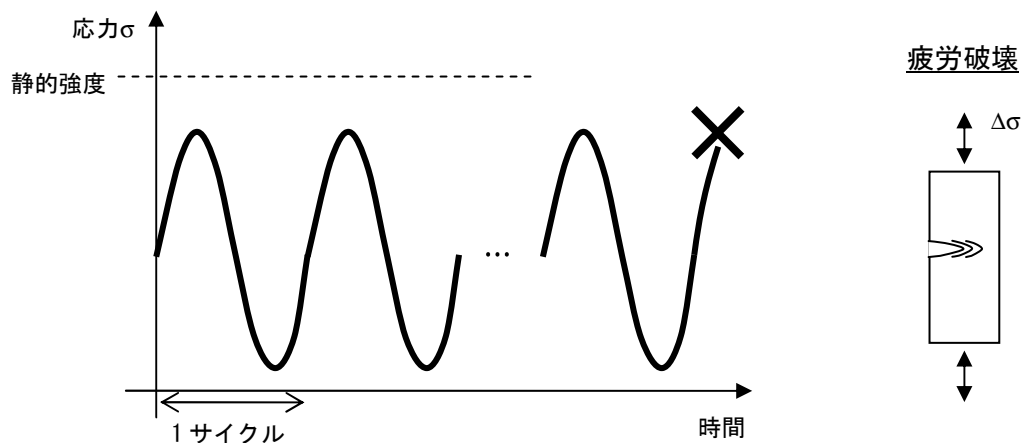
ここで、 K_b は負の値をとることを思い起こす必要がある。

3.4 疲労破壊

多くの場合、破壊による事故は時間依存の現象により引き起こされる。つまり、上述の静的な破壊規準に満たない荷重であっても、ひび割れが徐々に進展し、最終的には静的破壊規準を満たす長さに成長することにより、破壊が生じる。供用中の構造物が突然破壊するという事故は、こうした時間依存の破壊によるものがほとんどである。過去に多くの事故が発生し、破壊力学はこれを教訓として大きく発展したが、現在でも事故が無くなってはいない。

こうした時間依存の破壊として、疲労破壊、クリーブ破壊、腐食疲労、応力腐食割れが挙げられる（図 3-51）。疲労破壊は静的破壊規準に満たないレベルでの繰返し荷重により起こり、クリーブ破壊は静的破壊規準に満たないレベルでの一定荷重により起こる。腐食疲労は腐食と疲労破壊が相互作用してひび割れが進展し破壊に至る現象である。腐食疲労は、腐食が作用しない疲労破壊と比較して速く進展し、低い繰返し荷重レベルで生じることが多い。例えば、塩水中の鋼材では、寿命として 5 千万回の荷重繰返しサイクル数を与える応力レベルが 1/4 に減少する²³⁾。応力腐食割れは静的破壊規準に満たないレベルでの一定荷重の作用であるのに、腐食環境によりひび割れと破壊が生じる現象である。例として、アンモニア中の真鍮、塩水中における一部のアルミニウム合金とチタン合金、苛性ソーダ中の軟鋼があげられる²³⁾。

本節では、疲労破壊について述べる。まず、最も一般的に用いられる応力による方法を説明してから、破壊力学による方法を説明する。



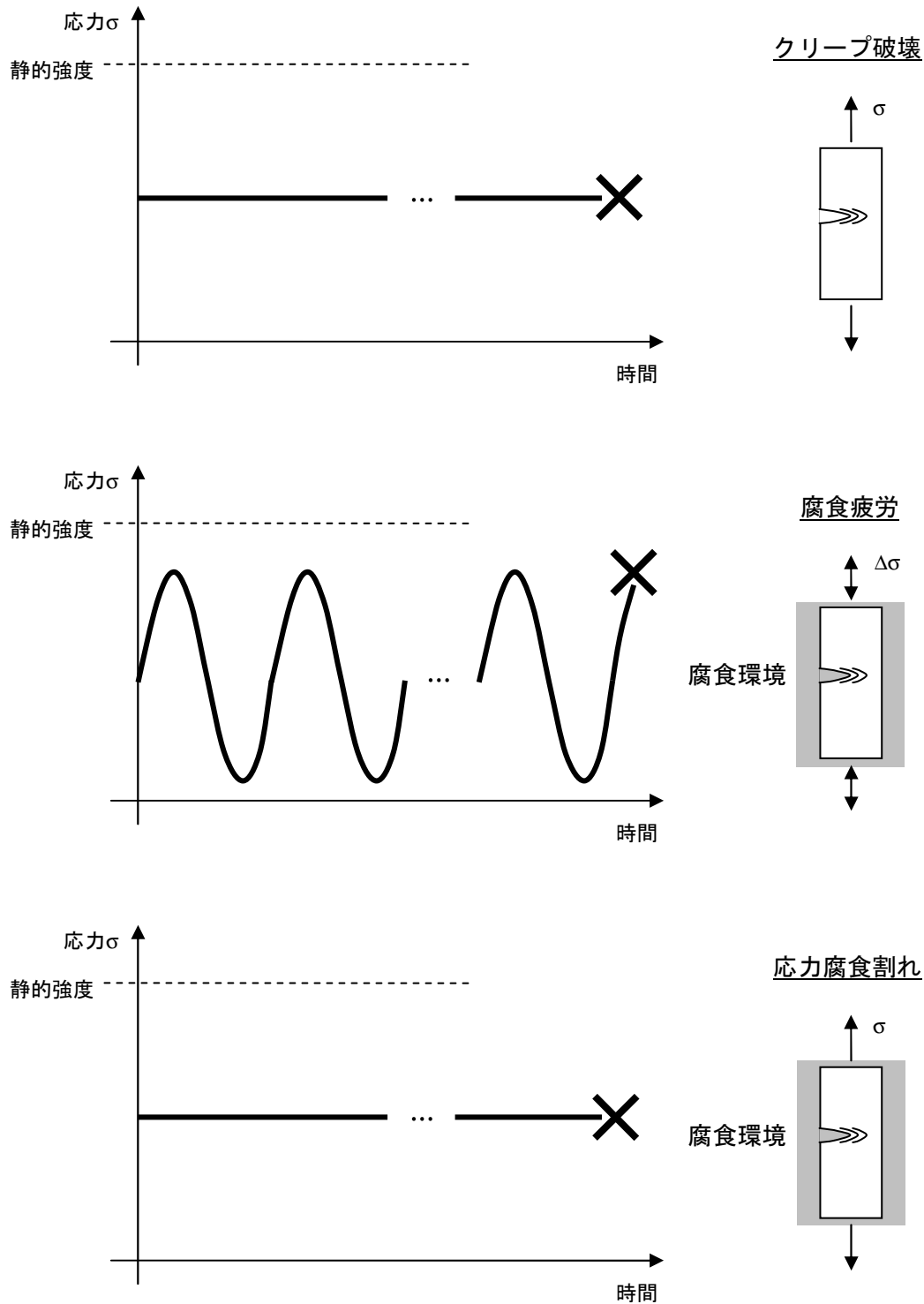


図 3-51 時間依存の破壊（疲労破壊，クリープ破壊，腐食疲労，応力腐食割れ）

3.4.1 応力による方法

応力による方法は Stress-Life Approach と呼ばれ，疲労を取り扱う際に最もよく使われる方法である．Stress-Life Approach では，以下の手順により S-N 図を得ることで疲労特性を把握する．

まず、図 3-52 に示すような静的破壊規準に満たないレベルでの一定繰返し荷重を設定する。この繰返し荷重で供試体を載荷し、破壊に至るまでの繰返しサイクル数 N_f を得る。 N_f は疲労寿命とも呼ばれる。一般的に疲労寿命は桁が変わるほど供試体ごとのバラツキが大きいため、同一载荷条件で十分な数の供試体から疲労寿命を得て、平均値を得ることが必要である。

金属材料では、図 3-53 に示すような回転曲げ疲労試験機を用いて、中央部がくびれた丸棒試験体を回転させつつ曲げモーメントを作用させて疲労試験を行う。回転により、中央部の各点は平均応力 0 で、同じ大きさの引張と圧縮応力を繰返し受けることになる。この試験の荷重状態は、 $R = -1$ 、 $A = \infty$ で表され、交番载荷と呼ばれる。

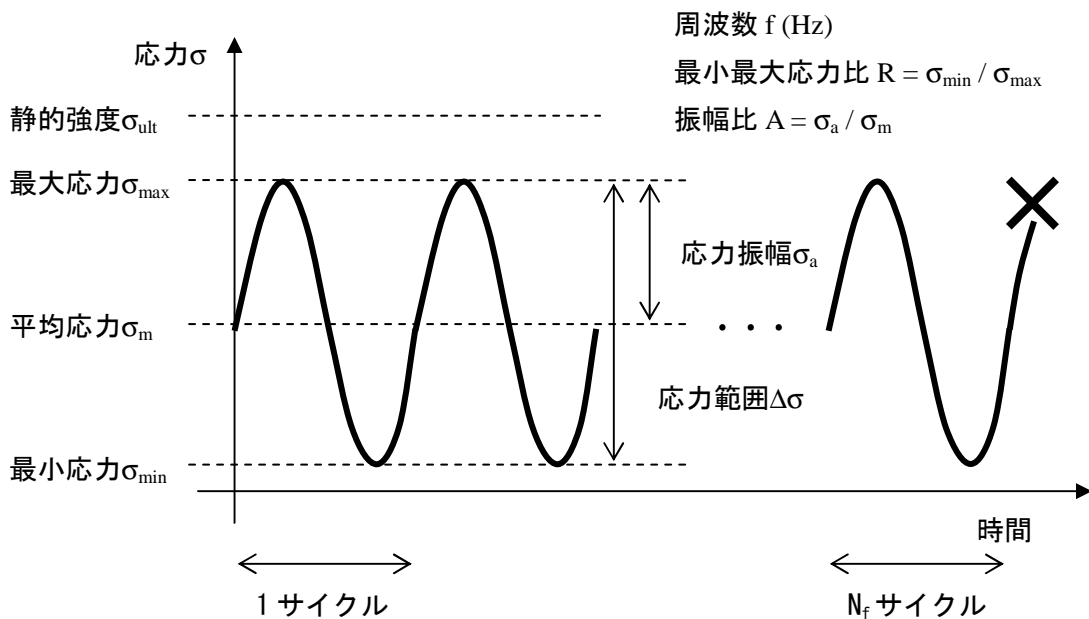


図 3-52 疲労载荷の用語

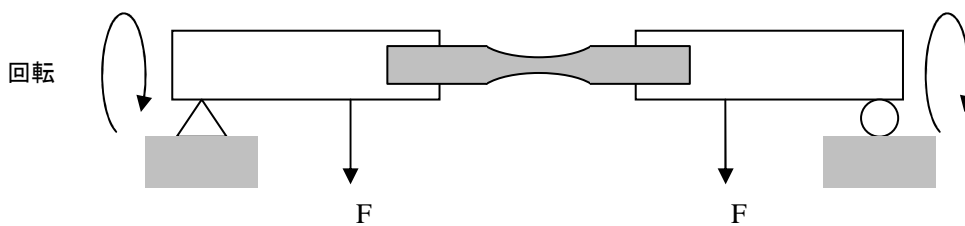


図 3-53 回転曲げ疲労試験

次に、応力振幅を変えて同様に十分な数の供試体から N_f の平均値を得る。これを繰り返すことで、応力振幅と疲労寿命との関係が得られる。応力振幅を静的強度に対する比で表し、疲労寿命との関係を示したものを、S-N 図と呼ぶ。S-N 図は、片対数（疲労寿命のみ対数）もしくは両対数で作成される。以後は区別のため、応力振幅と静的強度の比を応力比 S_a と呼ぶ。

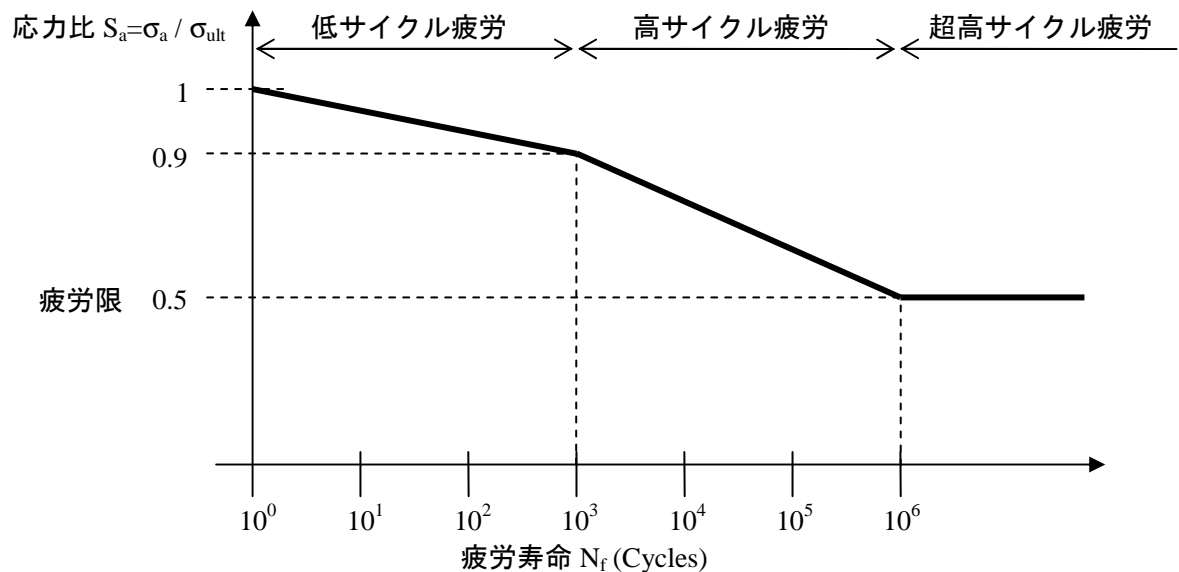


図 3-54 鋼の概略 S-N 図

図 3-54 に示しているのは鋼の概略的な S-N 図である。応力振幅を下げていくと疲労寿命が延び、ある応力振幅を下回ると疲労寿命が飛躍的に延びる。この応力振幅値を疲労限 (fatigue limit) と呼ぶ。S-N 図は、低サイクル疲労、高サイクル疲労、超高サイクル疲労の 3 つの領域に分けられる。

低サイクル疲労は疲労寿命 10^3 回までの領域であり、鋼は応力比 0.9~1.0 でこの領域の疲労寿命を呈する。こうした高い応力比での繰返し载荷は、通常の供用状態では現れず、地震時などでこうした繰返し载荷を受けることになる。この領域の S-N 線の傾きは小さいため、S-N 図を用いた応力による方法は適当ではない。また、変形には塑性変形が含まれるため、ひずみによる方法 (Strain-Life Approach) を用いるのが適当である。

高サイクル疲労は疲労寿命 $10^3 \sim 10^6$ 回の領域であり、鋼は応力比 0.5~0.9 でこの領域のサイクル数で破壊する。こうした応力比は通常の供用状態で現れ、変形は主に弾性範囲内である。S-N 図を用いた応力による方法は、この高サイクル疲労の領域について用いるのが適当である。

応力比が 0.5 を下回ると、構造物の分野によっては無限の寿命を持つとみなしてもよいくらい飛躍的に疲労寿命が延びる。だが、分野によっては 10^6 回以上の疲労寿命も重要となるため、この領域を超高サイクル疲労と呼び、研究がなされている。

高サイクル疲労の S-N 線は次式

$$\sigma_a = 10^c N_f^b \quad (10^3 < N < 10^6) \quad (3-161)$$

もしくは、

$$\log_{10} \sigma_a = C + b \log_{10} N_f \quad (10^3 < N < 10^6) \quad (3-162)$$

により表される。鋼の場合、係数 C と b は 10^3 回と 10^6 回の点を用いて、次のように得られる。

$$b = -\frac{1}{3} \log_{10} \frac{\sigma_{1000}}{\sigma_e} = -\frac{1}{3} \log_{10} \frac{0.9\sigma_{ult}}{0.5\sigma_{ult}} = -0.085$$

$$C = \log_{10} \frac{(\sigma_{1000})^2}{\sigma_e} = \log_{10} \frac{(0.9\sigma_{ult})^2}{0.5\sigma_{ult}}$$

$$10^C = \frac{(0.9\sigma_{ult})^2}{0.5\sigma_{ult}} = 1.62\sigma_{ult} \quad (3-163)$$

ここで σ_e は疲労限を与える応力振幅である。よって、鋼の場合、

$$\sigma_a = 1.62\sigma_{ult} N_f^{-0.085} \quad (10^3 < N < 10^6) \quad (3-164)$$

が $S-N$ 線となる。

黄銅やアルミニウム合金などの非鉄金属では、疲労限が観察されず、 10^7 回を超えても曲線が下がっていく挙動を示す。

コンクリートや繊維補強コンクリートなどのセメント系材料では、円柱の圧縮もしくは梁の曲げによる疲労試験が一般的である。これは、セメント系材料では、機械構造物と異なり、主用途である社会基盤構造物の部材において圧縮と曲げが重要であるからである。

圧縮もしくは曲げの荷重状態は、 $R = 0 \sim 1$ 、 $A = 1 \sim 0$ の範囲内であり、片振り载荷と呼ばれる。多くの試験では、 R を 0.2 程度の一定の値に保ち、応力範囲を変えて行った結果が報告されている。これに伴い、 $S-N$ 図の縦軸の応力比 S も応力範囲もしくは最大応力の静的強度に対する比で表される。なお、 R を 0 としないのは、最小応力時において試験機と供試体の接触が失われ、次のサイクルで衝撃的な载荷が生じないようにするためである。

通常、セメント系材料について低サイクルと高サイクルの疲労領域を分けて考えることはされていない。また、疲労限の存在も明確には確かめられていない。疲労寿命については、社会基盤構造物に想定される寿命を考慮して、 2×10^6 回で試験を打ち切る場合が多い。その際、 2×10^6 回の疲労寿命を与える最大応力を 2×10^6 回時疲労強度と呼ぶこともある。

コンクリートの圧縮疲労については松下・徳光により詳細に研究されている²⁴⁾。圧縮疲労寿命分布について理論分布との適合度確認により、対数正規分布、Weibull 分布、McCall 分布の 3 種類の分布のいずれにも適合するとの結果を得ている。実用的には疲労試験の $S-N$ 図で疲労寿命 N が対数で表されることから対数正規分布を用いて議論が進められている。

表 3-2 は、松下・徳光と他の研究者による実験結果をまとめたものである。様々な圧縮強度と最小最大応力比について S-N 式が求められており、 2×10^6 回時の圧縮疲労強度は圧縮強度の 0.624 から 0.748 の間に分布していることが分かる。

表 3-2 コンクリートの圧縮疲労強度

| 圧縮強度 (MPa) | 最小最大応力比 (%) | S-N 式 | 2×10^6 回時 圧縮疲労強度 |
|--------------------------|----------------|--|------------------------------|
| 29.5 ²⁴⁾ | 2 | $\log_{10} N_f = 18.5 - 0.185S_{\max}$ | 0.659 |
| 16.1~31.2 ²⁴⁾ | 8 | $\log_{10} N_f = 19.0 - 0.190S_{\max}$ | 0.668 |
| 18.8~27.9 ²⁴⁾ | 30 | $\log_{10} N_f = 22.0 - 0.210S_{\max}$ | 0.748 |
| 41.2 ²⁵⁾ | 5 | $\log_{10} N_f = 16.1 - 0.157S_{\max}$ | 0.624 |
| 41.4 ²⁶⁾ | 10 | $\log_{10} N_f = 18.2 - 0.182S_{\max}$ | 0.654 |
| 28.2 ²⁷⁾ | 2 | $\log_{10} N_f = 20.5 - 0.214S_{\max}$ | 0.663 |
| 39.2~63.7 ²⁸⁾ | 14~22 | $\log_{10} N_f = 21.6 - 0.233S_{\max}$ | 0.657 |
| 22.9 ²⁹⁾ | 8.6 | $\log_{10} N_f = 19.4 - 0.191S_{\max}$ | 0.683 |

松下・徳光はこのような実験結果に基づき、最大応力と静的強度との比 S_{\max} 、最小応力と静的強度の比 S_{\min} 、疲労寿命 N_f との関係を表式のように得ている。

$$\log_{10} N_f = 17.5 \frac{1 - S_{\max}}{1 - S_{\min}} \quad (3-165)$$

コンクリート構造物においては死荷重の占める割合が大きいことなどから S_{\min} も含めた S_{\max} と N_f との関係で表すのが実用的であるとしている。また、応力範囲と静的強度の比 $S_r (= S_{\max} - S_{\min})$ を用いると次式のように表される。

$$\log_{10} N_f = 17.5 \left(1 - \frac{S_r}{1 - S_{\min}} \right) \quad (3-166)$$

この式は疲労寿命 2×10^6 回に対して $S_{\min} = 0$ とすると、 $S_r = 0.64$ を与える。

近年、良質のコンクリート用骨材の確保が困難となっていることから、廃棄物由来の骨材の活用が望まれているが、こうしたコンクリートの圧縮疲労についての研究が井上らによりなされている³⁰⁾。ここでは、熔融スラグを用いた粗骨材 (S)、廃瓦細骨材 (R)、石灰石を用いた細および粗骨材 (L)、普通骨材 (N) の 4 種類のコンクリートについて疲労実験が行われている。結果を表 3-4 にまとめるが、廃棄物由来の骨材を用いたコンクリートは普通骨材のコンクリートと比較して、疲労強度に大きな違いがあるわけではない。式(3-165)を同様に求めると、S, R, L, N について、右辺の係数は 15.9, 16.1, 19.1, 17.6 になると報告されている。

表 3-3 廃棄物由来骨材を用いたコンクリートの圧縮疲労強度³⁰⁾

| | 圧縮強度 (MPa) | 最小最大応力比 (%) | S-N 式 | 2×10^6 回時 圧縮疲労強度 |
|---|---------------|----------------|---|------------------------------|
| S | 31.9 | 10 | $\log_{10} N_f = 18.70 - 0.191S_{\max}$ | 0.650 |
| R | 30.8 | | $\log_{10} N_f = 18.10 - 0.180S_{\max}$ | 0.655 |
| L | 29.5 | | $\log_{10} N_f = 20.02 - 0.197S_{\max}$ | 0.696 |
| N | 30.4 | | $\log_{10} N_f = 20.37 - 0.206S_{\max}$ | 0.683 |

水中あるいは絶えず湿潤状態にあるコンクリートの圧縮疲労においては、大気中の気乾状態にあるコンクリートと比較して疲労寿命が短くなることが実験により明らかにされており、松下による報告を表 3-4 に示す³¹⁾。

表 3-4 コンクリートの圧縮疲労強度（水中状態）³¹⁾

| 圧縮強度 (MPa) | 最小最大応力比 (%) | S-N 式 | 2×10^6 回時 圧縮疲労強度 |
|---------------|----------------|---|------------------------------|
| 20.7~36.1 | 10 | $\log_{10} N_f = 13.24 - 0.138S_{\max}$ | 0.503 |
| 19.6~26.7 | 30 | $\log_{10} N_f = 20.48 - 0.214S_{\max}$ | 0.663 |
| 17.2~26.7 | 50 | $\log_{10} N_f = 24.29 - 0.245S_{\max}$ | 0.734 |

これらの結果に基づき、松下は気乾状態のコンクリートと同様に以下の式を得ている

$$\log_{10} N_f = 11.7 \left(1 - \frac{S_r}{1 - S_{\min}} \right) \quad (3-167)$$

疲労寿命 2×10^6 回に対しては $S_r = 0.46$ を与え、7 割程度の強度となる。

文献 24) と 31) では、上式 (3-166) と (3-167) に加えて、生存確率 (90 および 95%) と静的強度の変動係数 (0 および 15%) を考慮した式も得ている。上 2 式は生存確率 50% についてであるが、例えば、式(3-166)において疲労寿命 10^7 回で $S_{\min} = 0$ とすると $S_r = 0.60$ であるところに、生存確率 90% で静的強度の変動係数 0% の時には 0.487, 90% と 15% の時には 0.468, 95% と 15% の時には 0.418 と低下することが示されている。

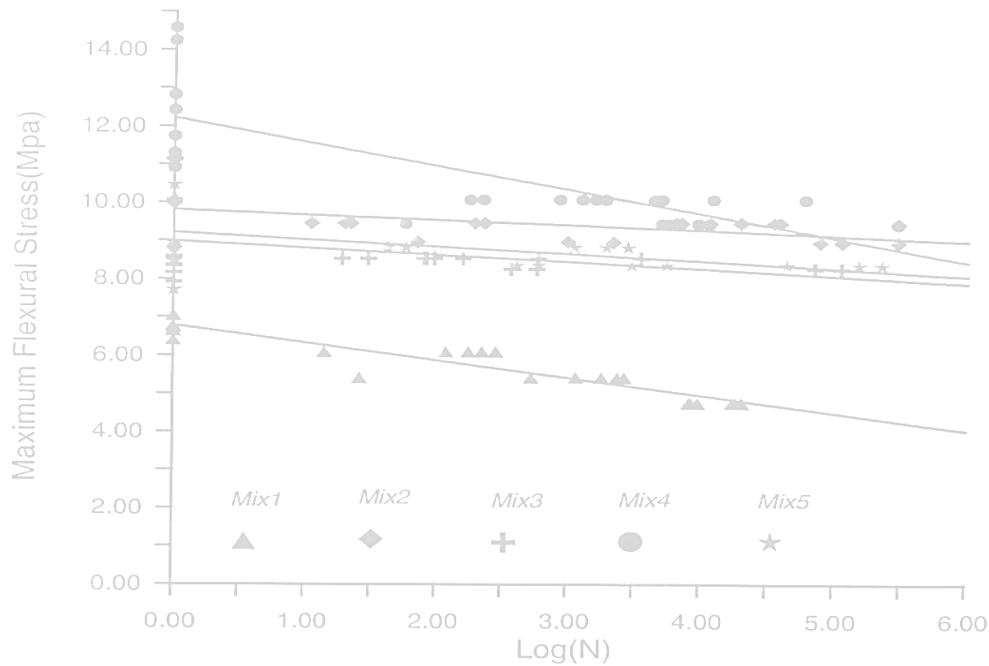


図 3-55 コンクリートと繊維補強コンクリートの曲げ疲労 S-N 図

(Mix1 コンクリート, Mix2 鋼繊維 (体積混入率 1%), Mix3 フック形状鋼繊維 (1%), Mix4 フック形状鋼繊維 (2%), Mix5 フック形状鋼繊維+ポリプロピレン (1%+1%))³⁸⁾

図 3-55 は、コンクリートと繊維補強コンクリートの曲げ疲労 S-N 図の一例である。ここでは、縦軸は最大応力で表されている。繊維の混入により繊維補強コンクリートはコンクリートと比較して静的強度の向上が得られ、同レベルの曲げ応力下においては大幅に疲労寿命が延びることが示されている。しかしながら、縦軸を最大応力と静的強度の比 S_{max} とした場合には繊維補強コンクリートは必ずしもコンクリートより疲労寿命が延びるわけではないことも見てとれる。

繊維補強コンクリートについては繊維の種類と混入率によって疲労強度が大きく異なるが、曲げにおいて疲労寿命 2×10^6 回を与える最大応力と静的強度の比 S_{max} は概ね 0.5~0.7 あたりとなる結果が多く報告されており (表 3-5)、コンクリートと比較して格段に大きくなるわけではない。

表 3-5 繊維補強コンクリートの曲げ疲労強度

| 繊維種類 | 体積混入率 (%) | 曲げ疲労強度 | サイクル数 (cycles) |
|-------------------------|-----------|--------|------------------------|
| ステンレス鋼繊維 ³²⁾ | 0.0 | 0.30* | 1×10^6 |
| | 1.2 | 0.47* | $2 \sim 3 \times 10^6$ |
| | 2.3 | 0.56* | $2 \sim 3 \times 10^6$ |
| | 3.3 | 0.64* | $2 \sim 3 \times 10^6$ |
| ステンレス鋼繊維 ³³⁾ | 0.0 | 0.35 | 2×10^6 |
| | 0.5 | 0.44 | 2×10^6 |
| | 1.0 | 0.51 | 2×10^6 |
| | 1.5 | 0.40 | 2×10^6 |
| 波形鋼繊維 ³³⁾ | 0.5 | 0.70 | 2×10^6 |
| | 1.0 | 0.55 | 2×10^6 |

| | | | |
|---------------------------------------|--------------------------|--|--|
| 鋼繊維 ³³⁾ | 0.5 1.0 | 0.67 0.60 | 2×10^6 2×10^6 |
| ポリプロピレン繊維 ³³⁾ | 0.5 1.0 | 0.70 0.67 | 2×10^6 2×10^6 |
| 小繊維状ポリプロピレン繊維 ³⁴⁾ | 0.5 | 0.59 | 2×10^6 |
| 小繊維状ポリプロピレン繊維 ³⁵⁾ | 0.0 0.1 0.2 0.3 | 0.50~0.55 ~0.71 0.53~0.68 0.59~0.69 | 2×10^6 2×10^6 2×10^6 2×10^6 |
| フック形状鋼繊維 ³⁶⁾ | 0.0 0.53 0.8 | 0.50~0.55 ~1.0 0.92~1.17 | 2×10^6 2×10^6 2×10^6 |
| フック形状鋼繊維 ³⁶⁾ | 0.53 0.8 | 0.99 0.92 | 2×10^6 2×10^6 |
| 鋼繊維 ³⁷⁾ | 0.0 0.5 1.0 | 0.55 0.65 0.64 | 2×10^6 2×10^6 2×10^6 |
| 波形鋼繊維 ³⁷⁾ | 0.5 1.0 | 0.62 0.58 | 2×10^6 2×10^6 |
| フック形状鋼繊維 ³⁷⁾ | 0.5 1.0 | 0.69 0.71 | 2×10^6 2×10^6 |
| ポリプロピレン繊維 ³⁷⁾ | 0.5 1.0 | 0.66 0.70 | 2×10^6 2×10^6 |
| 鋼繊維 ³⁸⁾ | 0.0 1.0 | 0.60 0.90 | 10^6 10^6 |
| フック形状鋼繊維 ³⁸⁾ | 1.0 2.0 | 0.87 0.65 | 10^6 10^6 |
| フック形状鋼繊維 +ポリプロピレン繊維 ³⁸⁾ | 1.0 +1.0 | 0.87 | 10^6 |
| 炭素繊維 ³⁹⁾ | 2.0 | 0.90 | 0.85×10^6 |
| 鋼繊維 ⁴⁰⁾ | 1.0 | 0.66 | 2×10^6 |

*：疲労試験と同じ載荷速度の衝撃試験で計測された曲げ強度

3.4.2 平均応力の影響

疲労寿命は応力振幅のみならず平均応力の影響も受ける。応力振幅が同じで平均応力が異なる場合には、平均応力が大きいと疲労寿命が短くなる。疲労寿命に対する応力振幅と平均応力の関係を示す図として Haigh 図 (図 3-56) がある。Haigh 図の線は等疲労寿命線を示しており、応力振幅と平均応力を変えた載荷条件で、十分な数の供試体を試験することで作成される。Haigh 図において、y 軸は $R = -1$ 、x 軸は $R = 1$ 、 $y = x$ の線は $R = 0$ の載荷条件に相当する。

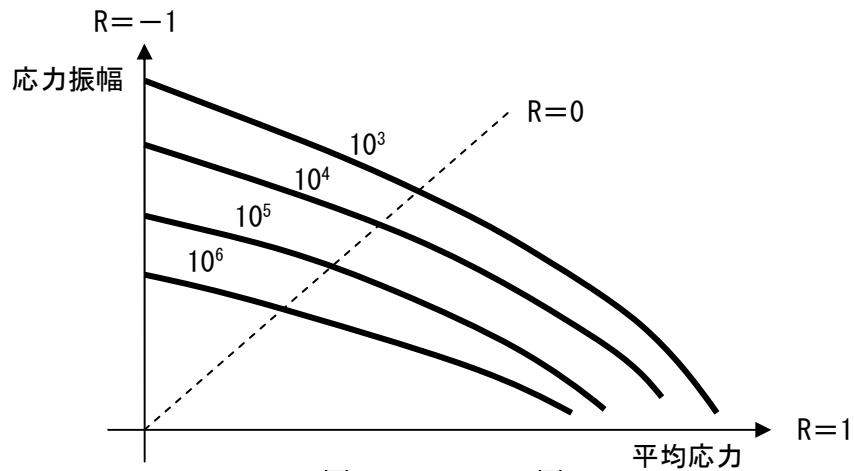


図 3-56 Haigh 図

多数の試験を要する Haigh 図に代わり，無限の疲労寿命を与える応力振幅と平均応力の関係のみを示す関係式が提案されている．ここでは，修正 Goodman 式と Gerber 式を説明する．

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_e} + \frac{\sigma_m}{\sigma_u} = 1 \quad (\text{修正 Goodman 式}) \quad (3-168)$$

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_e} + \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_u} \right)^2 = 1 \quad (\text{Gerber 式}) \quad (3-169)$$

ここに， σ_e = 疲労限， σ_u = 引張強度である．図 3-57 に両式による線を示す．それぞれの線より応力振幅と平均応力が下にあれば疲労寿命は無限となり，上にあれば有限となる．鋼についての実際の試験結果は両式の間で得られる．Gerber 式より修正 Goodman 式の方が用いられることが多い．これらの式による線を疲労限度線と呼ぶ．

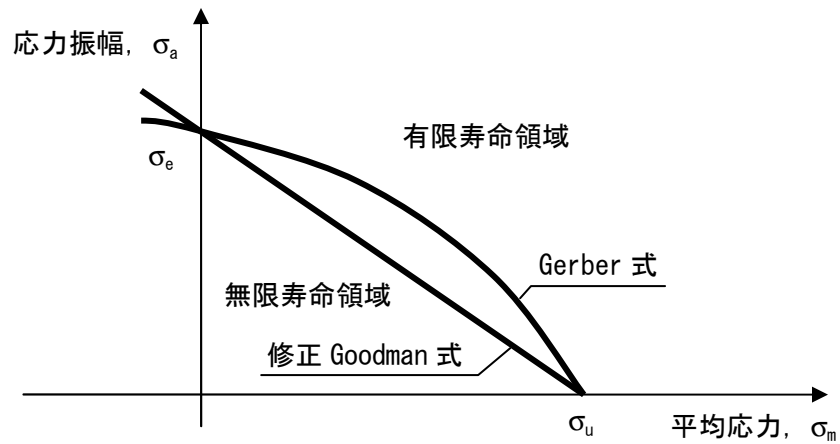


図 3-57 修正 Goodman 線と Gerber 線の比較

疲労限度線は降伏限界と合わせて表示され，設計可能領域を表す疲労限度線図（耐久限度線図）として用いられる（図 3-58）．荷重（応力振幅と平均応力）が降伏限界内にあり疲労限度線より下にあれば塑性変形と疲労破壊が起こらないことになる．

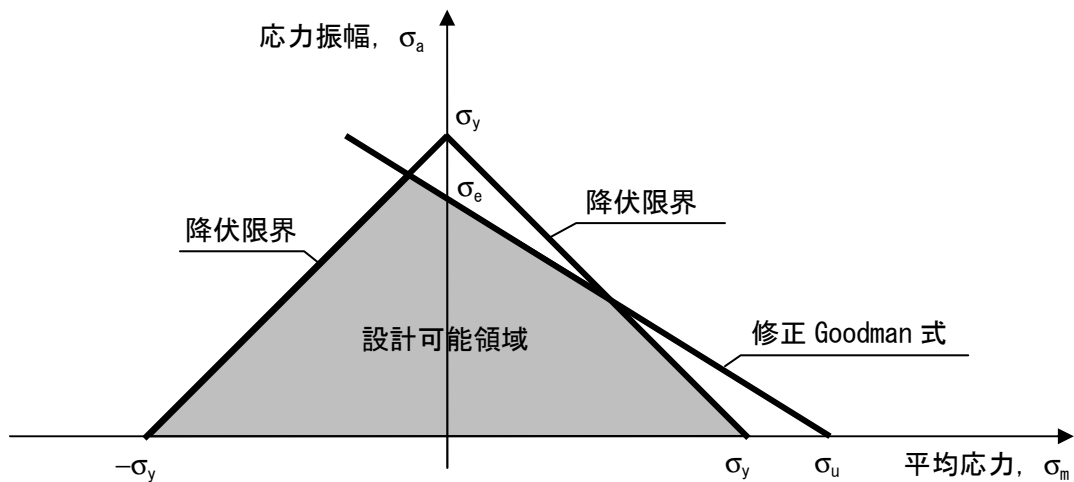


図 3-58 疲労限度線図

コンクリートについては疲労限がないため，疲労限度線図ではなく，時間耐久線図として表される．松下は図 3-59 に示す Haigh 図と同じ意味合いの時間耐久線図を実験的に得ている²⁴⁾．実験結果は点（100%，100%）を通る直線で概ね近似できるとしており，修正 Goodman の関係が成立することを示している．水中状態についても同様に図 3-60 の時間耐久線図を得ている³¹⁾．

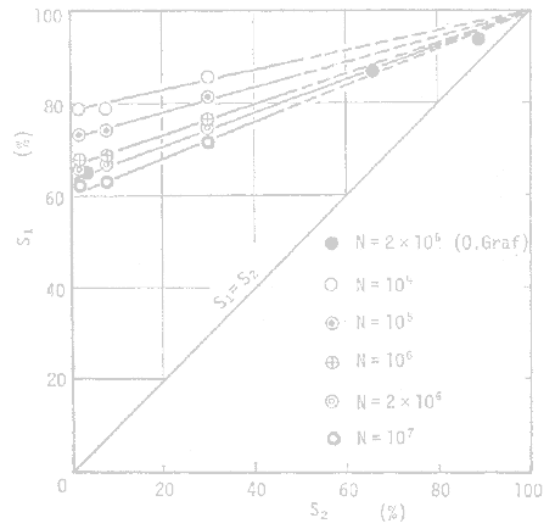


図 3-59 コンクリートの時間耐久線図²⁴⁾

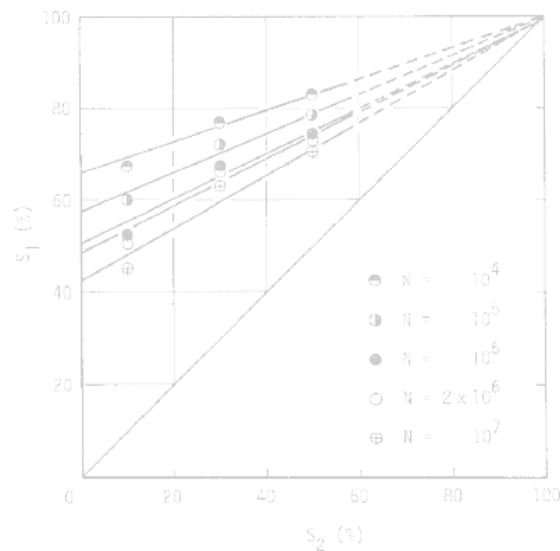


図 3-60 水中状態のコンクリートの時間耐久線図³¹⁾

3.4.3 ひずみによる方法

ひずみによる方法は Strain-Life Approach と呼ばれ、塑性変形が含まれる低サイクル疲労の領域について用いられる。本書は高サイクル疲労を対象としているので、ここでは説明しない。

3.4.4 破壊力学による方法

S-N 図は応力比と疲労寿命の関係を明確に示すため、材料特性の把握と構造設計への利用に非常に有用であるが、S-N 図から疲労破壊が生じるメカニズムについては多くを得られない。疲労破壊に至るまでにひび割れの進展があるが(図 3-61)、応力比や繊維混入率などがひび割れの進展に及ぼすメカニズムを S-N 図で説明することは困難であり、最終的な疲労破壊が生じるメカニズム

についても説明ができない。

破壊力学による方法は、ひび割れ先端の応力拡大係数を用いて、ひび割れ進展と破壊発生メカニズムを説明するものである。疲労においては、静的な破壊規準に満たないレベルの繰返し荷重であっても、ひび割れが徐々に進展し、最終的には静的破壊規準を満たす長さに成長することにより、破壊が生じる。静的破壊において、Irwin の破壊規準は応力拡大係数により表されている。一方で、繰返し荷重下で生じるひび割れ進展は、応力拡大係数範囲に関係付けられる。実験によると、1 サイクル当りのひび割れ進展長であるひび割れ進展率の挙動は、応力拡大係数範囲の大きさにより 3 つの領域に分けられることが示されている。

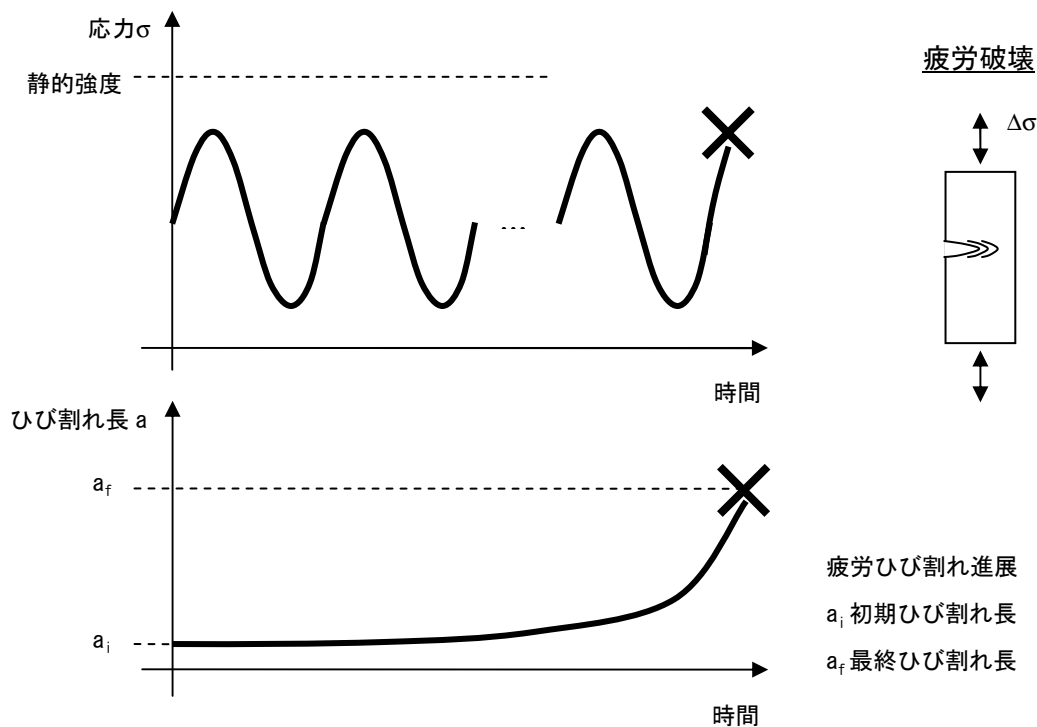


図 3-61 疲労ひび割れ進展

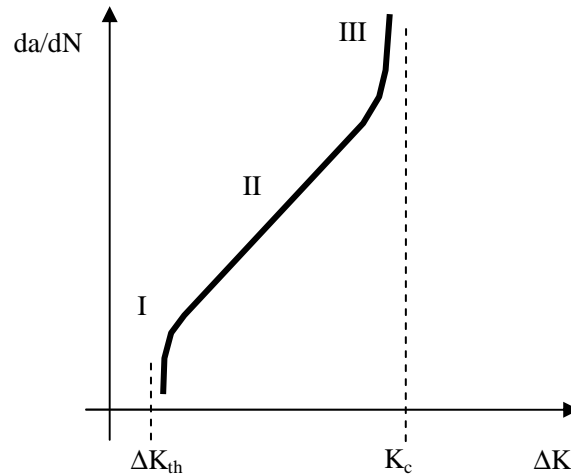


図 3-62 応力拡大係数範囲とひび割れ進展率の関係（両対数表示）

領域 I はひび割れ進展が観察される応力拡大係数範囲の閾値 ΔK_{th} と関係している。 ΔK_{th} は下限応力拡大係数範囲とも呼ばれ、この値に近づくとひび割れ進展は生じないか、極度に遅いひび割れ進展となる。構造物の設計において応力拡大係数範囲 ΔK を ΔK_{th} より下に保つことができれば、疲労破壊が生じないか、疲労寿命が飛躍的に延びることとなり、非常に望ましい。しなしながら、このためには発生応力を極端に低く抑えるか、初期欠陥長が極端に小さい構造物を作ることが必要となり、いずれも現実的ではない。

通常、構造物は領域 II で供用される。領域 II において生じる安定ひび割れ進展について、線形破壊力学が用いられる。領域 II の応力拡大係数範囲とひび割れ進展率の関係について、Paris は次式を提案した。

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (3-170)$$

ここに、 a =ひび割れ長、 N =繰返しサイクル数、 C と m は定数である。 ΔK は応力拡大係数範囲であり、次式で与えられる。

$$\Delta K = K_{max} - K_{min} = Q(\sigma_{max} - \sigma_{min})\sqrt{\pi a} = Q\Delta\sigma\sqrt{\pi a} \quad (3-171)$$

ここに、 Q はひび割れ形状と供試体形状についての関数である。初期ひび割れ長が a_i と仮定すると、与えられた荷重範囲に対して、疲労寿命を次式により計算できる。

$$N_f = \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{C(\Delta K)^m} \quad (3-172)$$

a_f は最終ひび割れ長であり，最終的な破壊が生じるときのひび割れ長である．これは以下のように求める．

ひび割れ進展によりひび割れ長は大きくなり，応力拡大係数は徐々に大きくなってゆく．繰返し荷重の最大応力時に生じる最大応力拡大係数 K_{max} が破壊靱性 K_c に達した時に，最終的な疲労破壊が生じる．ゆえに，最終ひび割れ長 a_f は次の最終破壊規準により得られる．

$$K_{max} = K_c \quad (3-173)$$

K_{max} は

$$K_{max} = Q\sigma_{max}\sqrt{\pi a} \quad (3-174)$$

の形をとるため，最終ひび割れ長は次式で与えられる．

$$a_f = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_c}{Q\sigma_{max}} \right)^2 \quad (3-175)$$

この最終ひび割れ長を用いることで，上記の積分により疲労寿命が計算できる．

領域Ⅲでは，不安定ひび割れ進展に伴う大きなひび割れ進展率が観察される．通常，領域Ⅲでの繰返しサイクル数は小さく，Paris の提案式により求めた疲労寿命に大きく影響を与えないため，疲労寿命の計算においては無視される．

応力拡大係数範囲とひび割れ進展率の関係は，コンパクトテンション（Compact Tension, CT）供試体（図 3-13 の下から 3 つめ）や切り欠きを有する曲げ供試体（図 3-13 の下から 4 つめ）を用いた実験により計測される．こうした供試体については応力拡大係数が導出されており，与えられた繰返し荷重範囲について応力拡大係数範囲が算出される．ひび割れ進展率については，ひび割れ長を計測する必要があるが，顕微鏡を用いた計測が主として用いられる．こうして得られた実験結果の領域Ⅱについて，Paris が提案した式は Paris 則と呼ばれている． C と m は Paris 定数とも呼ばれ，金属材料の場合 $m=2\sim 4^{41)}$ ，セラミック材料では $m=15\sim 50^{43) 44)}$ の値となる．セメント系材料については研究が少ないが， $m=3\sim 17^{45) 46) 47) 48) 49) 50)}$ の値が報告されている．

応力による方法と破壊力学による方法を比較した場合，後者により観察される疲労寿命の方が短くなる．これは，前者の疲労寿命がひび割れの発生と進展の期間を含むのに対して，後者はひび割れ進展の期間のみを対象としているからである．破壊力学はひび割れを対象としているため，ひび割れ発生までの期間は対象とできない．ただし，初期欠陥があった場合には発生までの期間は考えず，初期欠陥長を初期値としたひび割れ進展を考えることになる．

鋼の場合，結晶内の原子のすべり変形から表面に凹凸とすべり帯が形成され，すべり帯に沿ってひび割れが発生する．ひび割れの進展はすべり帯に沿う方向から，応力に垂直な方向へと向きを変

え，安定ひび割れ進展に移る．Paris 則で表されるこの安定ひび割れ進展の期間においては，ひび割れ面において疲労ひび割れ進展に特有の縞模様（Striation）が観察される．この縞模様はひび割れの進展方向と垂直に見られ，疲労繰返し荷重の载荷と除荷に対応して形成される．

セメント系材料については，鋼で観察されているようなひび割れ発生メカニズムが明らかにされていない．むしろ，一般にセメント系材料は空隙を含み，また骨材とセメントペーストの界面に遷移領域と呼ばれる強度の弱い領域が存在するため，こうした空隙や界面遷移領域を初期欠陥とみなし，空隙寸法や骨材長を初期値としたひび割れ進展のみを対象とする研究が多い．

疲労破壊以外の時間依存破壊についても，同様の取り扱いがなされる．疲労破壊については，Paris 則

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (3-176)$$

により，1 サイクルあたりのひび割れ進展長が応力拡大係数範囲のべき乗に関係付けられているが，クリープ破壊と応力腐食割れにおいては，ひび割れ進展速度が応力拡大係数 K に関係付けられる．

$$\frac{da}{dt} = A(K)^b \quad (3-177)$$

ここに， t =時間， A と b は定数である．静的強度を下回る応力下にあるため，当初 K は破壊靱性 K_c より低い値であるが，ひび割れの進展に伴い $K=K_c$ を満たすひび割れ長に成長したときに破壊が生じる．

腐食疲労については，疲労破壊と応力腐食割れが相互作用して生じる．ひび割れ進展は同様にべき乗則によって表され，

$$\frac{da}{dN} > \frac{da_{\text{fatigue}}}{dN} + \frac{da_{\text{corrosion}}}{dt} \quad (3-178)$$

で表されるように，相乗効果が観察される²³⁾．

3.4.5 疲労センサー

鋼構造物において疲労余寿命を推定する疲労センサーが開発されている⁵¹⁾。疲労センサーは長さ 23mm，幅 9.5mm，厚さ 0.45mm 程度のセンサー箔とベース箔の 2 層構造からなるもので，部材の繰返し応力集中箇所に貼付する（図 3-63）。センサーはひずみ繰返しを増幅する形状をしており，部材より先に疲労ひび割れ進展が生じる。センサーの亀裂進展長を計測して関係式を用いることで，部材の疲労余寿命を推定することができる。以下にその原理を説明する。

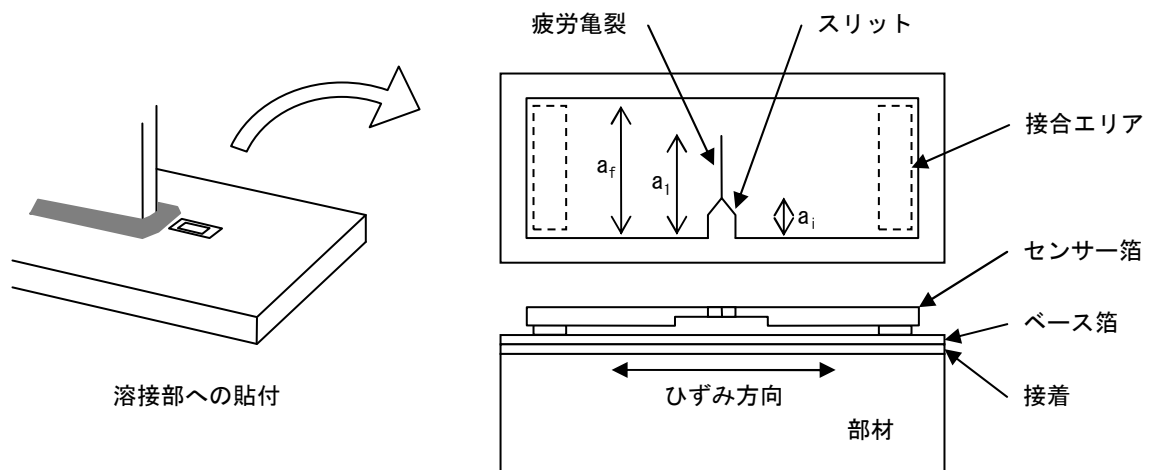


図 3-63 疲労センサー

まず，疲労亀裂の進展は Paris 則

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (3-179)$$

により表される。例として，応力拡大係数範囲 ΔK が簡単な場合として

$$\Delta K = \Delta\sigma\sqrt{\pi a} \quad (3-180)$$

を考えて，式を変形すると

$$\frac{1}{C(\sqrt{\pi})^m} \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{(\sqrt{a})^m} = (\Delta\sigma)^m N_f \quad (3-181)$$

となる。

疲労センサーと部材の実際の応力拡大係数範囲は上記の簡単な場合とは異なる。それぞれにおいて、ひび割れ形状と供試体形状が異なるので以下のようにおく。

$$\Delta K = Q\Delta\sigma\sqrt{\pi a} \quad (\text{疲労センサー}) \quad (3-182)$$

$$\Delta K = Q'\Delta\sigma\sqrt{\pi a} \quad (\text{部材}) \quad (3-183)$$

ここに Q と Q' はひび割れと供試体の形状に関する係数である。

疲労センサーについては、

$$\frac{1}{C(\sqrt{\pi})^m} \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{(Q\sqrt{a})^m} = (\Delta\sigma)^m N_f \quad (3-184)$$

となる。左辺において、Paris 定数 C と m は既知であり、疲労センサーのスリット長 a_i と最終亀裂長 a_f 、係数 Q も分かっている。左辺を B_f と置き、両辺の対数をとると

$$\log \Delta\sigma = \frac{1}{m} \log B_f - \frac{1}{m} \log N_f \quad (3-185)$$

が得られる。図 3-64 に示す通り、この式は疲労センサーに関する S-N 線図を表している。

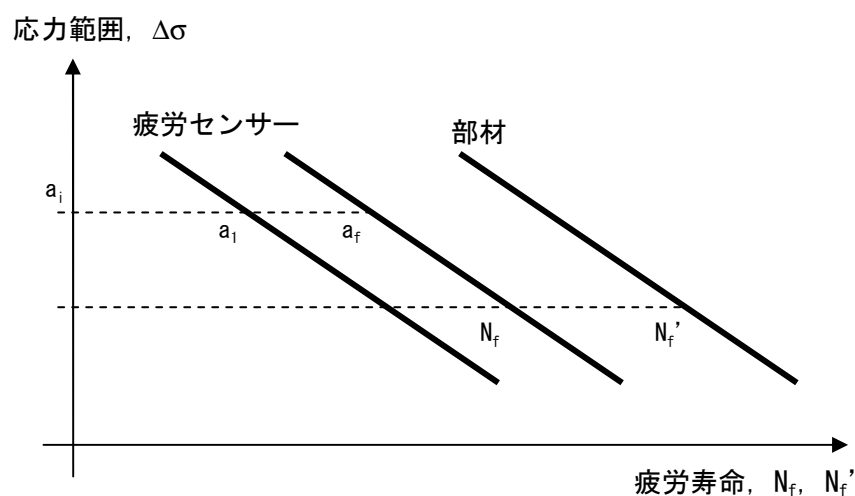


図 3-64 疲労センサーと部材の S-N 線図 (両対数表示)

さて、疲労センサーの亀裂進展が最後（つまり a_f ）まで進めば上述のとおりであるが、センサーを設置後のある点検時点で亀裂長が a_1 ($< a_f$) まで進んでいたとする。このとき

$$\frac{1}{C(\sqrt{\pi})^m} \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{(Q\sqrt{a})^m} = (\Delta\sigma)^m N_1 = B_1 \quad (3-186)$$

の関係となり、両辺の対数をとると

$$\log \Delta\sigma = \frac{1}{m} \log B_1 - \frac{1}{m} \log N_1 \quad (3-187)$$

である。S-N 線図において a_f の式と比較すると、Paris 定数 m が同じであるため傾きが同じとなっている。

次に、部材については同様に

$$\frac{1}{C(\sqrt{\pi})^m} \int_{a'_i}^{a'_f} \frac{da}{(Q'\sqrt{a})^m} = (\Delta\sigma)^m N'_f = B'_f \quad (3-188)$$

の関係となる。ここに、 a'_i は初期欠陥長、 a'_f は最終亀裂長である。両辺の対数をとると

$$\log \Delta\sigma = \frac{1}{m} \log B'_f - \frac{1}{m} \log N'_f \quad (3-189)$$

となる。この式もやはり S-N 線図において同じ傾きとなる。

このように、疲労センサーの原理の一つは、Paris 定数が同じなのでセンサーと部材の S-N 線図の傾きが同じになることにある。よって、

$$\frac{N_f}{N'_f} = \alpha \quad (3-190)$$

と置くことができる

もう一つの原理は、疲労センサーにおいて亀裂進展速度 da/dN が一定であることにある。Paris 則により表される亀裂進展速度は、右辺の ΔK が亀裂長の進展に伴い増大していくため、通常は加速していく。つまり da/dN は一定ではない。疲労センサーは da/dN が一定となるような形状をしている。これにより、 $\Delta\sigma$ が一定で、スリット長 a_i 、最終亀裂長 a_f で、点検時の亀裂長が a_1 であるときに、点検時に疲労センサーが既に費やした寿命 N_1 は N_f に対して、

$$\frac{N_1}{N_f} = \frac{a_1 - a_i}{a_f - a_i} \quad (3-191)$$

となる (図 3-65). センサーの寸法により a_i と a_f は決まっており, 点検時に a_1 を計測するだけで N_1/N_f を得ることができる.

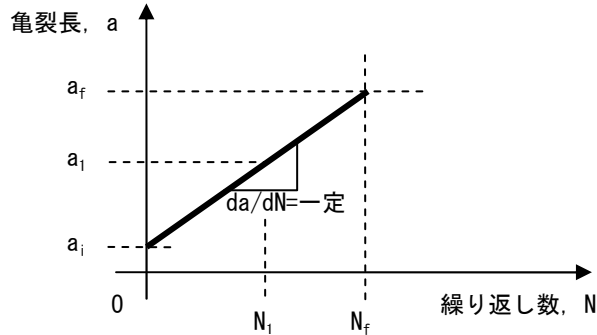


図 3-65 疲労センサーの亀裂進展速度

以上の説明は $\Delta\sigma$ が一定の場合であったが, 実際の部材では変動荷重により $\Delta\sigma$ は変動し, その繰返し回数も異なる. マイナー則により損傷度を算定すると, センサーの損傷度 D_s は

$$D_s = \frac{n_1}{N_{f1}} + \frac{n_2}{N_{f2}} \dots = \sum_i \frac{n_i}{N_{fi}} \quad (3-192)$$

である. ここに, n_i は $\Delta\sigma_i$ による繰返し回数, N_{fi} は $\Delta\sigma_i$ でのセンサーの破断繰返し数である. 同様に, センサー設置から点検時までの間に部材が受けた損傷度を D とすると

$$D = \frac{n_1}{N'_{f1}} + \frac{n_2}{N'_{f2}} \dots = \sum_i \frac{n_i}{N'_{fi}} \quad (3-193)$$

となる. ここに, N'_{fi} は $\Delta\sigma_i$ での部材の破断繰返し数である. S-N 線図の傾きが同じであるため,

$$\frac{N_{fi}}{N'_{fi}} = \alpha \quad (3-194)$$

であり, よって

$$D = \alpha D_s \quad (3-195)$$

の関係になる。

部材の寿命を T ，供用開始からの時間を T_{his} ，余寿命を T_{res} ，センサーの計測時間（設置から点検時までの時間）を T_s とする。 T は

$$D = \frac{T_s}{T} \quad (3-196)$$

より，

$$T = \frac{T_s}{D} = \frac{T_s}{\alpha D_s} \quad (3-197)$$

であるため，部材の余寿命 T_{res} は，

$$T_{\text{res}} = T - T_{\text{his}} = \frac{T_s}{\alpha D_s} - T_{\text{his}} \quad (3-198)$$

により求まる。右辺の D_s 以外は既知であるため， D_s は点検時に a_l を測るだけで得られる。

3.4.6 結合力を有する疲労ひび割れの進展

繊維や粒子で補強された複合材料ではひび割れにおいて結合力が生じるため，疲労ひび割れの進展においてはこれを考慮する必要がある。3.3.2 節では結合力が作用するひび割れの応力拡大係数について述べたが，応力拡大係数範囲についても同様の取り扱いを行い，Paris 則を用いることで結合力を有する疲労ひび割れの進展を取り扱うことができる。

いま，図 3-66 に示す繰返し引張荷重下にある半無限体中の切り欠きひび割れの問題を考える。繰返し引張荷重による最大応力と最小応力はそれぞれ $\sigma_{\infty\text{max}}$ と $\sigma_{\infty\text{min}}$ であるとし，最小最大応力比 $R > 0$ であるとする。ひび割れには結合力が生じており，最大応力時にひび割れにおいて生じている結合力を $\sigma_{\text{bmax}}(x)$ ，開口幅を δ_{max} であるとする。繰返し荷重において応力は最大応力から最小応力に除荷されるが，この際に結合力も減少して $\sigma_{\text{bmin}}(x)$ となり，開口幅も δ_{min} に減少する。再び最小応力から最大応力に載荷されたとき結合力も増加して $\sigma_{\text{bmax}}(x)$ に戻るとする。この際に結合力は除荷時とは異なる経路をたどる履歴曲線を示す。こうした履歴曲線は開口幅 δ により異なり，つまりはひび割れ面上の位置 x により異なることになる。このように，履歴曲線を示す結合力 $\sigma_b(x)$ が繰返し引張荷重下においてひび割れ面に生じていることで応力拡大係数を減少させていることになる。

さて，Paris 則によると，応力拡大係数範囲とひび割れ進展率の関係は次式で表される。

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_{\text{tip}})^m \quad (3-199)$$

ΔK_{tip} はひび割れ先端での応力拡大係数範囲であり,

$$\Delta K_{tip} = K_{tip \max} - K_{tip \min} \quad (3-200)$$

$K_{tip \max}$ と $K_{tip \min}$ は, それぞれ最大応力 $\sigma_{\infty \max}$ と最小応力 $\sigma_{\infty \min}$ の時の応力拡大係数である. 3.3.2 節によると, 本問題の応力拡大係数 K_{tip} は

$$K_{tip} = 1.12\sigma_{\infty}\sqrt{\pi a} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{-\sigma_b(X)}{\sqrt{-X}} dX \quad (3-201)$$

で表されるため, $K_{tip \max}$ と $K_{tip \min}$ は

$$K_{tip \max} = 1.12\sigma_{\infty \max}\sqrt{\pi a} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{-\sigma_{b \max}(X)}{\sqrt{-X}} dX \quad (3-202)$$

および

$$K_{tip \min} = 1.12\sigma_{\infty \min}\sqrt{\pi a} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{-\sigma_{b \min}(X)}{\sqrt{-X}} dX \quad (3-203)$$

で表される. よって, ΔK_{tip} は

$$\Delta K_{tip} = 1.12\Delta\sigma_{\infty}\sqrt{\pi a} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{-\Delta\sigma_b(X)}{\sqrt{-X}} dX \quad (3-204)$$

で表される. ここに,

$$\Delta\sigma_{\infty} = \sigma_{\infty \max} - \sigma_{\infty \min} \quad (3-205)$$

であり,

$$\Delta\sigma_b(x) = \sigma_{b \max}(x) - \sigma_{b \min}(x) \quad (3-206)$$

である。よって、この ΔK_{tip} を Paris 則において用いることでひび割れ進展率が求まり、初期ひび割れ長と最終ひび割れ長の間で積分をすることで疲労寿命が求まる。

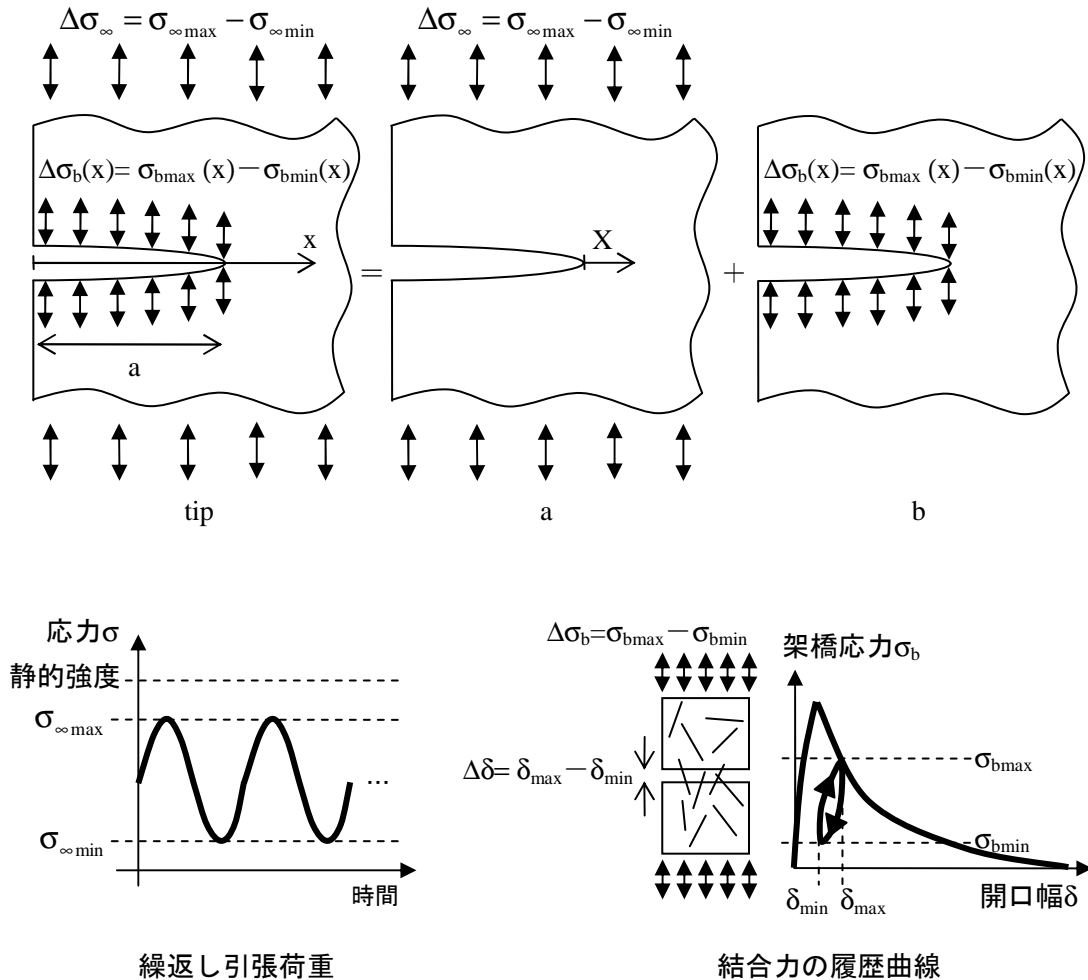


図 3-66 問題の重ね合わせ

3.3.2 節では、ひび割れ面上で分布する結合力 $\sigma_b(x)$ は、材料に特有の架橋則 $\sigma_b(\delta)$ と問題に依存する開口幅分布 $\delta(x)$ とに分けて考えるのがよいとした。疲労ひび割れにおいては、Paris 則に用いるひび割れ面上で分布する結合力の変化 $\Delta\sigma_b(x)$ を知る必要がある。これを 3.3.2 節と同様に、開口幅分布（最大応力時の $\delta_{max}(x)$ 及び最小応力時の $\delta_{min}(x)$ ）と分けて考えて、架橋則の履歴曲線を $\Delta\sigma_b(\delta_{max}, \delta_{min})$ もしくは $\Delta\sigma_b(\Delta\delta, \delta_{max})$ の形で表すことにする。

図 3-67 に繊維補強コンクリートの架橋則の履歴曲線の例を示す。架橋則の履歴挙動は、除荷開始時にどのくらいひび割れが開口していたかを示す δ_{max} と、除荷開始点からどのくらいひび割れが閉口したかを示す $\Delta\delta$ とによって表される。コンクリートや繊維補強コンクリートなどの架橋則の履歴挙動では、開始時の開口幅が大きいほど除荷剛性が小さくなる様子が、図 3-67 では示されている。

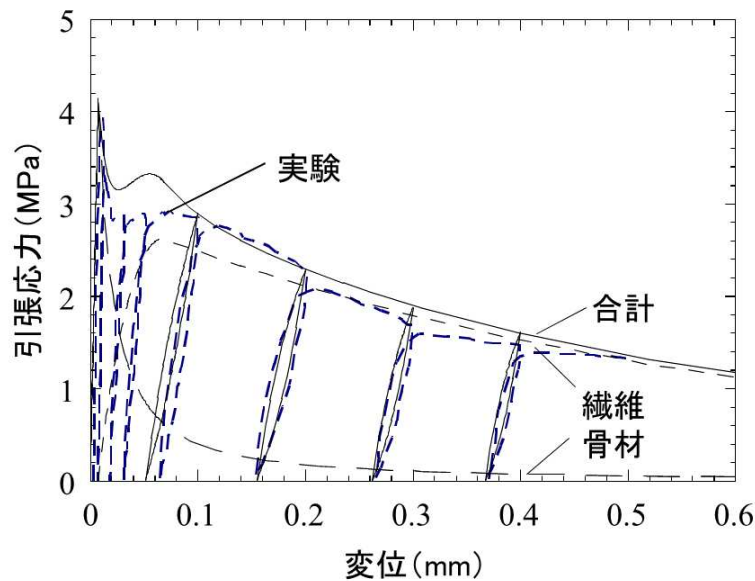


図 3-67 繊維補強コンクリートの架橋則の履歴曲線⁵²⁾

以上により ΔK_{tip} は

$$\Delta K_{tip} = 1.12\Delta\sigma_{\infty}\sqrt{\pi a} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{-\Delta\sigma_b(\Delta\delta(X), \delta_{max}(X))}{\sqrt{-X}} dX \quad (3-207)$$

で表されることになる。つまり、応力拡大係数範囲 ΔK_{tip} は、外力による応力拡大係数範囲 ΔK_a と結合力による応力拡大係数範囲 ΔK_b との和として表される。

$$\Delta K_{tip} = \Delta K_a + \Delta K_b \quad (3-208)$$

静的荷重と同様に、右辺の第 2 項は負であるため、ひび割れの長さ a と荷重による応力範囲 $\Delta\sigma_{\infty}$ が同じときには、応力拡大係数範囲 ΔK_{tip} が小さくなる。よって、Paris 則においてひび割れ進展率が下がり、複合材料では補強されていない母材よりも疲労寿命が延びることになる。

静的荷重と同様に考えると、上記のように応力拡大係数範囲 ΔK_{tip} を外力による応力拡大係数範囲 ΔK_a と結合力による応力拡大係数範囲 ΔK_b との和として表すことで、結合力を有する疲労ひび割れの進展を十分に取り扱えるように思われる。

しかしながら、これでは現象を十分に把握できていない。実際にはもう一つ考慮すべき点があることが Li・Matsumoto⁵³⁾ により示されている。結合力の履歴曲線が荷重繰返しにより減少することを考慮しなければならない。

繊維補強コンクリートの架橋応力の履歴曲線が荷重繰返しにより変化する様子を図 3-68 と図 3

図 3-69 に示す。図 3-68 は、ひび割れ開口幅の最大値と最小値を固定した荷重繰返しにおける履歴曲線を示している。この履歴曲線における荷重繰返し各回の架橋応力の最大値を示したものが図 3-69 である。いずれの図においても、最大ひび割れ開口時の架橋応力が荷重の繰返し数が増えるに従って減少する様子がみられる。特に、図 3-69 では、架橋応力が繰返し数 1,000 回程度までの早期に約 70% に急激に減少し、4 万回までに約 60% にまで減少することが分かる。

このように、コンクリートや繊維補強コンクリートにおいては、骨材や繊維が抜け出したり破断することで結合力が減少する。結合力の減少を考慮して ΔK_b を計算し、 ΔK_{tip} を得ることで結合力を有する疲労ひび割れの進展を十分に把握することができる。

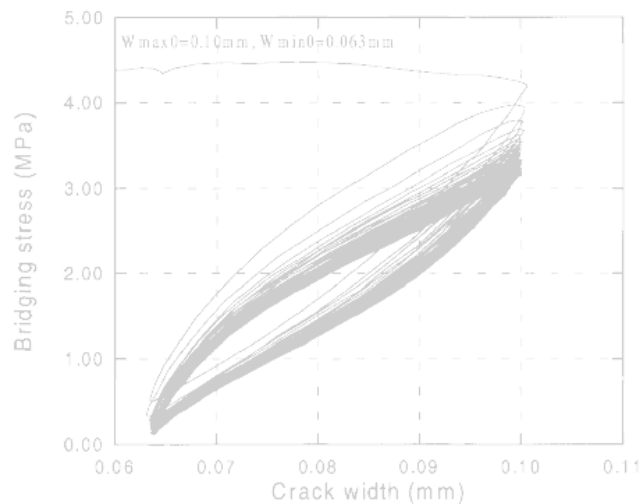


図 3-68 荷重繰返し下の架橋応力履歴曲線 (SSFRC : 鋼繊維補強コンクリート) ⁵⁴⁾

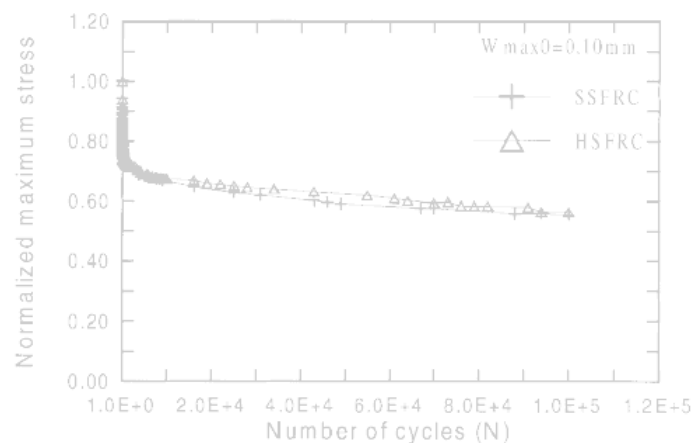


図 3-69 正規化架橋応力と荷重繰返し数の関係

(SSFRC : 鋼繊維補強コンクリート, HSFRC : フック形状鋼繊維補強コンクリート) ⁵⁴⁾

コンクリートや繊維補強コンクリートにおける架橋応力の減少を架橋応力劣化と呼び、架橋応力劣化を考慮した疲労ひび割れの進展に関する解析が Li・Matsumoto⁵³⁾ により示されている。そこで

は、架橋応力劣化が疲労ひび割れ進展の鍵であることを明らかにしている。もし、荷重繰返しによる結合力の減少を考慮しなかった場合には、負の項である ΔK_b の絶対値が大きくなりすぎ、 ΔK_{tip} は負の値をとる。これはひび割れの進展が生じないという結果に他ならない。つまり、結合力によるひび割れ進展抑制を強く算定し過ぎていることになる。

以上をまとめると、結合力を有する疲労ひび割れの進展は、

- ① Paris 則
- ② 架橋則の履歴曲線
- ③ 架橋応力劣化

の3つを考慮することで現象を再現することができる（図3-70参照）。

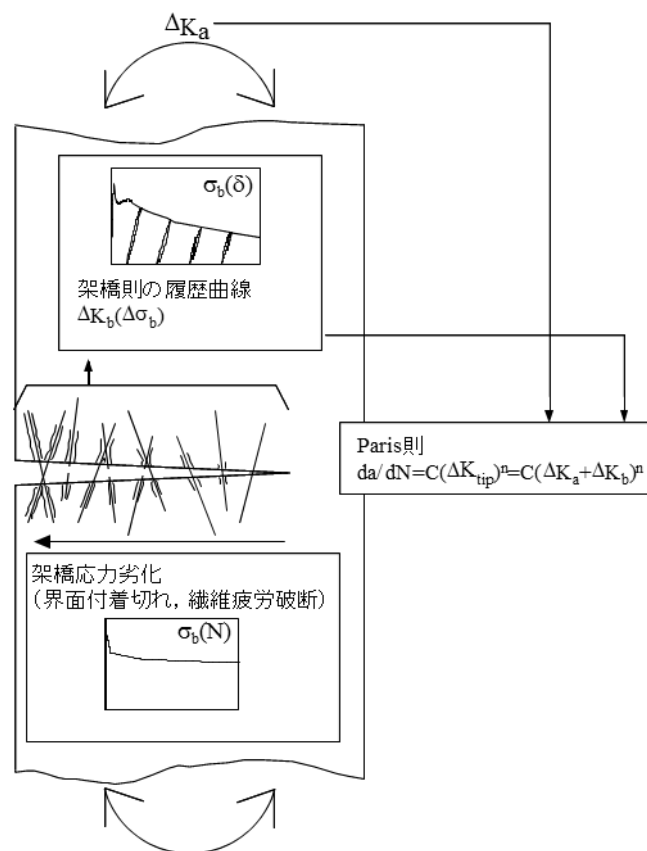


図3-70 結合力を有する疲労ひび割れの進展機構

3.5 まとめ

本章では、破壊力学の基礎として、破壊力学の発展において重要な事故事例の紹介に始まり、線形破壊力学、非線形破壊力学、疲労破壊について説明をした。破壊力学は金属材料の破壊と疲労を対象として大きく発展したが、後にセメント系材料についても適用されるようになってきた。本書の対象である繊維補強セメント系複合材料の取り扱いについては概略までを本章では示した。繊維

補強セメント系複合材料においては繊維の種類や混入率などにより材料特性が大きく変わる。これは、本章で見てきたとおり、ひび割れにおける架橋則が重要な役割を果たしているためである。次章では、繊維補強セメント系複合材料の微視的な材料定数に基づいた架橋則の構築について述べる。

参考文献

- 14) Loos, P., <http://www.owl.net.rice.edu/~msci301/LibertyShipCrack.jpg>
- 15) Wikipedia Commons, <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:TankerSchenectady.jpg?uselang=ja>
- 16) Broek, D., "Elementary Engineering Fracture Mechanics", Fourth revised edition, Kluwer Academic Publishers, 1991.
- 17) Suresh, S., "Fatigue of Materials", Second Edition, Cambridge University Press, 1998.
- 18) Peterson, R. E., "Stress Concentration Factors", Wiley, 1974.
- 19) Brown, W. F. and Srawley, J. E., "Plane Strain Crack Toughness Testing of High Strength Metallic Materials", STP 410, ASTM, 1966.
- 20) ASTM, "ASTM E399 Standard Test Method for Linear Elastic Plane Strain Fracture Toughness K_{IC} of Metallic Materials, ASTM, 2009.
- 21) Hutchinson, J. W., "Singular Behavior at the End of a Tensile Crack in Hardening Material", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Elsevier, 16, pp. 13-31, 1968.
- 22) Rice, J. R. and Rosengren, G. F., "Plane Strain Deformation near a Crack Tip in a Power-law hardening Material", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Elsevier, 16, pp. 1-12, 1968.
- 23) Ashby, Michale F. and Jones, David R. H., "Engineering Materials 1: An Introduction to Their Properties and Applications", Second Edition, Butterworth-Heinemann, 1996.
- 24) 松下博通・徳光善治, "生存確率を考慮したコンクリートの圧縮疲労強度に関する研究", 土木学会論文集, 土木学会, No. 284, pp. 127-138, 1979.
- 25) Raju, N. K., "Comparative Study of the Fatigue Behavior of Concrete, Mortar, and Paste in Uniaxial Compression", Journal of ACI, Vol. 67, No. 6, pp. 461-463, 1970.
- 26) Ople, F. S. and Hulsbos, C. L., "Probable Fatigue Life of Plain Concrete with Stress Gradient", Journal of ACI, Vol. 63, No. 1, pp. 59-82, 1966.

- 27) Antrim, J. C. and McLaughlin, J. F., "Fatigue Study of Air-Entrained Concrete", *Journal of ACI*, Vol. 55, No. 5, pp. 1173-1182, 1959.
- 28) Bennett, E. W. and Muir, S. E. St J., "Some Fatigue Tests of High-Strength Concrete in Axial Compression", *Magazine of Concrete Research*, Vol. 19, No. 59, pp. 113-117, 1967.
- 29) 阪田憲次・木山英郎・西林新蔵, "統計的処理によるコンクリートの疲労寿命に関する研究", *土木学会論文報告集*, 土木学会, No. 198, pp. 107-114, 1972.
- 30) 井上正一・黒田保・高井伸一郎・大西利勝, "低品質骨材を用いたコンクリートおよびコンクリート部材の疲労性状", *材料*, 日本材料学会, Vol. 61, No. 10, pp. 825-830, 2012.
- 31) 松下博通, "水中におけるコンクリートの圧縮疲労強度に関する研究", *土木学会論文集*, 土木学会, No. 296, pp. 87-95, 1980.
- 32) Butler, J. E., "The Performance of Concrete Containing High Proportions of Steel Fibres with Particular Reference to Rapid Flexural and Fatigue Loadings", *Fiber Reinforced Cements and Concretes-Recent Developments*, Elsevier, pp. 544-552, 1989.
- 33) Wu, G. Y., Shivaraj, S. K., and Ramakrishnan, V., "Flexural, Fatigue Strength, Endurance Limit, and Impact Strength of Fiber Reinforced Refractory Concretes", *Fiber Reinforced Cements and Concretes-Recent Developments*, Elsevier, pp. 261-273, 1989.
- 34) Vondran, G. L., Nagabhushanam, M., and Ramakrishnan, V., "Fatigue Strength of Polypropylene Fiber Reinforced Concretes", *Fiber Reinforced Cements and Concretes-Recent Developments*, Elsevier, pp. 533-543, 1989.
- 35) Ramakrishnan, V., Gollapudi, S., and Zellers, R., "Performance Characteristics and Fatigue Strength of Polypropylene Fiber Reinforced Concrete", *Fiber Reinforced Concrete Properties and Applications SP-105*, American Concrete Institute, pp. 159-177, 1987.
- 36) Ramakrishnan, V. and Josifek, C., "Performance Characteristics and Flexural Fatigue Strength of Concrete Steel Fiber Composites", *International Symposium on Fiber Reinforced Concrete*, pp. 2.73-2.84, 1987.
- 37) Ramakrishnan, V. and Lokvik, B. J., "Flexural Fatigue Strength of Fiber Reinforced Concretes", *High Performance Fiber Reinforced Cement Composites*, pp. 271-287, 1992.
- 38) Jun, Z. and Stang, H., "Fatigue Performance in Flexure of Fiber Reinforced Concrete", *ACI Materials Journal*, Vol. 95, No. 1, pp. 58-67, 1998.
- 39) Sakai, H., Takahashi, K., Mitsui, Y., Ando, T., Awata, M., and Hoshijima, T., "Flexural Behavior of Carbon Fiber Reinforced Cement Composite", *Fiber Reinforced Concrete-Developments and Innovations ACI-SP142*, American Concrete Institute, pp. 121-140, 1994.
- 40) Suthiwarapirak, P., Matsumoto, T., and Kanda, T., "Multiple Cracking and Fiber Bridging

- Characteristics of Engineered Cementitious Composites under Fatigue Flexure”, *Journal of Materials in Civil Engineering*, American Society of Civil Engineers, Vol. 16, No. 5, pp. 433-443, 2004.
- 41) Barsom, J. M. and Rolfe, S. T., “Fracture and Fatigue Control in Structures - Applications of Fracture Mechanics”, Prentice-Hall, 1987.
 - 42) Dauskardt, R. H., James, M. R., Porter, J. R., and Ritchie, R. O., “Cyclic Fatigue-Crack Growth in a SiC-Whisker-Reinforced Alumina Ceramic Composite: Long- and Small-Crack Behavior”, *Journal of the American Ceramic Society*, Vol. 75, No. 4, pp. 759-771, 1992.
 - 43) Dauskardt, R. H., Ritchie, R. O., and Cox, B. N., “Fatigue of Advanced Materials: Part I”, *Advanced Materials and Processes*, Vol. 144, No. 7, pp. 26-31, 1993.
 - 44) Dauskardt, R. H., Ritchie, R. O., and Cox, B. N., “Fatigue of Advanced Materials: Part II”, *Advanced Materials and Processes*, Vol. 144, No. 8, pp. 30-35, 1993.
 - 45) Baluch, M. H., Qureshy, A. B., and Azad, A. K., “Fatigue Crack Propagation in Plain Concrete”, *SEM/RILEM International Conference on Fracture of Concrete and Rock*, pp. 80-87, 1987.
 - 46) Bazant, Z. P. and Schell, W. F., “Fatigue Fracture of High-Strength Concrete and Size Effect”, *ACI Materials Journal*, Vol. 90, No. 5, pp. 472-478, 1993.
 - 47) Bazant, Z. P. and Xu, K., “Size Effect in Fatigue Fracture of Concrete”, *ACI Materials Journal*, Vol. 88, No. 4, pp. 390-399, 1991.
 - 48) Perdikaris, P. C. and Calomino, A. M., “Kinetics of Crack Growth in Plain Concrete”, *SEM/RILEM International Conference on Fracture of Concrete and Rock*, pp. 64-69, 1987.
 - 49) Subramaniam, K. V., O’Neil E. F., Popovics J. S., and Shah, S. P., “Crack Propagation in Flexural Fatigue of Concrete”, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 126, No. 9, pp. 891-898, 2000.
 - 50) Brake, N. A. and Chatti, K., “Prediction of Transient and Steady-State Flexural Fatigue Crack Propagation in Concrete Using a Cyclic R-Curve”, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 138, No. 4, pp. 371-378, 2012.
 - 51) Muragishi, O., Nihei, K., Kobayashi, T., Ohgaki, K., Kawaguchi, Y., and Umeda, A., “Remaining Life Evaluation by Fatigue Sensor”, *Proceedings of the First International Conference on Structural Health Monitoring and Intelligent Infrastructure*, pp. 879-886, 2003.
 - 52) Matsumoto, T., “Crack Bridging Law in Discontinuous Fiber Reinforced Composites under Cyclic Loading”, *応用力学論文集*, 土木学会, Vol. 10, pp. 923-933, 2007.
 - 53) Li, V. C. and Matsumoto, T., “Fatigue Crack Growth Analysis of Fiber Reinforced Concrete with Effect of Interfacial Bond Degradation”, *Cement and Concrete Composites*, Vol. 20, No. 5, pp. 339-351, 1998.
 - 54) Zhang, J., Stang, H., and Li, V. C., “Experimental Study on Crack Bridging in FRC under Uniaxial

Fatigue Tension”, Journal of Materials in Civil Engineering, Vol. 12, No. 1, pp. 66-73, 2000.