

液晶の物理

北大院工 折原 宏

- 1 . 種々の液晶相
- 2 . 液晶の弾性論
- 3 . 液晶の光学
- 4 . 液晶の流体力学

参考書

The Physics of Liquid Crystals

P. G. de Gennes and J. Prost

(Oxford University Press, 1993)

“Liquid crystals are beautiful and mysterious; I am fond of them for both reasons. My hope is that some readers of this book will feel the same attraction, help to solve the mysteries, and raise new questions.”

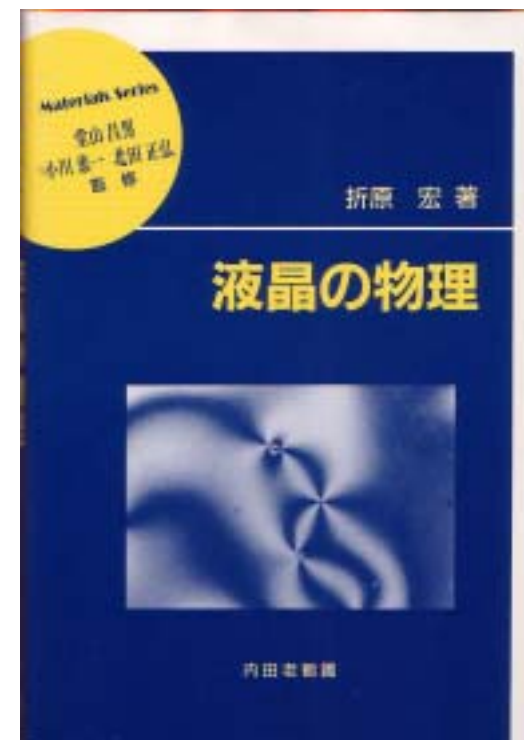
液晶の物理学

チャンドラセカール(木村, 山下訳) (吉岡書店)

液晶の物理

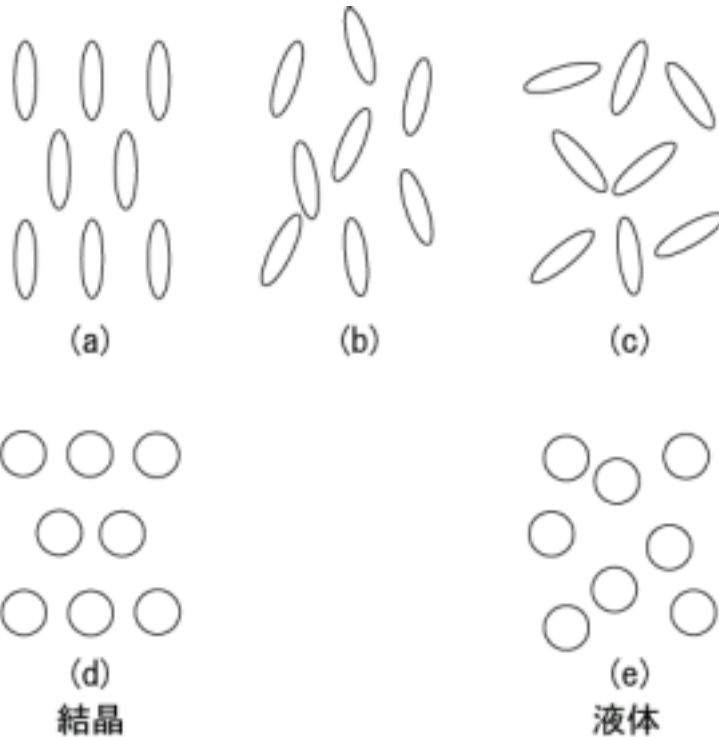
折原 宏(材料学シリーズ, 内田老鶴圃)

(3600円 + 税)



種々の液晶相

ネマチック相



位置の秩序 (非一様性)	○	×	×
配向の秩序 (異方性)	○	○	×

図1. 2

コレステリック相

ネマチック相の親戚
不斉炭素を持つ

らせん構造

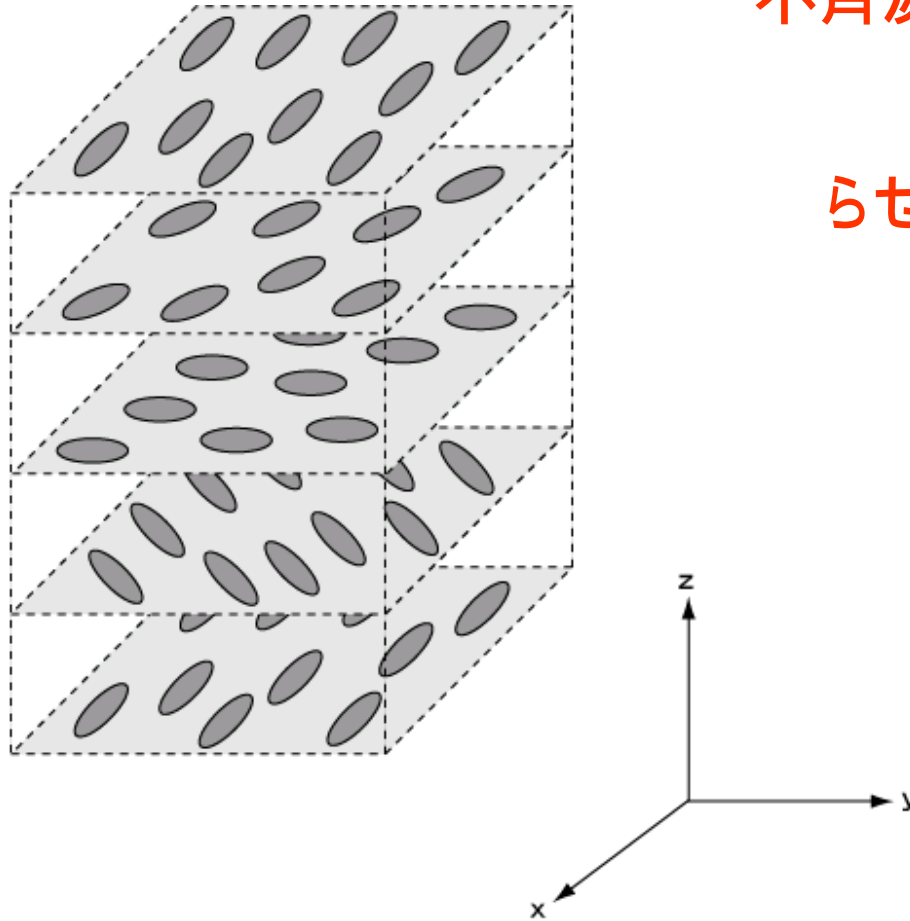


図1. 3

スメクチック相

層構造

1次元結晶, 2次元液体

SmA相



図1.5

SmC相

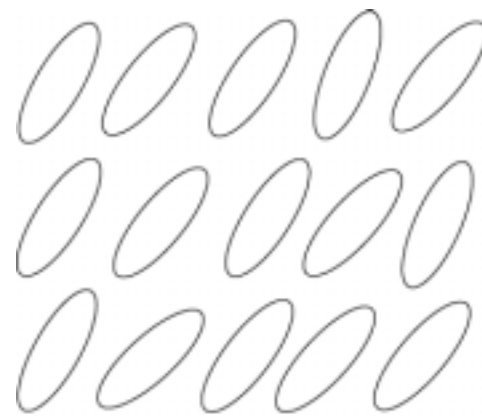
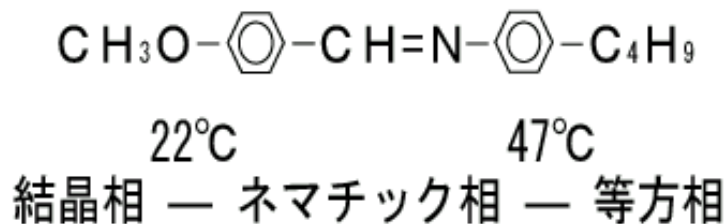


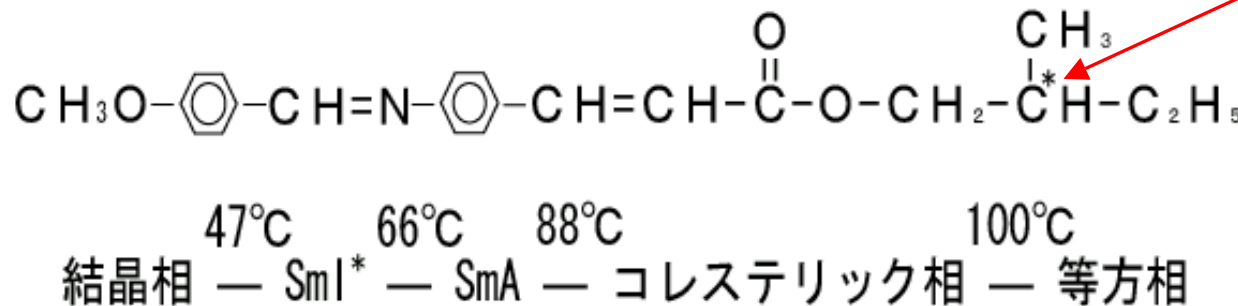
図1.6

液晶分子の例

細長い



(a)



不斉炭素

結合する4つの原子
または基が全て異なる
炭素

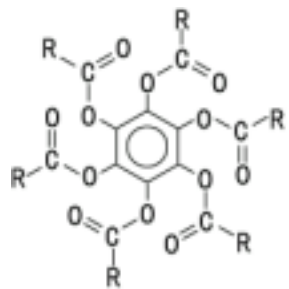
鏡映面を持たない

(b)

その他の液晶

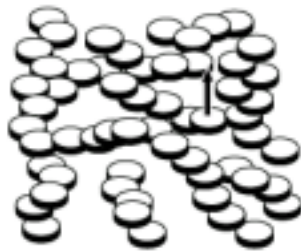
ディスコチック液晶

板状分子



$R = n\text{-C}_6\text{H}_5 \sim n\text{-C}_6\text{H}_{13}$

(a)



(b)



(c)

図1.10

生体膜

スメクチック液晶

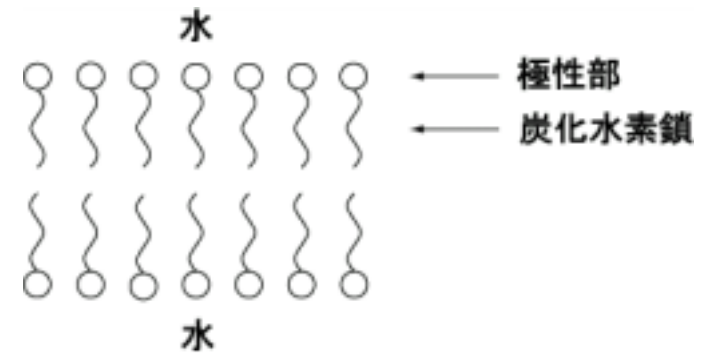
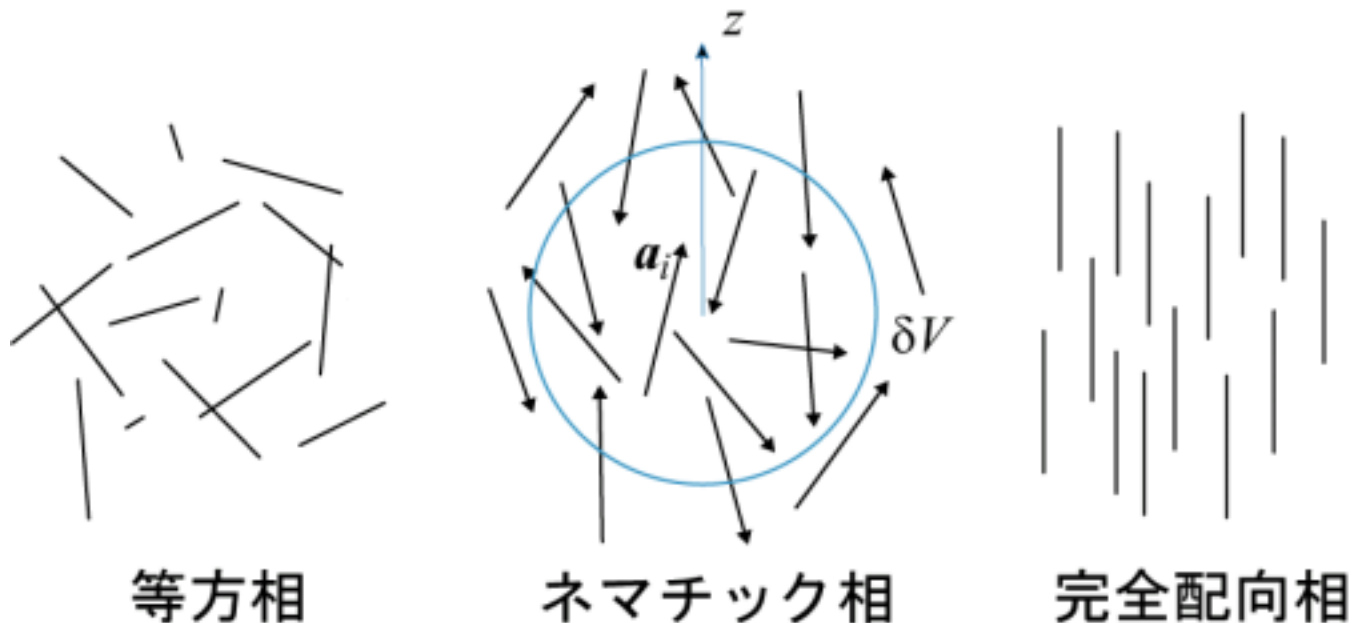


図1.11

液晶の弾性理論

秩序パラメーターと配向ベクトル

秩序パラメーター：分子の配向の程度を表す量



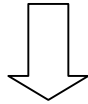
秩序パラメーターの定義

$$\langle a_z \rangle = 1/N \sum_{i=1}^N a_{iz} = 0$$

$$\langle a_z^2 \rangle = 1/N \sum_{i=1}^N a_{iz}^2$$

等方相

$$\langle a_x^2 \rangle = \langle a_y^2 \rangle = \langle a_z^2 \rangle, \quad \langle a_x^2 \rangle + \langle a_y^2 \rangle + \langle a_z^2 \rangle = 1$$



$$\langle a_x^2 \rangle = \langle a_y^2 \rangle = \langle a_z^2 \rangle = 1/3$$

完全配向

$$\langle a_z^2 \rangle = 1$$

秩序パラメーター S の定義

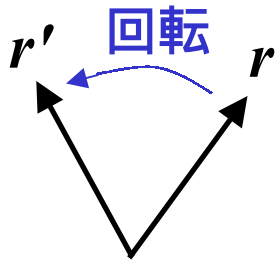
等方相 $S = 0$

完全配向 $S = 1$

ネマチック相 $0 < S < 1$

$$\begin{aligned} S &= \frac{3}{2} \left(\langle a_z^2 \rangle - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{2} (3 \langle a_z^2 \rangle - 1) \end{aligned}$$

スカラー, ベクトル, テンソル



$$r' = \mathbf{U}r$$

$$x_\alpha' = \sum_{\beta=1}^3 U_{\alpha\beta} x_\beta = U_{\alpha\beta} x_\beta$$

$$r = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$$

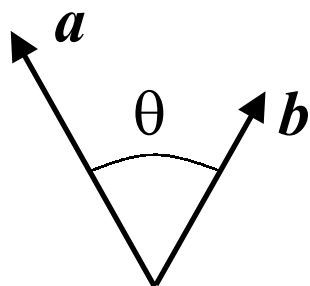
$$r' = (x', y', z') = (x_1', x_2', x_3')$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{pmatrix}$$

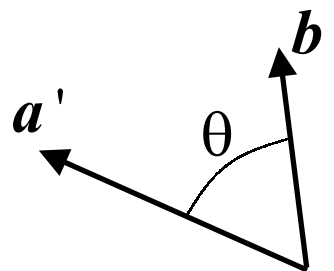
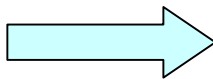
r : ベクトル

速度, 電場, 磁場, 分極等

内積



回転



$$a \cdot b = a' \cdot b'$$

(不変)

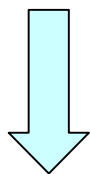
$a \cdot b = a_\alpha b_\alpha$: スカラー

エネルギー, 質量, 温度等

テンソル

$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}$ (\mathbf{P} : 分極, \mathbf{E} : 電場, χ : 電気感受率)

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$$



回転

$$\mathbf{P}' = \chi' \mathbf{E}' \quad \longrightarrow \quad \mathbf{U}\mathbf{P} = \chi' \mathbf{U}\mathbf{E} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{P} = (\mathbf{U}^{-1} \chi' \mathbf{U}) \mathbf{E}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}' = \mathbf{U}\mathbf{P} \\ \mathbf{E}' = \mathbf{U}\mathbf{E} \end{pmatrix}$$

□

${}^t\mathbf{U}$ (転置行列)

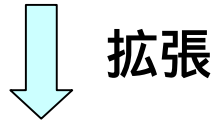
$$\therefore \chi' = \mathbf{U} \chi {}^t\mathbf{U} \quad \longleftrightarrow \quad \chi'_{\alpha\beta} = U_{\alpha\gamma} U_{\beta\delta} \chi_{\gamma\delta}$$

χ : テンソル ベクトル a の成分からなる $a_\alpha a_\beta$ もテンソル

テンソルを縮約する, $\chi_{\alpha\alpha}$, とスカラー

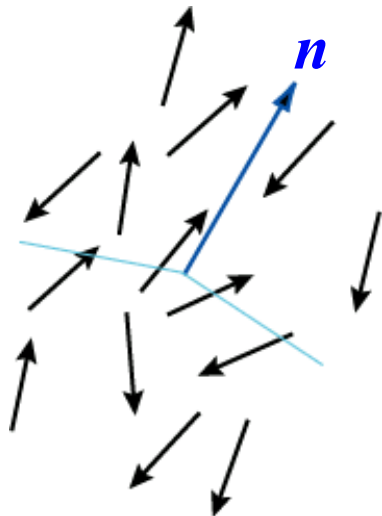
テンソル秩序パラメーター

$$S = \frac{1}{2} (3 \langle a_z^2 \rangle - 1) \quad \text{スカラー秩序パラメーター}$$



$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (3 \langle a_\alpha a_\beta \rangle - \delta_{\alpha\beta}) \quad \text{テンソル秩序パラメーター}$$

$S_{\alpha\beta}$ は2階のテンソル \longrightarrow 3本の主軸



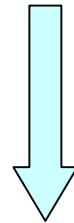
n : 配向ベクトル
分子の平均の配向方向を向いた
単位ベクトル (向きは意味なし)

$$S_{\alpha\beta} = \frac{S}{2} (3n_\alpha n_\beta - \delta_{\alpha\beta})$$

等方相-ネマチック相転移の現象論

自由エネルギー F を $S_{\alpha\beta}$ で展開

$$F = F_0 + \frac{A}{2} S_{\alpha\beta} S_{\beta\alpha} + \frac{B}{3} S_{\alpha\beta} S_{\beta\gamma} S_{\gamma\alpha} + \frac{C_1}{4} (S_{\alpha\beta} S_{\beta\alpha})^2 + \frac{C_2}{4} S_{\alpha\beta} S_{\beta\gamma} S_{\gamma\delta} S_{\delta\alpha}$$



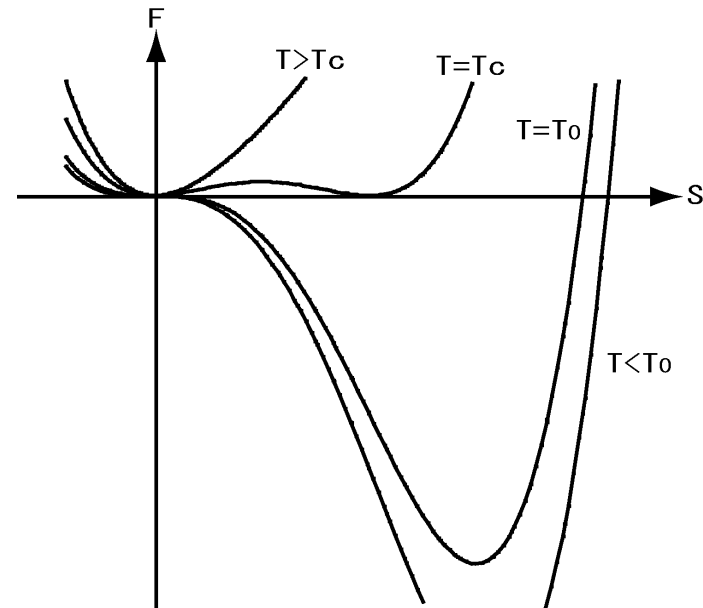
$$S_{\alpha\beta} = \frac{S}{2} (3n_\alpha n_\beta - \delta_{\alpha\beta})$$

$$F = F_0 + \frac{3A}{4} S^2 + \frac{B}{4} S^3 + \frac{9C}{16} S^4$$

$$C = C_1 + C_2/2$$

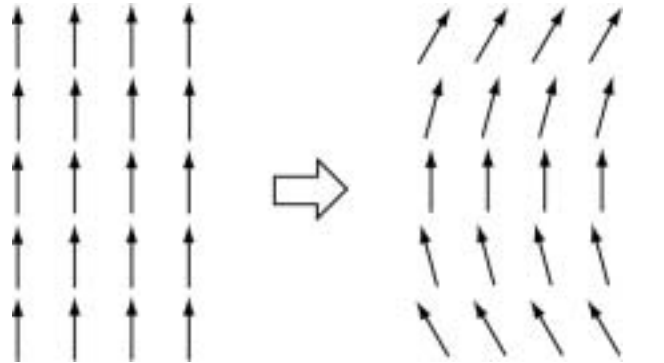
$$A = A_0 (T - T_0)$$

T_c : 等方相-ネマチック相転移温度



フランクの弾性自由エネルギー密度

前提: S は一定



一様状態
(基底状態)

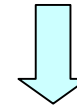
$$\partial n_\alpha / \partial x_\beta = 0$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

変形状態
(励起状態)

$$\partial n_\alpha / \partial x_\beta \neq 0$$

配向ベクトルは場所に依存



配向ベクトル場 $n(r)$

自由エネルギー密度 f_d を $\partial n_\alpha / \partial x_\beta$ で展開

$$\text{自由エネルギー} \quad F = \int f_d dV$$

f_d の条件

- 1) f_d はスカラー (f_d は回転に対して不変)
- 2) f_d は $n \rightarrow -n$ に対して不変
- 3) その体積積分が表面積分に変換されるものは除く

フランクの弾性自由エネルギー密度

$$f_d = \frac{1}{2} K_1 (\nabla \cdot \mathbf{n})^2 + \frac{1}{2} K_2 (\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{n}))^2 + \frac{1}{2} K_3 (\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n}))^2 + K_2' \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{n}) \quad (2.22)$$

$$\nabla \equiv (\partial / \partial x, \partial / \partial y, \partial / \partial z)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{n} = \text{div} \mathbf{n}, \quad \nabla \times \mathbf{n} = \text{rot} \mathbf{n}$$

$K_i (i = 1, 2, 3)$: フランクの弾性定数

フランクの弾性自由エネルギー密度

$$f_d = \frac{1}{2} K_1 (\nabla \cdot \mathbf{n})^2 + \frac{1}{2} K_2 (\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{n}))^2 \\ + \frac{1}{2} K_3 (\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n}))^2 + K_2' \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{n})$$

$\nabla = (\partial / \partial x, \partial / \partial y, \partial / \partial z)$: ベクトルの

$\nabla \cdot \mathbf{n} = \partial n_x / \partial x + \partial n_y / \partial y + \partial n_z / \partial z$: スカラー

$\nabla \times \mathbf{n} = (\partial n_z / \partial y - \partial n_y / \partial z, \partial n_x / \partial z - \partial n_z / \partial x, \partial n_y / \partial x - \partial n_x / \partial y)$

擬ベクトル(反転に対して符号を変えない)

$\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{n})$: 擬スカラー (反転に対して符号を変える)

K_2' の項はコレステリック液晶のみで存在

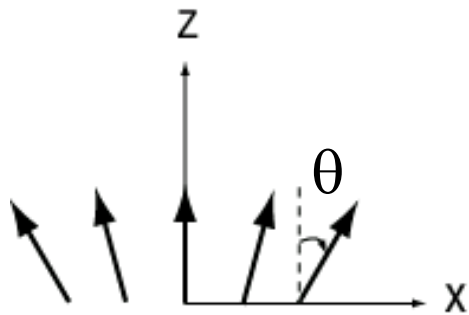
各項の意味

微小変形 (x - z 面内)

$$\mathbf{n} = (\sin\theta, 0, \cos\theta) \cong (\theta, 0, 1)$$

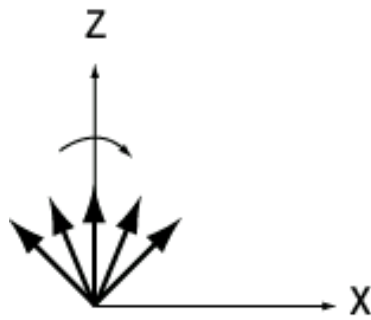
$$\frac{1}{2} K_1 (\nabla \cdot \mathbf{n})^2 \longrightarrow \nabla \cdot \mathbf{n} \cong \partial\theta / \partial x = c \text{ (定数)}$$

$$\theta = cx$$



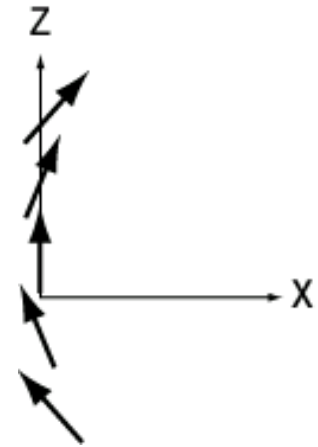
$$K_1, \nabla \cdot \mathbf{n}$$

スプレイ



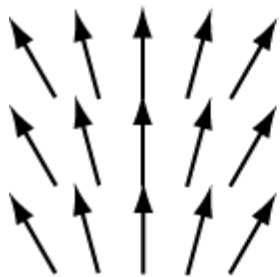
$$K_2, \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{n})$$

ツイスト

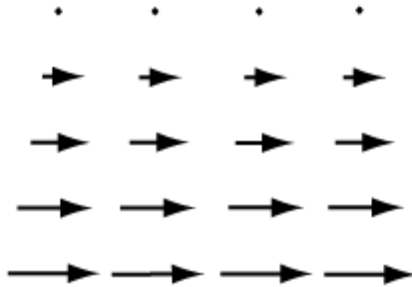


$$K_3, \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n})$$

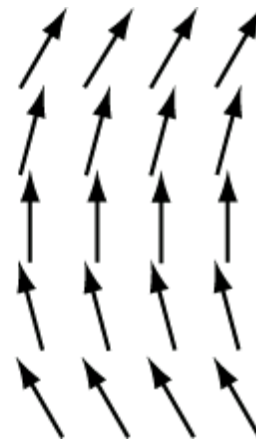
バンド



スプレイ



ツイスト



ベンド

$$\begin{aligned}
 f_d &= \frac{1}{2} K_1 (\nabla \cdot \mathbf{n})^2 + \frac{1}{2} K_2 (\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{n}))^2 \\
 &+ \frac{1}{2} K_3 (\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n}))^2 + K_2' \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{n}) \\
 &= \frac{1}{2} K_1 (\nabla \cdot \mathbf{n})^2 + \frac{1}{2} K_2 (\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{n}) + q_0)^2 + \frac{1}{2} K_3 (\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n}))^2 - \frac{1}{2} K_2 q_0^2 \\
 q_0 &= K_2' / K_2
 \end{aligned}$$

コレステリック液晶の基底状態 $\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{n}) + q_0 = 0$



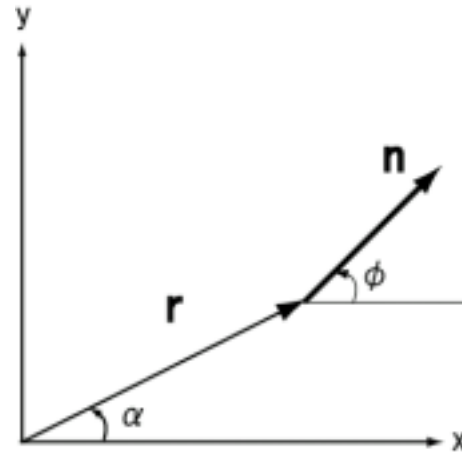
$$\mathbf{n}(\mathbf{r}) = (\cos q_0 z, \sin q_0 z, 0) \quad (z \text{ 方向にラセン軸})$$

フランクの弾性論の応用

転傾 (ディスクリネーション)

配向ベクトルは $x-y$ 面に平行

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}) = (\cos \phi(\mathbf{r}), \sin \phi(\mathbf{r}), 0)$$



ネマチック液晶の自由エネルギー密度

$$f_d = \frac{1}{2} K_1 (\nabla \cdot \mathbf{n})^2 + \frac{1}{2} K_2 (\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{n}))^2 + \frac{1}{2} K_3 (\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n}))^2$$

↓ $K_1 = K_2 = K_3 = K$ 一定数近似

$$f_d \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} K \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (3.47)$$

$F = \int f_d dV$ の極小

$\phi(r)$ が極小を与えるとし, 微小変化 $\delta\phi(r)$ を考える

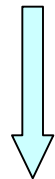
$\phi(r) \rightarrow \phi(r) + \delta\phi(r)$ に対する F の変化 δF

$$\delta F = \int f_d (\partial(\phi + \delta\phi) / \partial x, \partial(\phi + \delta\phi) / \partial y) dV$$

$$- \int f_d (\partial\phi / \partial x, \partial\phi / \partial y) dV = \int \frac{\delta F}{\delta\phi} \delta\phi dV + \dots > 0$$

オイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{\delta F}{\delta\phi} \equiv \frac{\partial f_d}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f_d}{\partial(\partial\phi / \partial x)} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f_d}{\partial(\partial\phi / \partial y)} \right) = 0 \quad \frac{\delta F}{\delta\phi} : \text{汎関数微分}$$



$$f_d = \frac{1}{2} K \left\{ \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right)^2 \right\}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ラプラス方程式}$$

ラプラス方程式の解

$$\phi = s\alpha + c \quad (3.49)$$

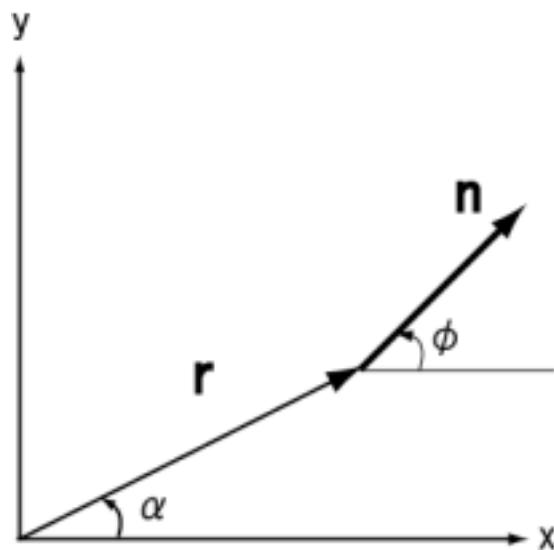
ただし,

$$\alpha = \tan^{-1}(y/x)$$

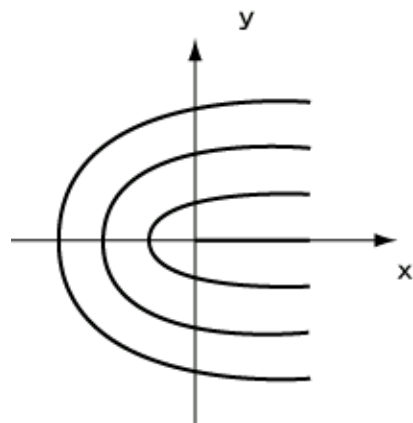
$$s = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$\pm 1/2, \pm 3/2, \pm 5/2, \dots$$

c : 定数



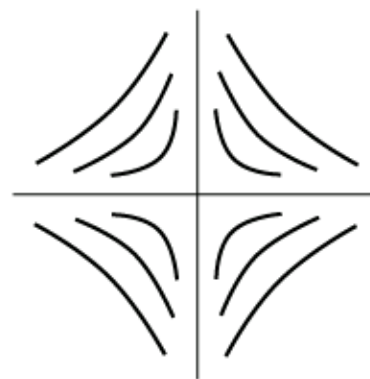
転傾の例



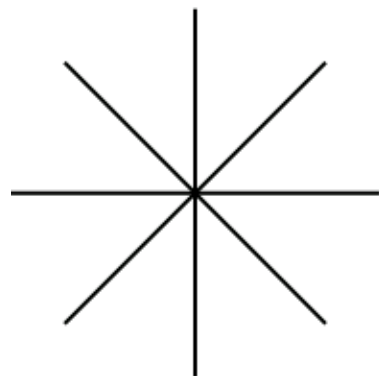
$$s = 1/2, c = 0$$



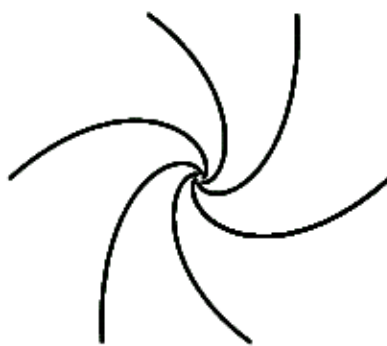
$$s = -1/2, c = 0$$



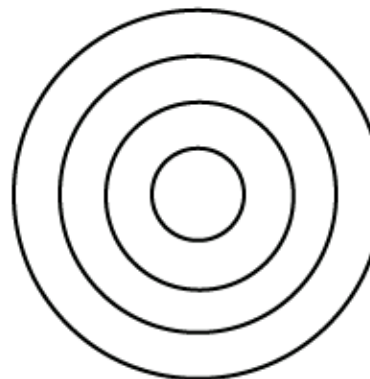
$$s = -1, c = 0$$



$$s = 1, c = 0$$



$$s = 1, c = \pi/4$$



$$s = 1, c = \pi/2$$

図3.9

外場(磁場, 電場)との相互作用による自由エネルギー

電場

$$f_{\text{el}} = -\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_{\perp} E^2 - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \Delta \varepsilon (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})^2 \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\perp} \delta_{\alpha\beta} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) n_{\alpha} n_{\beta} \quad (3.2)$$

ε_0 : 真空の誘電率, ε_{\parallel} , ε_{\perp} : 配向ベクトルに平行, 垂直の誘電率

$\Delta \varepsilon = \varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}$: 誘電率異方性

$$\Delta \varepsilon > 0 \Rightarrow \mathbf{n} \parallel \mathbf{E} \quad \Delta \varepsilon < 0 \Rightarrow \mathbf{n} \perp \mathbf{E}$$

磁場

$$f_{\text{mag}} = -\frac{1}{2} \mu_0^{-1} \chi_{\perp} B^2 - \frac{1}{2} \mu_0^{-1} \Delta \chi (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B})^2 \quad (3.4)$$

μ_0 : 真空の透磁率, μ_{\parallel} , μ_{\perp} : 配向ベクトルに平行, 垂直の磁化率

$\Delta \mu = \mu_{\parallel} - \mu_{\perp}$: 磁化率異方性

半無限領域に存在するネマチック液晶 に対する磁場の効果

$\mathbf{n} = (\cos\theta(z), \sin\theta(z), 0)$ を
式(2.22), (3.4)に代入して

$$f \equiv f_d + f_{\text{mag}} = \frac{1}{2} K_2 \left\{ \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 - \frac{1}{\xi^2} \sin^2\theta \right\} \quad (3.6)$$

ただし, $\xi = \sqrt{\frac{K_2}{\mu_0^{-1} \Delta\chi}} \cdot \frac{1}{B}$: 磁気相関長

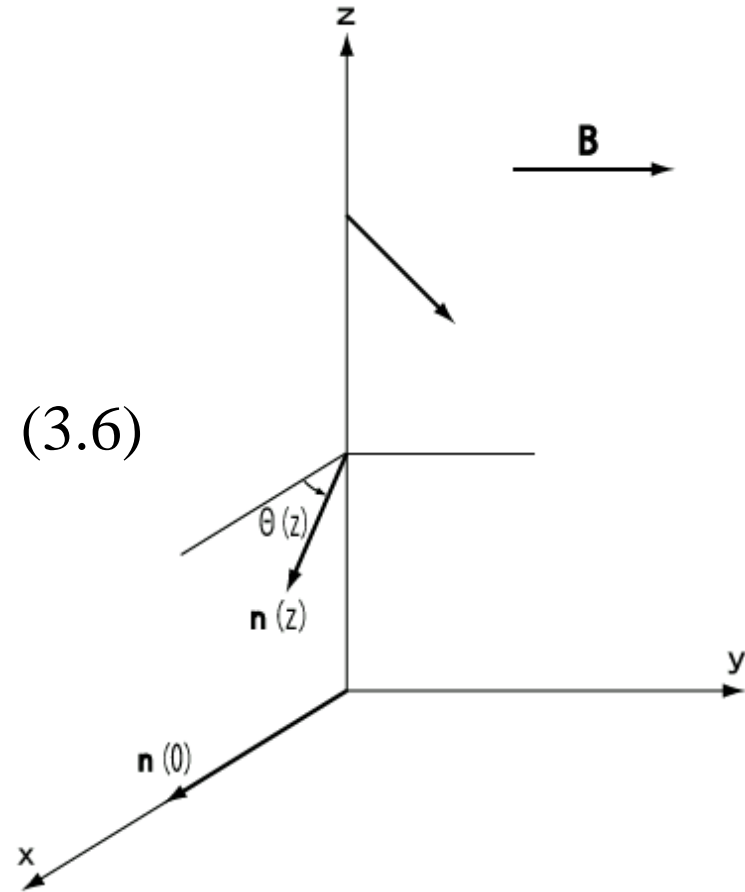


図3.1

$$F = \int f\left(\theta(z), \frac{d\theta}{dz}\right) dz \text{ を極小にする } \theta(z)$$

オイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{d}{dz} \frac{\partial f}{\partial (d\theta/dz)} = 0$$

↓ 式(3.6)

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{1}{\xi^2} \sin\theta \cos\theta = 0 \quad (3.14)$$

力学とのアナロジー $\theta \rightarrow x, z \rightarrow t$

$$\xi^2 \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{2} \cos^2 x \right) \quad \text{ポテンシャルエネルギー}$$

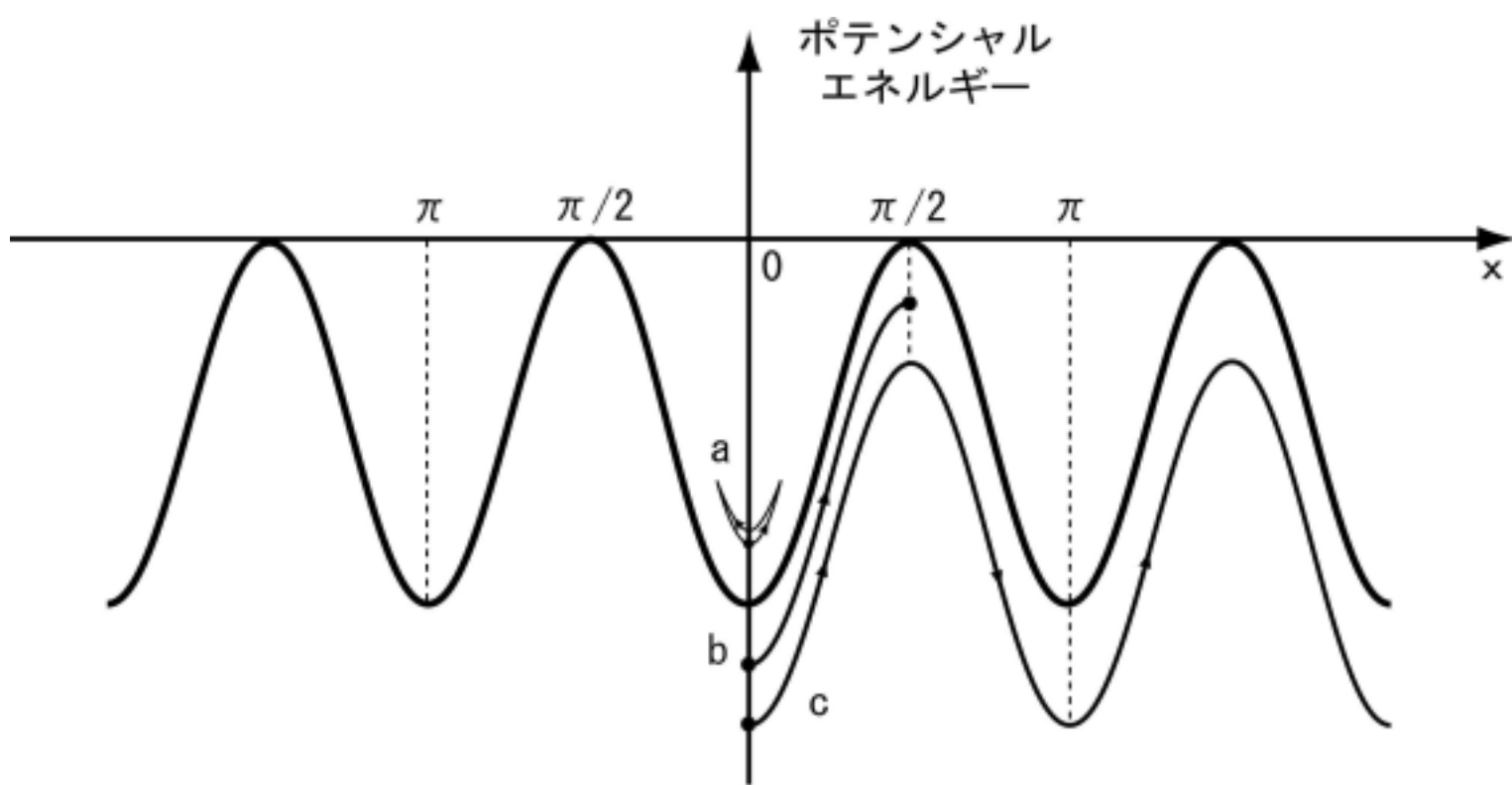


図3.2

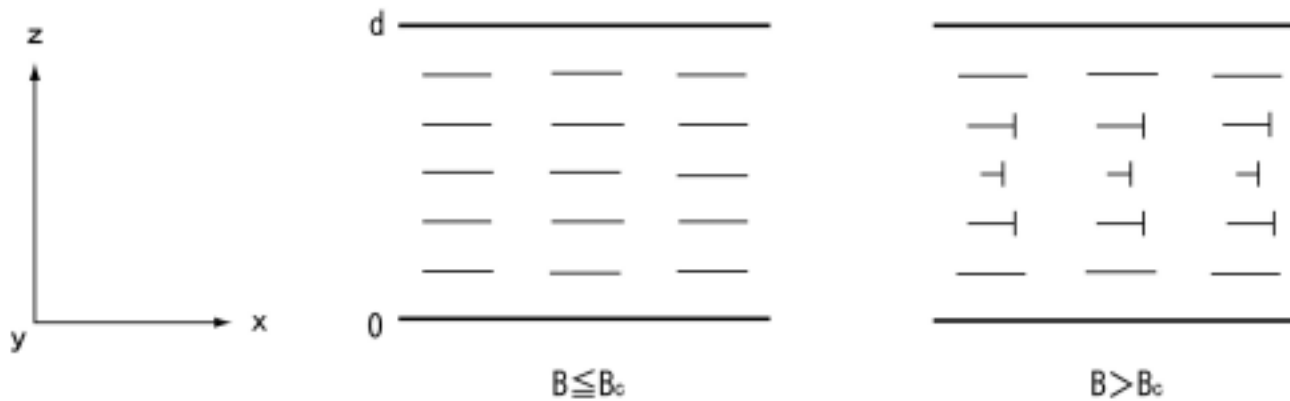
(b)の解 $z = 0$ で $\theta(0) = 0$, $z \rightarrow \infty$ で $\theta = \pm \pi/2$, $\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$

$$\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = e^{\pm z/\xi} \quad \xi = \sqrt{\frac{K_2}{\mu_0^{-1} \Delta\chi}} \cdot \frac{1}{B}$$

微小な磁場に対しても配向の変化が起こる。

フレデリクス転移

2枚の板に挟まれた液晶に対する磁場の効果

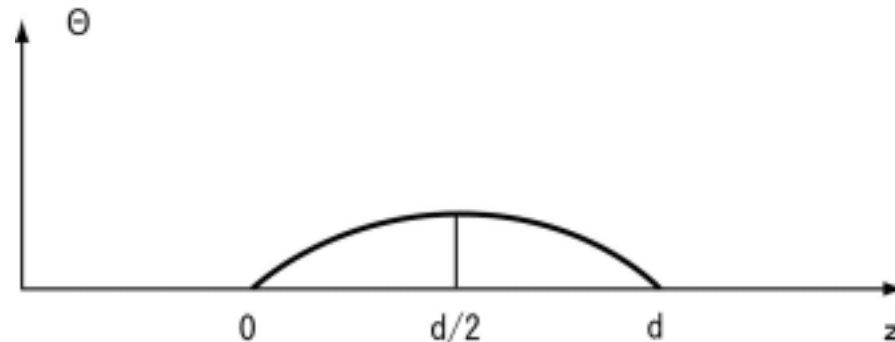


しきい値
が存在

図3.3

境界条件 $\theta(0) = \theta(d) = 0$ オイラー・ラグランジュ方程式(3.14)は同じ

図3.2の(a)の解に対応



$\theta < \theta_m \ll 1$ のとき, $\sin\theta \cong \theta - \frac{1}{6}\theta^3$ と近似して

$$F = \int_0^d (f_d + f_{\text{mag}}) dz \cong \frac{1}{2} K_2 \int_0^d \left\{ \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{\xi^2} (\theta^2 - \theta^4 / 3) \right\} dz$$

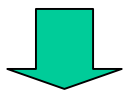
次に解を正弦波で近似

$$\theta(z) = \theta_m \sin(qz) \quad \text{境界条件より } q = \pi / d$$

自由エネルギー F に代入して

$$F = \frac{d}{4} K_2 \left\{ \left(q^2 - \frac{1}{\xi^2} \right) \theta_m^2 + \frac{1}{4\xi^2} \theta_m^4 \right\}$$

転移点: θ_m^2 の係数 = 0



$$B_c = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{K_2}{\mu_0^{-1} \Delta\chi}} : \text{しきい値}$$

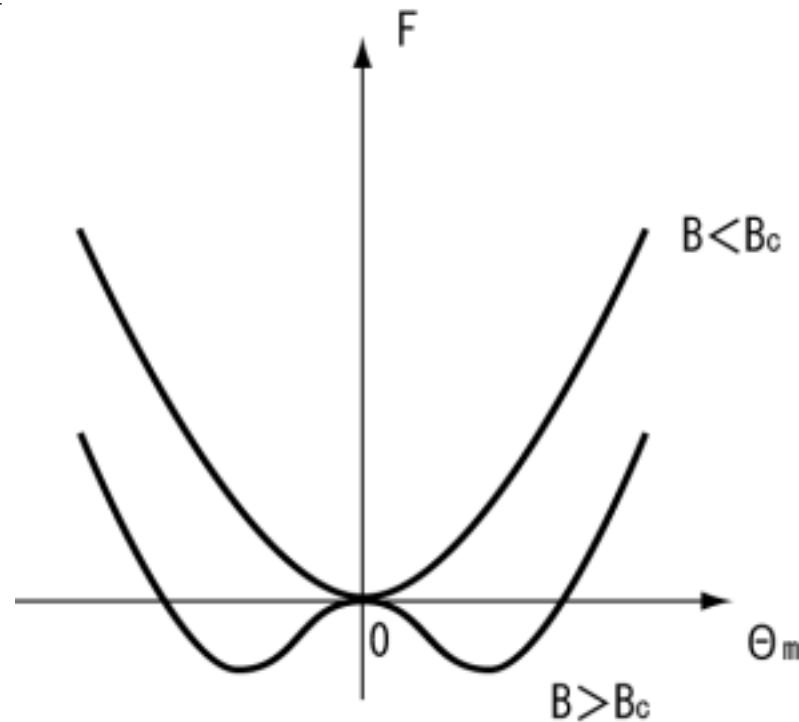


図3.4

自由エネルギー極小の条件 $\partial F / \partial \theta_m = 0$ より

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_m} = \frac{d}{2} K_2 \theta_m \left\{ \left(q^2 - \frac{1}{\xi^2} \right) + \frac{1}{2\xi^2} \theta_m^2 \right\} = 0$$

$B < B_c$ ($q^2 - \xi^{-2} > 0$) のとき , $\theta_m = 0$

$B > B_c$ ($q^2 - \xi^{-2} < 0$) のとき

$$\begin{aligned} \theta_m &= \pm \sqrt{2} \sqrt{1 - \xi^2 q^2} = \pm \sqrt{2} \sqrt{\frac{B^2 - B_c^2}{B^2}} \\ &= \pm \sqrt{2} \sqrt{\frac{(B + B_c)(B - B_c)}{B^2}} \cong \pm \sqrt{2} \sqrt{\frac{2B_c(B - B_c)}{B_c^2}} = \pm 2 \sqrt{\frac{B - B_c}{B_c}} \end{aligned}$$

転傾線のエネルギー的考察

図3.9の転傾のエネルギー 極座標

$$x = \rho \cos \alpha, \quad y = \rho \sin \alpha$$

(3.47)から

$$f_d = \frac{1}{2} K \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right)^2 \right\} \stackrel{(3.49)}{=} \frac{1}{2} K \frac{s^2}{\rho^2}$$

転傾線の単位長さ当りのエネルギー

$$F = \int f_d dx dy = \int_a^{\rho_{\max}} \frac{1}{2} K \frac{s^2}{\rho^2} 2\pi \rho d\rho = \pi K s^2 \log(\rho_{\max} / a) \quad (3.55)$$

ρ_{\max} : 容器の大きさ, a : コアの大きさ

転傾線の張力 σ_{line}

$$\sigma_{\text{line}} = \left(\frac{\partial F_l}{\partial l} \right)_T$$

F_l :長さ l の転傾線のエネルギー

$$F_l = Fl \text{ より}$$

$$\sigma_{\text{line}} = F$$

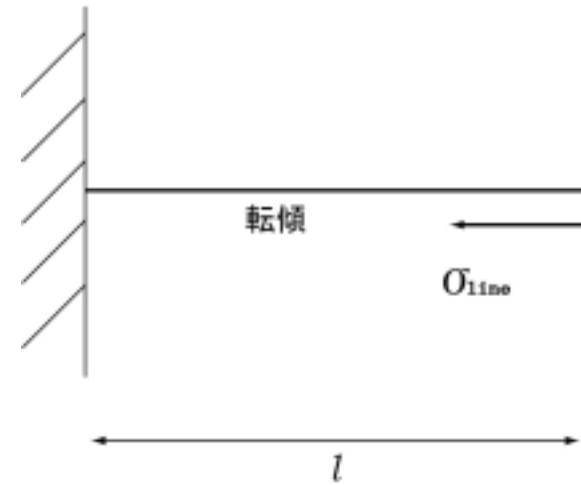


図3.17

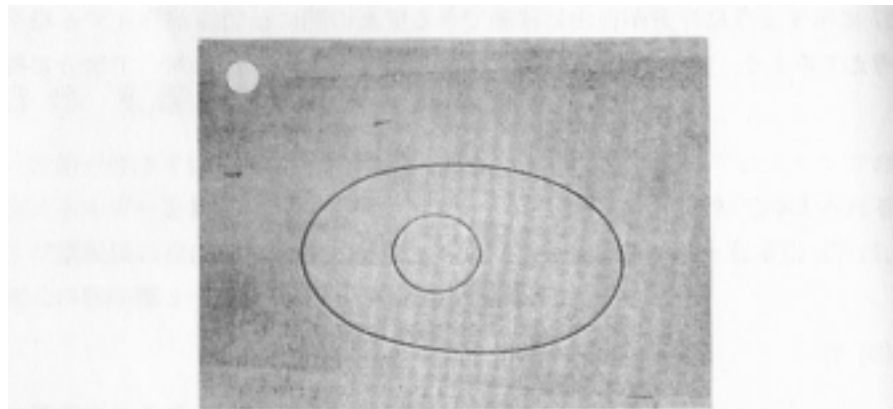
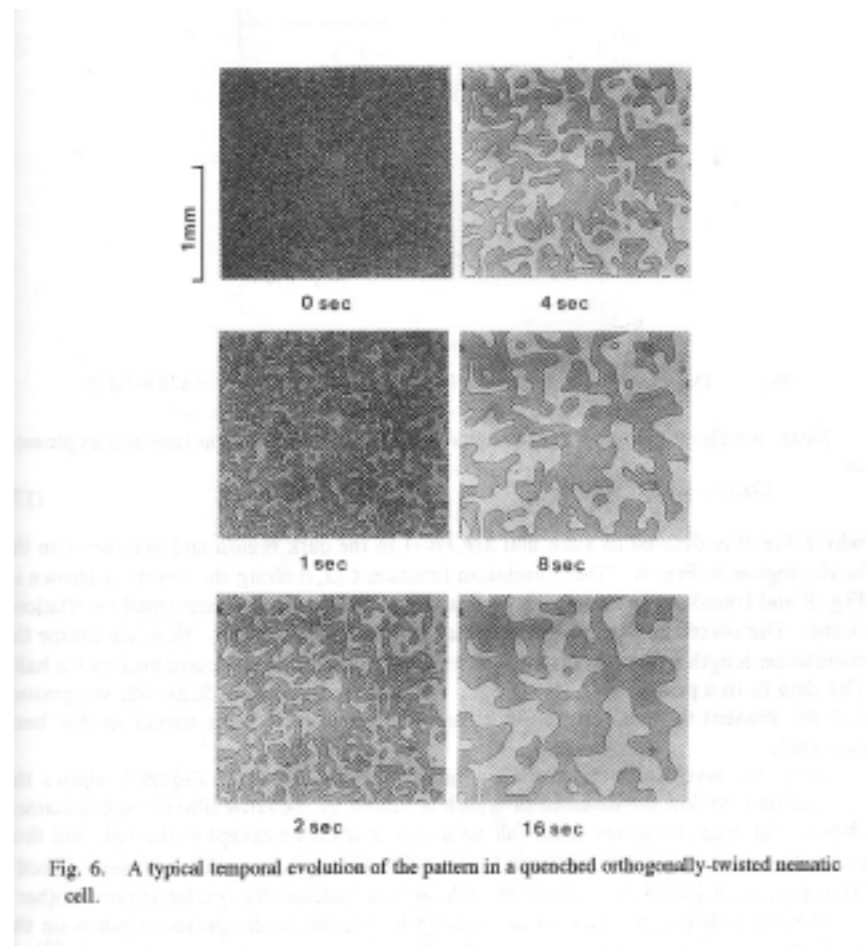
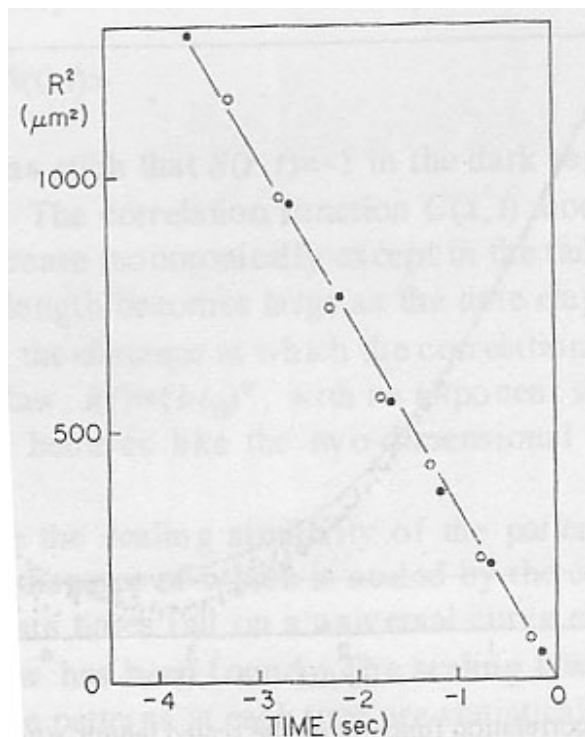


図 3.18 転傾ループが張力により縮んでゆく様子。異なる時刻で2回撮影したもの、外側のループが時間が経つと内側のループへと収縮している。(J. Nehring, *Phys. Rev. A*7, 1737(1973))

ループの運動方程式

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{\Gamma}{R} \quad \Longrightarrow \quad R^2 = 2\Gamma(t_0 - t)$$

R : ループの半径, Γ : 定数



転傾間の相互作用

一定数近似 $K_1 = K_2 = K_3 = K$

$$\begin{aligned}\phi &= s_1 \alpha_1 + s_2 \alpha_2 + c \\ &= s_1 \tan^{-1}(y/x) + s_2 \tan^{-1}(y/(x-d)) + c\end{aligned}\quad (3.59)$$

z 方向へ沿っての単位長さ当たりの
自由エネルギー

$$F = \int \frac{K}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (3.60)$$

電磁気学とのアナロジー

$$\varepsilon = K, \mathbf{E}_x = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \mathbf{E}_y = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3.61) \quad \text{と置くと}$$

$$(3.60) \quad \Rightarrow \quad F = \int \frac{\varepsilon}{2} \{ \mathbf{E}_x^2 + \mathbf{E}_y^2 \} dx dy$$

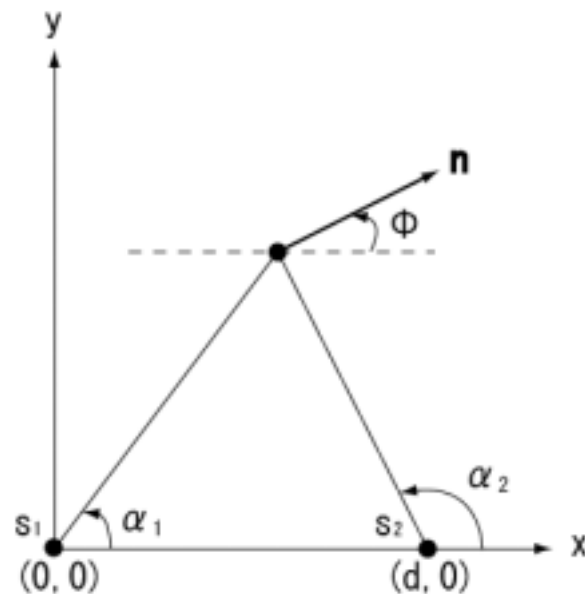


図3.19

(3.59)と(3.61)から

$$(E_x, E_y) = \left(s_1 \frac{x}{x^2 + y^2} + s_2 \frac{x-d}{(x-d)^2 + y^2}, s_1 \frac{y}{x^2 + y^2} + s_2 \frac{y}{(x-d)^2 + y^2} \right)$$

一方, 誘電率 ε の媒質中の2本の線電荷に対して

$$(E_x, E_y) = \left(\frac{\sigma_1}{2\pi\varepsilon} \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{\sigma_2}{2\pi\varepsilon} \frac{x-d}{(x-d)^2 + y^2}, \right. \\ \left. \frac{\sigma_1}{2\pi\varepsilon} \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{\sigma_2}{2\pi\varepsilon} \frac{y}{(x-d)^2 + y^2} \right)$$

σ_i : i 番目の線電荷の単位長さ当たりの電荷量

両式を比較して

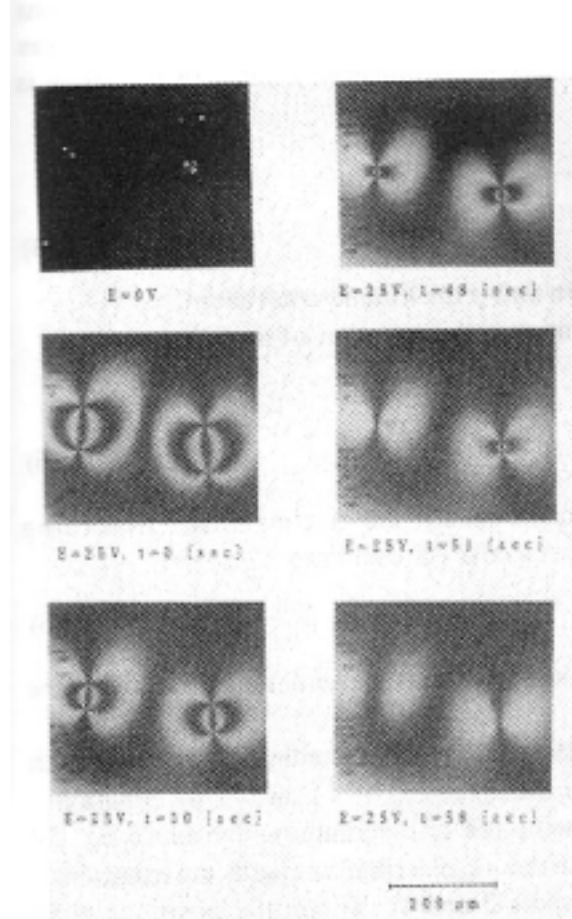
$$s_1 = \frac{\sigma_1}{2\pi\varepsilon}, \quad s_2 = \frac{\sigma_2}{2\pi\varepsilon} \quad (3.65)$$

誘電率 ϵ の媒質中の2本の線電荷間に働く単位長さ当たりの力は

$$f_{\text{int}} = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{2\pi \epsilon d}$$

↓ (3.65)

$$f_{\text{int}} = \frac{2\pi K s_1 s_2}{d}$$



転傾間に働く力はその間の距離に反比例し,それぞれの強度に比例する. 強度が同符号であれば斥力,異符号であれば引力となる.

転傾の運動方程式

$$G \frac{dl}{dt} = -\frac{2}{l} \quad \longrightarrow \quad l^2 = G(t_0 - t)$$

l : 転傾間距離, G : 定数

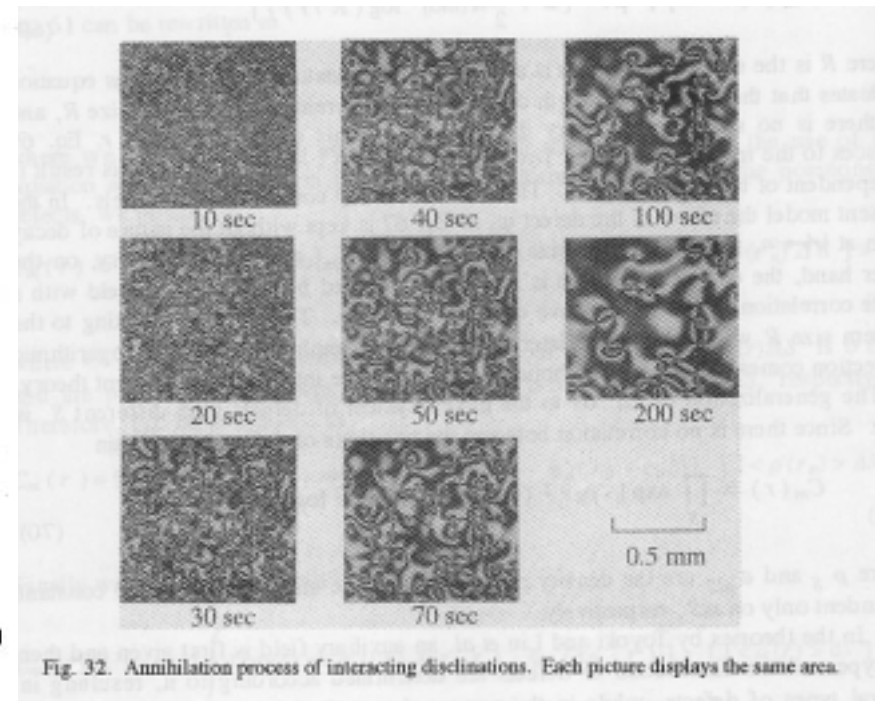
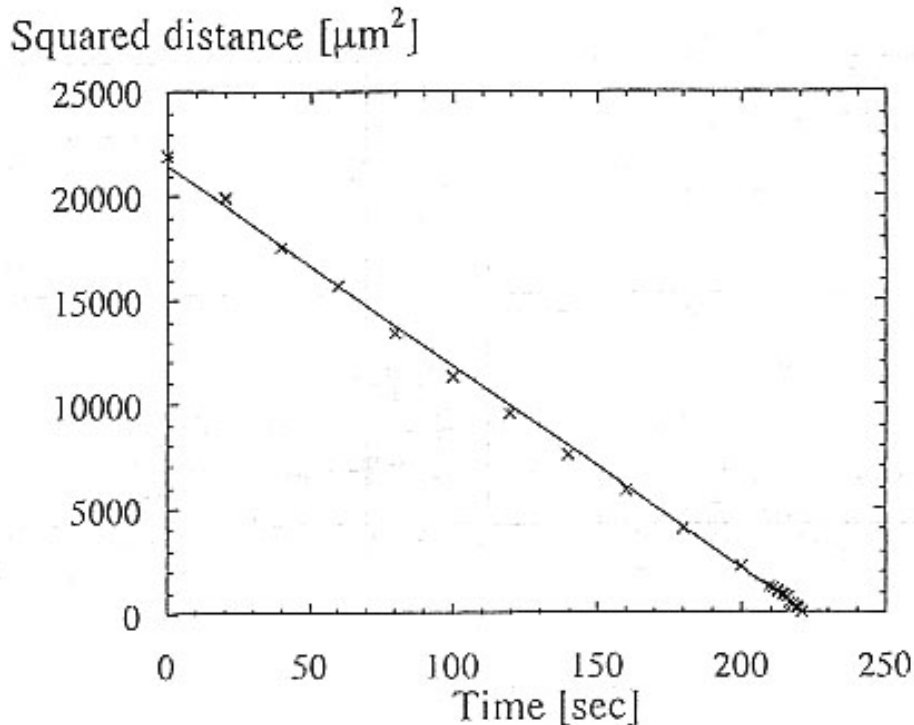


Fig. 32. Annihilation process of interacting disclinations. Each picture displays the same area.

液晶の光学

等方媒質中の光の伝播

誘電率 $\epsilon_0\epsilon$, ϵ_0 : 真空の誘電率, ϵ : 比誘電率

z 方向に進行する波

$$E_x(z,t) = a \cos(kz - \omega t + \delta_1), E_y(z,t) = 0 \quad (1.a)$$

$$E_x(z,t) = 0, E_y(z,t) = b \cos(kz - \omega t + \delta_2) \quad (1.b)$$

波数 $k = 2\pi n / \lambda$, 屈折率 $n = \sqrt{\epsilon}$,

λ : 真空中の光の波長

(1.a)と(1.b)は独立な固有モード(直線偏光)

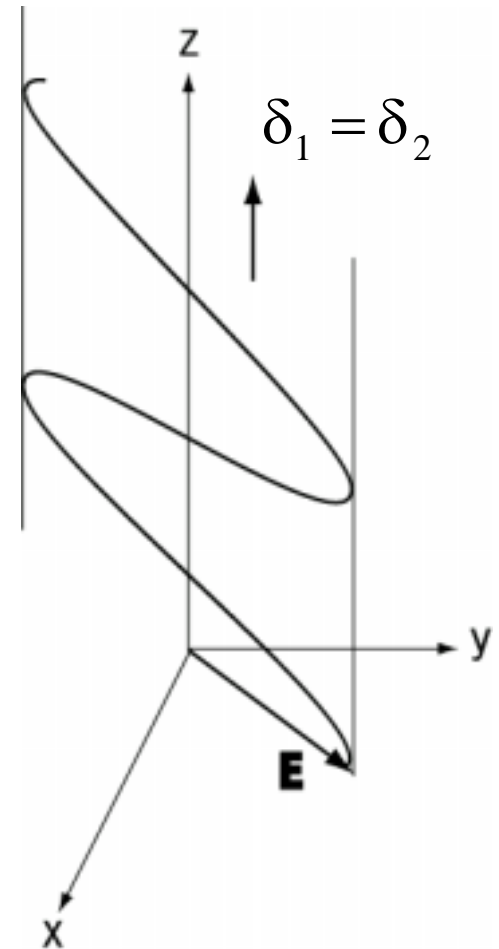


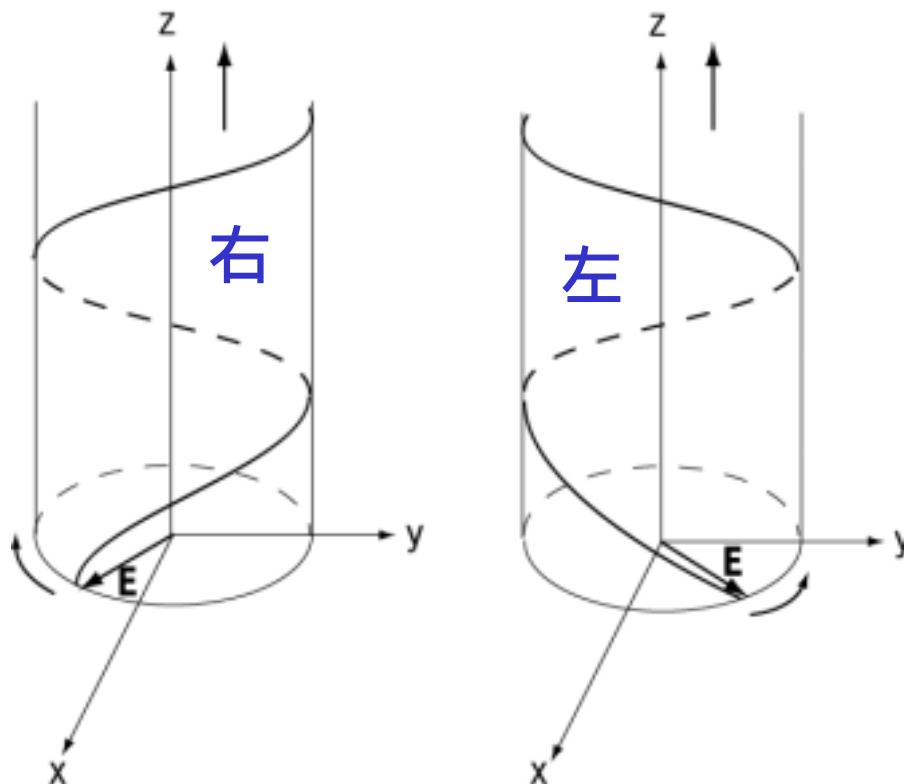
図5.4

円偏光

(1.a)と(1.b)の線形結合

$$E_x(z,t) = a \cos(kz - \omega t + \delta_1), E_y(z,t) = a \sin(kz - \omega t + \delta_1) \quad \text{右円偏光}$$

$$E_x(z,t) = b \cos(kz - \omega t + \delta_2), E_y(z,t) = -b \sin(kz - \omega t + \delta_2) \quad \text{左円偏光}$$



楕円偏光

$$E_x(z,t) = a \cos(kz - \omega t + \delta_1), E_y(z,t) = b \cos(kz - \omega t + \delta_2)$$

鏡映面の無い液体中の旋光性

旋光性: 直線偏光が媒質を透過すると偏光方向を変えること

右および左円偏光の速さが異なる

入射光

$$(E_x, E_y) = (E_0 \cos(kz - \omega t), 0)$$

$$= E_0 / 2 (\cos(kz - \omega t), \sin(kz - \omega t)) \quad \text{右}$$

$$+ E_0 / 2 (\cos(kz - \omega t), -\sin(kz - \omega t)) \quad \text{左}$$

媒質中

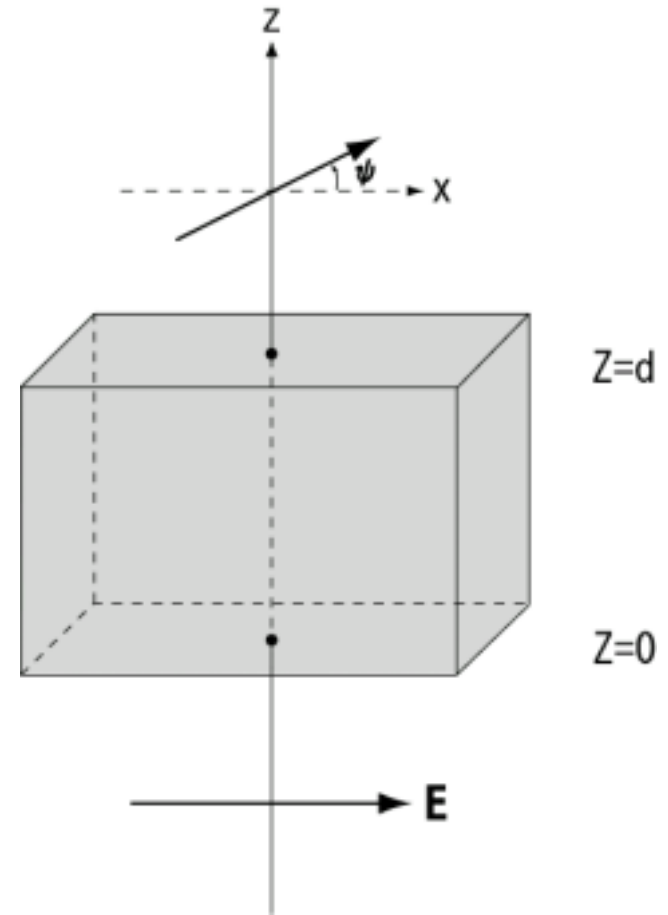
$$(E_x, E_y) = \frac{E_0}{2} (\cos(k_R z - \omega t), \sin(k_R z - \omega t)) + \frac{E_0}{2} (\cos(k_L z - \omega t), -\sin(k_L z - \omega t))$$

$$= E_0 \left(\cos\left(\frac{k_R - k_L}{2} z\right), \sin\left(\frac{k_R - k_L}{2} z\right) \right) \cos\left(\frac{k_R + k_L}{2} z - \omega t\right)$$

回転角

$$\psi = -(k_R - k_L) / 2 \cdot d = (v_L^{-1} - v_R^{-1}) \omega d / 2 = \pi (n_L - n_R) d / \lambda \quad (5.39)$$

n_L, n_R : 左および右円偏光に対する屈折率



異方媒質中の光の伝播

誘電率は2階のテンソル

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

z 方向へ進行する光

$$E_x(z, t) = a \cos(k_x z - \omega t + \delta_1), \quad E_y(z, t) = 0$$

$$E_x(z, t) = 0, \quad E_y(z, t) = b \cos(k_y z - \omega t + \delta_2)$$

$$k_x = 2\pi n_x / \lambda, \quad n_x = \sqrt{\varepsilon_x}$$

$$k_y = 2\pi n_y / \lambda, \quad n_y = \sqrt{\varepsilon_y}$$

偏光顕微鏡

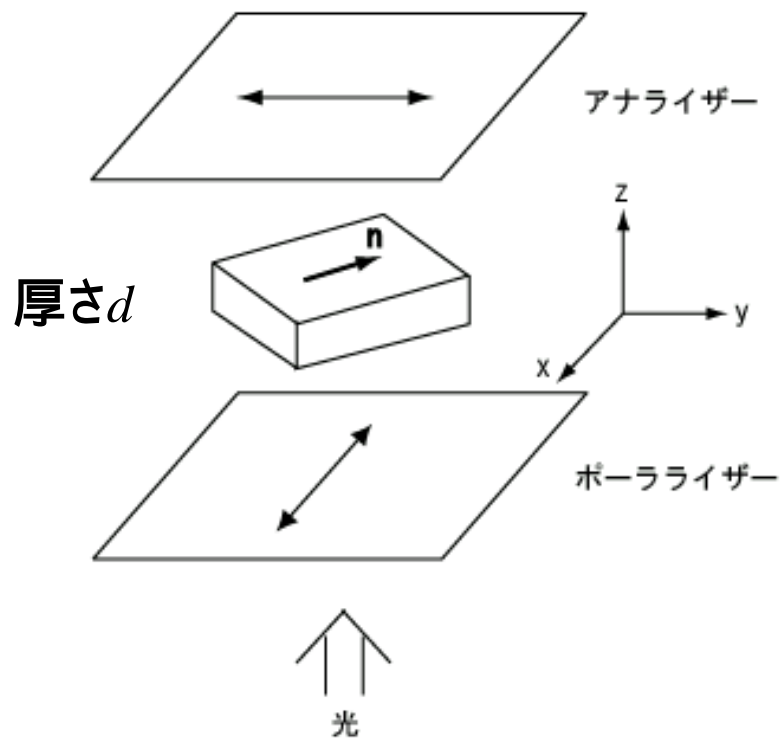
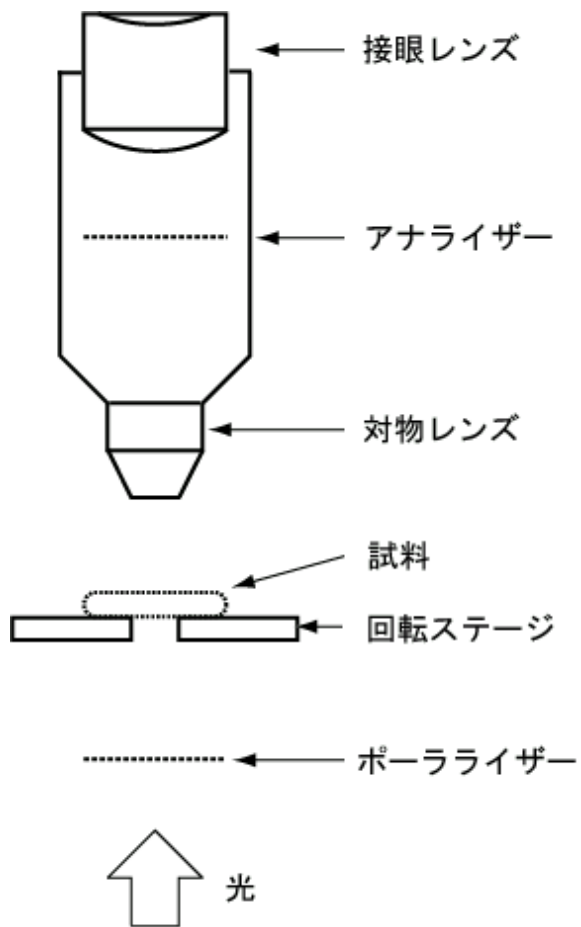


図3.11

入射光 $E_x(z, t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)}$

液晶中の光

$$E_{\perp}(z, t) = -E_0 \sin \alpha e^{i(2\pi n_{\perp} / \lambda \cdot z - \omega t)}$$

$$E_{\parallel}(z, t) = E_0 \cos \alpha e^{i(2\pi n_{\parallel} / \lambda \cdot z - \omega t)}$$

n_{\parallel} , n_{\perp} : 配向ベクトルに平行
および垂直な方向の屈折率

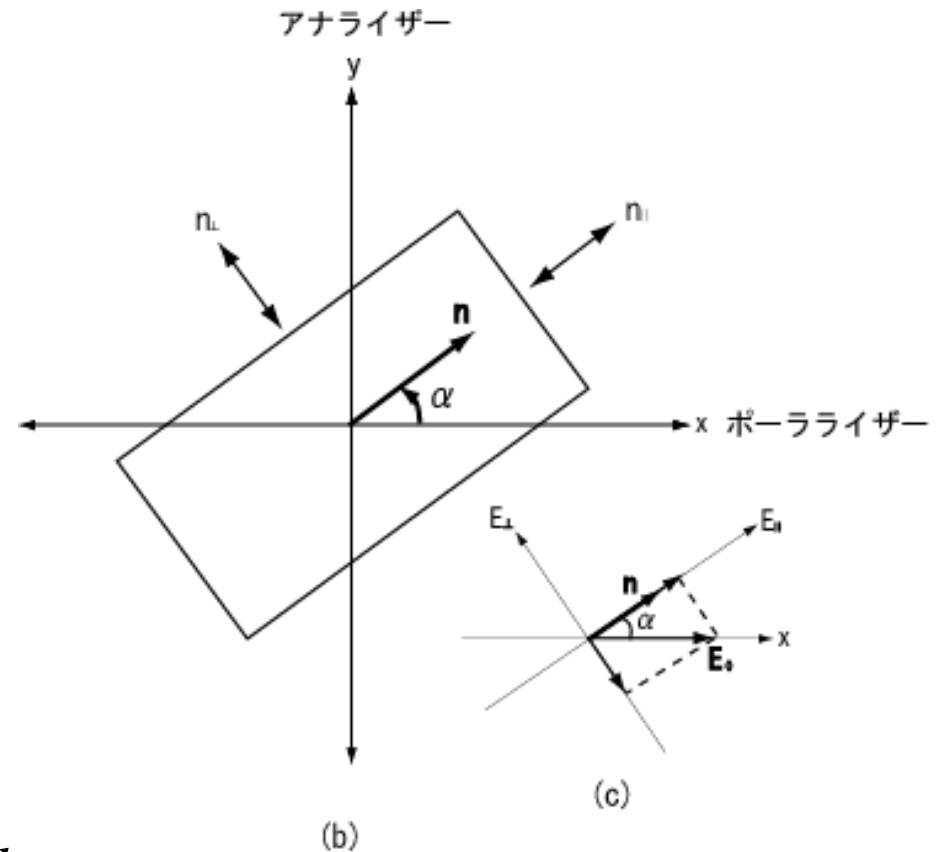
液晶を透過後のx方向の電場

$$E_y(d, t) = E_{\parallel}(d, t) \sin \alpha + E_{\perp}(d, t) \cos \alpha$$

$$= \frac{1}{2} E_0 \sin 2\alpha \left(e^{i2\pi n_{\parallel} d / \lambda} - e^{i2\pi n_{\perp} d / \lambda} \right) e^{-i\omega t}$$

透過光強度

$$I = |E_y|^2 = I_0 \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\pi n_a d}{\lambda}, \quad n_a = n_{\parallel} - n_{\perp} : \text{屈折率異方性}$$



偏光顕微鏡で見た転傾

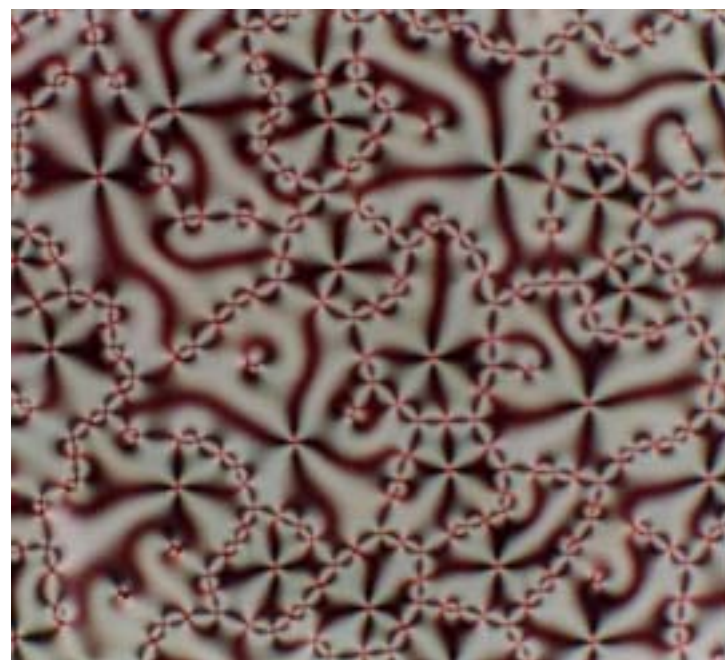
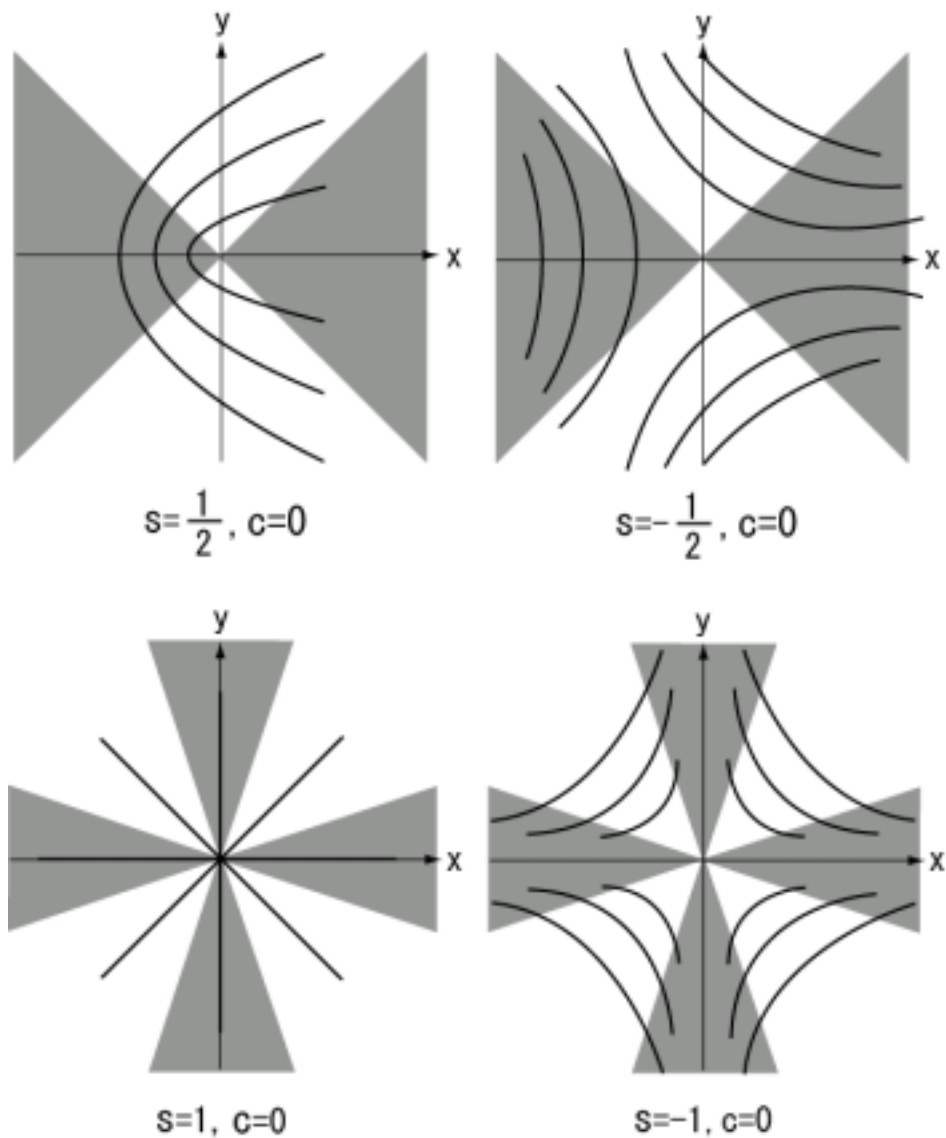


図3.12

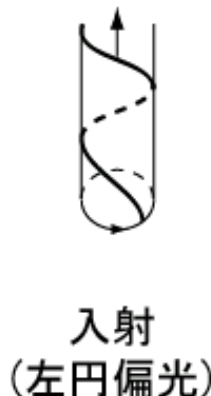
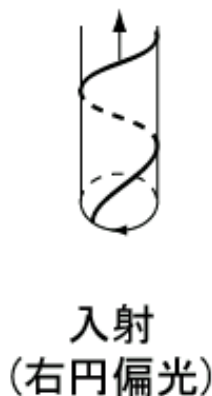
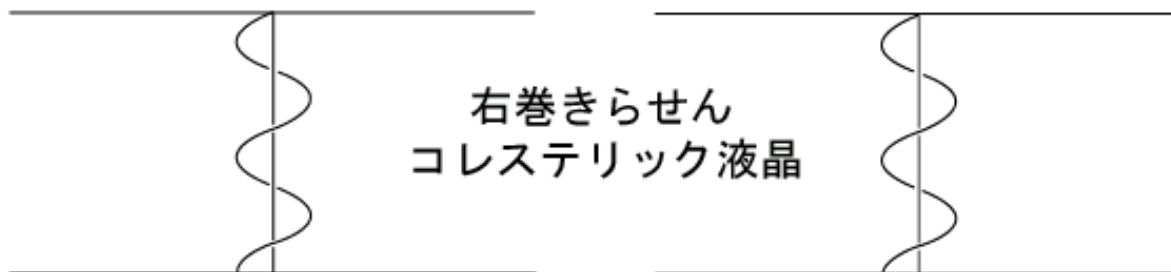
コレステリック液晶中の光の伝播

透過せず

透過
(左円偏光)



1. 選択反射
2. 大きな旋光性
3. 導波効果



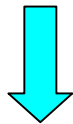
反射せず

マクスウェル方程式

コレステリック液晶のらせん軸方向 (z 方向) に光が進行する場合

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (E_x(z, t), E_y(z, t), 0), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = (H_x(z, t), H_y(z, t), 0)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$



$$\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \Delta \mathbf{E} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} \quad (5.45)$$

ただし, 誘電率テンソルは式(3.2)より

$$\boldsymbol{\varepsilon}(z) = \begin{pmatrix} (\varepsilon_{\parallel} + \varepsilon_{\perp})/2 & 0 & 0 \\ 0 & (\varepsilon_{\parallel} + \varepsilon_{\perp})/2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\perp} \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon_a}{2} \begin{pmatrix} \cos 2q_0 z & \sin 2q_0 z & 0 \\ \sin 2q_0 z & -\cos 2q_0 z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

q_0 : らせんの波数

厳密解

$$\begin{aligned} E(z, t) &= \frac{1}{2} E(z) e^{-i\omega t} + \frac{1}{2} E(z)^* e^{i\omega t} \\ &= \operatorname{Re}[E(z) e^{-i\omega t}] \end{aligned}$$

$E^\pm(z) \equiv E_x(z) \pm iE_y(z)$ を定義する

$E^+(z)$ と $E^-(z)$ は z 軸の正の方向に伝播する場合にはそれぞれ右および左円偏光を表す

例えば $(E^+(z), E^-(z)) = (e^{ikz}, 0)$ ($k > 0$)とおくと

$$(E_x(z), E_y(z)) = (e^{ikz}/2, -ie^{ikz}/2)$$

さらに,

$$(E_x(z, t), E_y(z, t)) = (\cos(kz - \omega t)/2, \sin(kz - \omega t)/2)$$

$E^\pm(z) \equiv E_x(z) \pm iE_y(z)$ を方程式(5.45)に代入すると

$$-\frac{d^2}{dz^2} \begin{pmatrix} E^+(z) \\ E^-(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_0^2 & k_1^2 e^{i2q_0z} \\ k_1^2 e^{-i2q_0z} & k_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^+(z) \\ E^-(z) \end{pmatrix}$$

$$k_0^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \bar{\epsilon}, \quad k_1^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\epsilon_a}{2}$$

$$\bar{\epsilon} = (\epsilon_{\square} + \epsilon_{\perp})/2, \quad \epsilon_a = \epsilon_{\square} - \epsilon_{\perp}$$

解を

$$E^+(z) = a e^{i(l+q_0)z}, \quad (5.60)$$

$$E^-(z) = b e^{i(l-q_0)z}$$

と仮定すると

$$\begin{pmatrix} (l + q_0)^2 - k_0^2 & -k_1^2 \\ -k_1^2 & (l - q_0)^2 - k_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \quad (5.61)$$

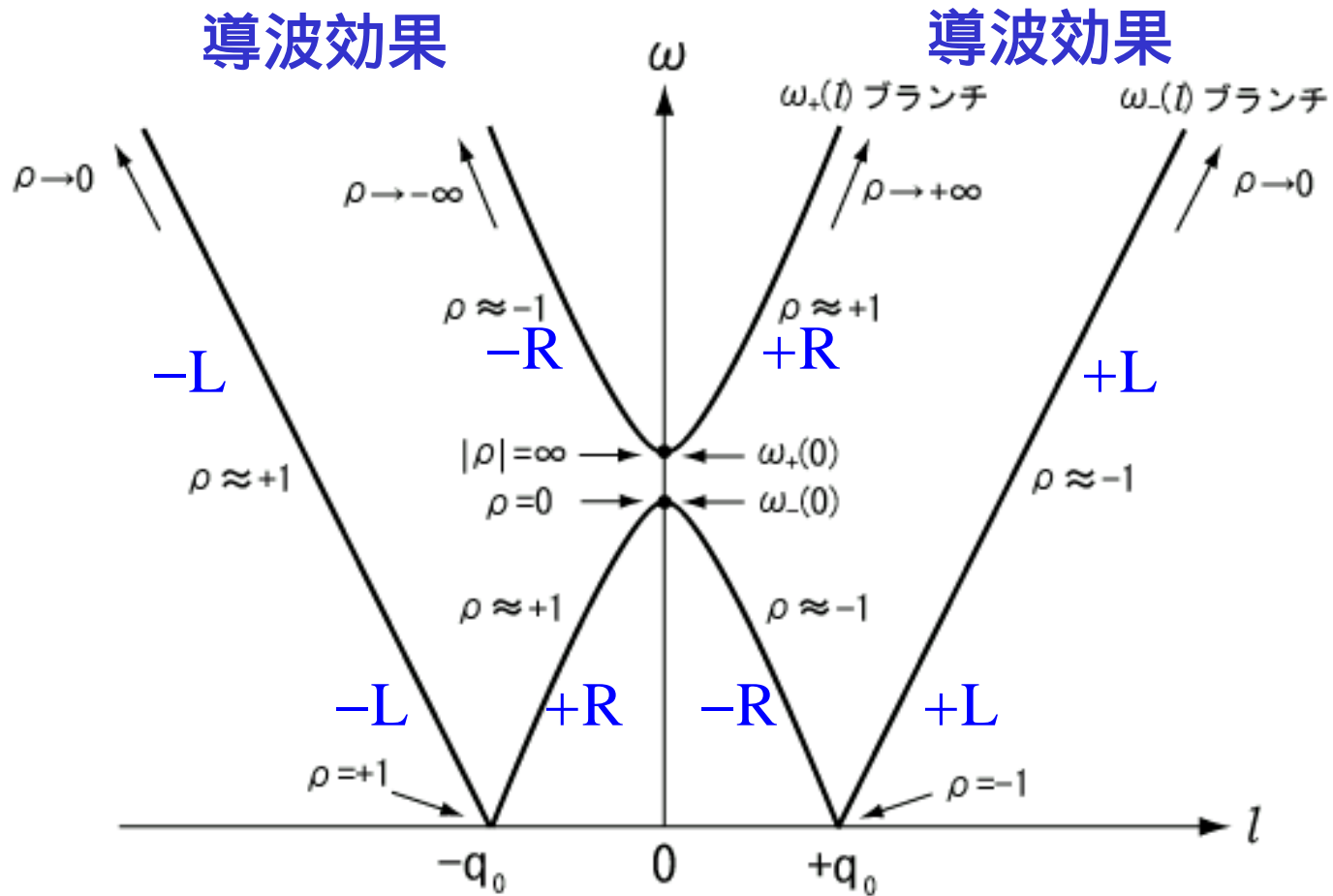
上式が同時にゼロ以外の解を持つためには

$$\begin{vmatrix} (l + q_0)^2 - k_0^2 & -k_1^2 \\ -k_1^2 & (l - q_0)^2 - k_0^2 \end{vmatrix} = (k_0^2 - l^2 - q_0^2)^2 - 4q_0^2 l^2 - k_1^4 = 0 \quad (5.62)$$

ω について解くと

$$\omega_{\pm}^2(l) = \frac{c^2}{\bar{\varepsilon}} \frac{(l^2 + q_0^2) \pm \sqrt{4q_0^2 l^2 + (\varepsilon_a / 2\bar{\varepsilon})^2 (l^2 - q_0^2)^2}}{1 - (\varepsilon_a / 2\bar{\varepsilon})^2}$$

分散関係



- +R: z 軸の正の方向に進行する右円偏光
- L: z 軸の負の方向に進行する左円偏光

選択反射

以下の角周波数領域で l は純虚数 $\pm i\kappa$ ($\kappa > 0$)

$$\omega_-(0) < \omega < \omega_+(0) \quad \left(\omega_-(0) = \frac{cq_0}{n_{\parallel}}, \omega_+(0) = \frac{cq_0}{n_{\perp}} \right)$$

このとき, 式(5.60)から

$$E^+(z) = a e^{i(l+q_0)z} = a e^{\mp\kappa z} e^{iq_0 z},$$

$$E^-(z) = b e^{i(l-q_0)z} = b e^{\mp\kappa z} e^{-iq_0 z}$$

十分厚い試料では完全反射が起こる

ただし, 右巻きらせんに対しては右円偏光が完全反射し,
左円偏光は透過する

旋光性

式 (5.62)より, ギャップ付近と高周波を除き

$$k_L \cong k_0 + \frac{k_1^4}{8k_0q_0(q_0 + k_0)}$$

$$k_R \cong k_0 + \frac{k_1^4}{8k_0q_0(q_0 - k_0)}$$

式(5.39)から, 単位長さ当りの偏光方向の回転角は

$$\begin{aligned} (k_L - k_R) / 2 &= \frac{k_1^4}{8q_0(k_0^2 - q_0^2)} \\ &= \frac{q_0}{32} \left(\frac{n_{\parallel}^2 - n_{\perp}^2}{n_{\parallel}^2 + n_{\perp}^2} \right)^2 \frac{1}{\lambda'^2 (1 - \lambda'^2)} \end{aligned}$$

$\lambda' = \lambda / P = q_0 / k_0$, λ : 真空中の光の波長, P : らせんのフルピッチ

導波効果

高周波領域 ω 大 l 大 ($\lambda \ll (n_{\parallel} - n_{\perp})P$)

式(5.62)から

$$l \approx \frac{\omega}{c} n_{\parallel} \quad (\omega_{-}(l) \text{ ブランチ})$$

$$l \approx \frac{\omega}{c} n_{\perp} \quad (\omega_{+}(l) \text{ ブランチ})$$

式(5.61)より

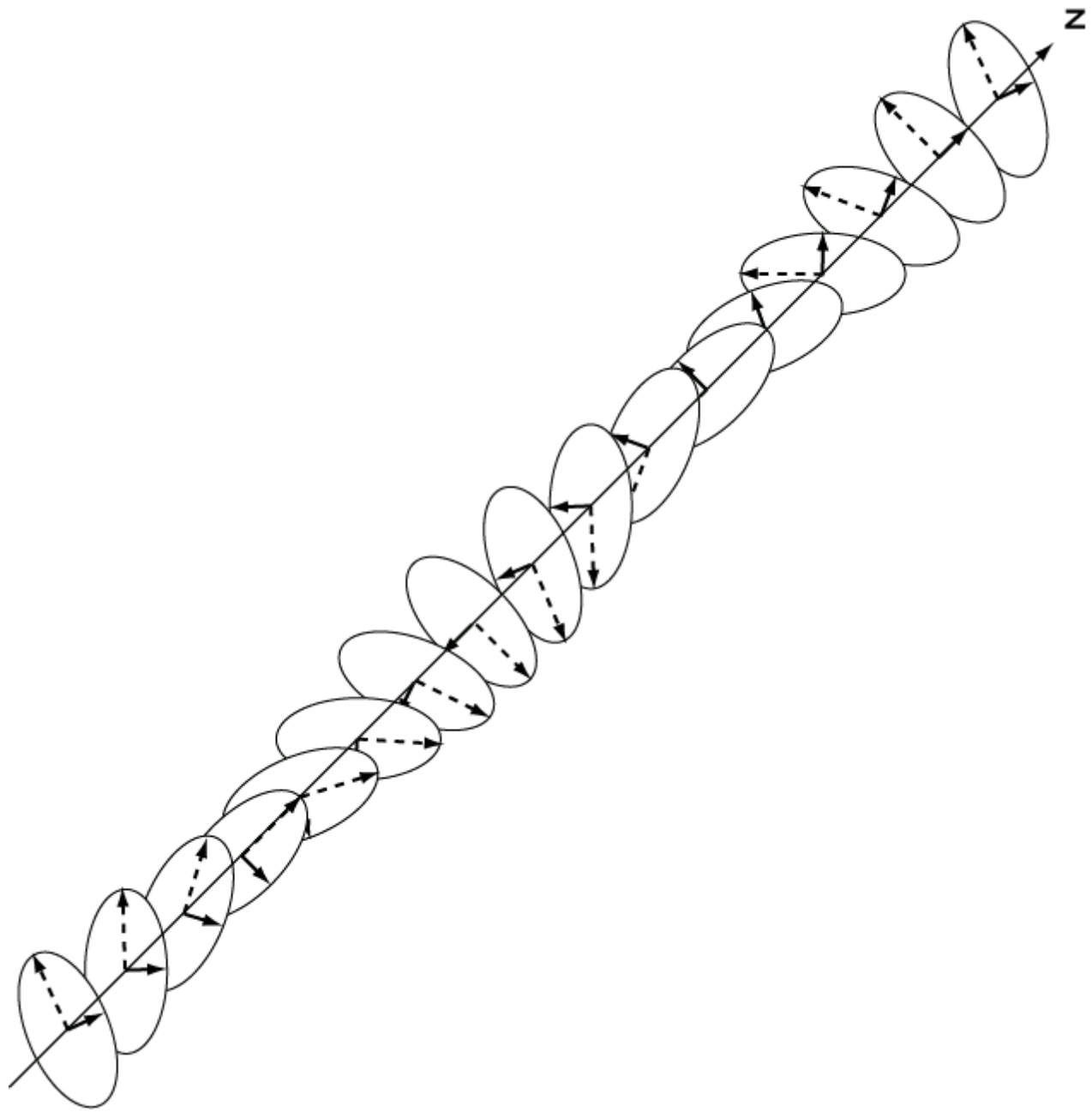
$$a = b$$

$$a = -b$$

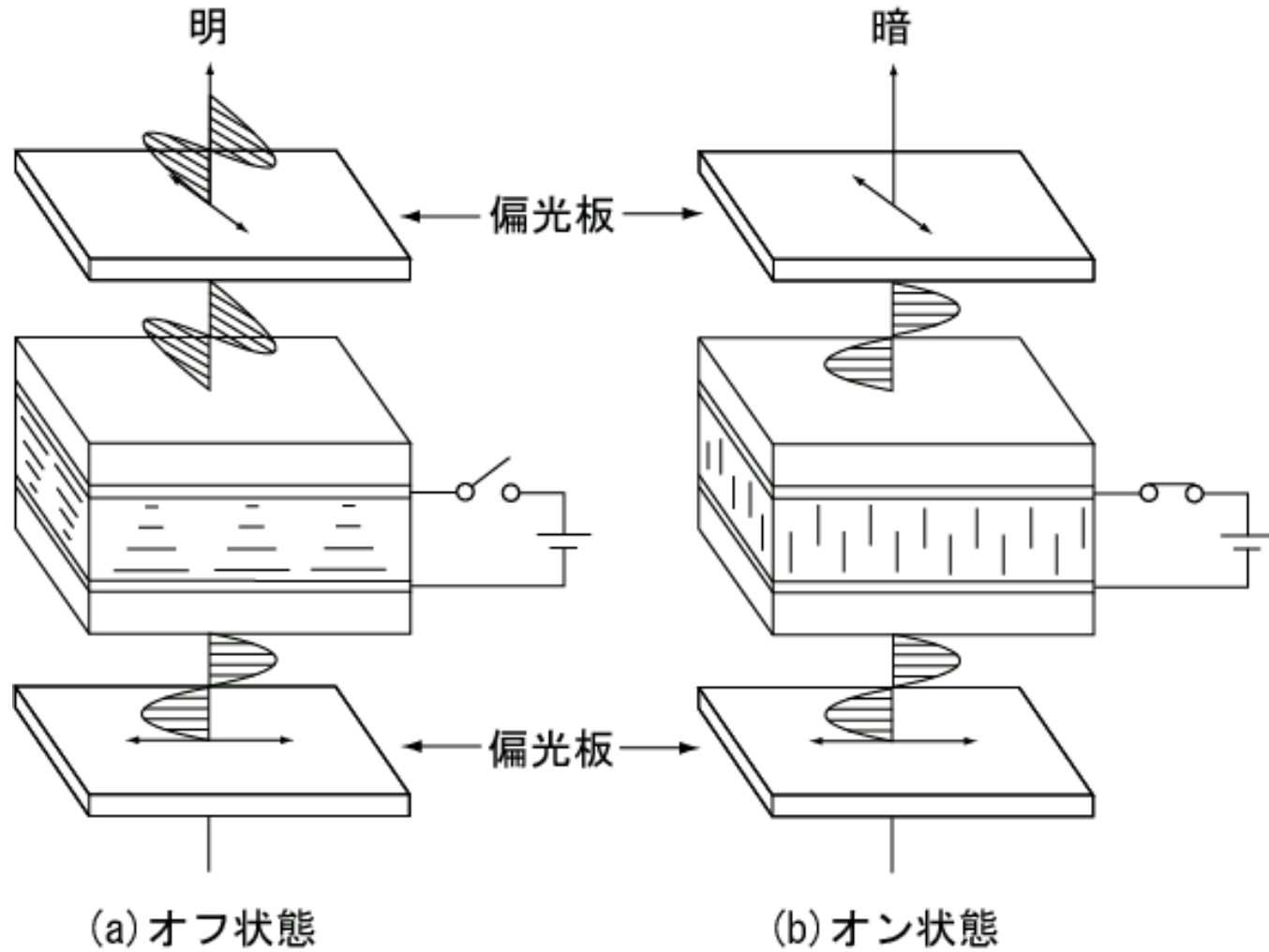
$$\begin{pmatrix} E_x(z,t) \\ E_y(z,t) \end{pmatrix} = a \cos(lz - \omega t) \begin{pmatrix} \cos q_0 z \\ \sin q_0 z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} E_x(z,t) \\ E_y(z,t) \end{pmatrix} = a \sin(lz - \omega t) \begin{pmatrix} -\sin q_0 z \\ \cos q_0 z \end{pmatrix}$$

配向ベクトル $n(z) = \begin{pmatrix} \cos q_0 z \\ \sin q_0 z \end{pmatrix}$ に平行

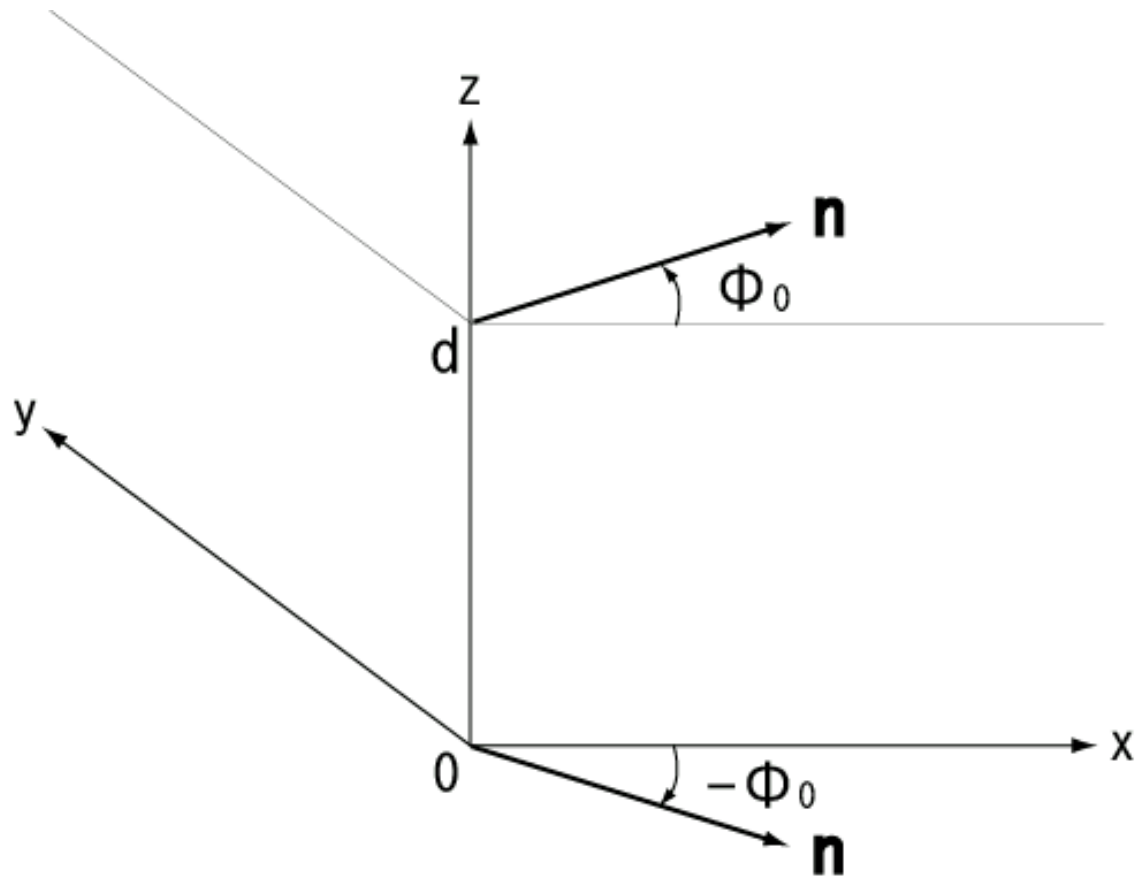
垂直



TN(Twisted Nematic)型液晶ディスプレイ



フレデリクス転移のしきい値



無電場下の配向

$$\mathbf{n} = (\cos(\phi_0(2z/d - 1)), \sin(\phi_0(2z/d - 1)), 0)$$

$$\mathbf{n}(z) = (\sin\theta(z)\cos\phi(z), \sin\theta(z)\sin\phi(z), \cos\theta(z))$$

を自由エネルギー密度に代入すると

$$f_d = \frac{1}{2} g(\theta) \left(\frac{\partial\theta}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} h(\theta) \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2$$

$$g(\theta) = K_1 \sin^2\theta + K_3 \cos^2\theta, \quad h(\theta) = (K_2 \sin^2\theta + K_3 \cos^2\theta) \sin^2\theta$$

$\theta = \pi/2 - \psi$ ($\psi \ll 1$) を代入すると

$$f_d = \frac{1}{2} K_1 \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left\{ K_2 + (K_3 - 2K_2)\psi^2 \right\} \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \Delta\varepsilon \psi^2 E^2 \quad (5.86)$$

ただし, 式(3.3)を書き換えた電場との相互作用の項を加えた

近似式 $\psi = \psi_m \sin(\pi z/d)$, $\phi = \phi_0 (2z/d - 1)$

を式(5.86)に代入し, 積分すると

$$F/d = \frac{1}{4} \left[K_1 \left(\frac{\pi}{d} \right)^2 + (K_3 - 2K_2) \left(\frac{2\phi_0}{d} \right)^2 - \varepsilon_0 \Delta \varepsilon E^2 \right] \psi_m^2 + \frac{1}{2} K_2 \left(\frac{2\phi_0}{d} \right)^2$$

ψ_m^2 の係数ゼロがしきい値

$$V_c = \frac{2}{(\varepsilon_0 \Delta \varepsilon)^{1/2}} \left[K_1 \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 + (K_3 - 2K_2) \phi_0^2 \right]^{1/2}$$

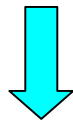
液晶の流体力学

ネマチック液晶の状態: 配向ベクトル場 + 流れの速度場

$\mathbf{v}(\mathbf{r})$: 速度場

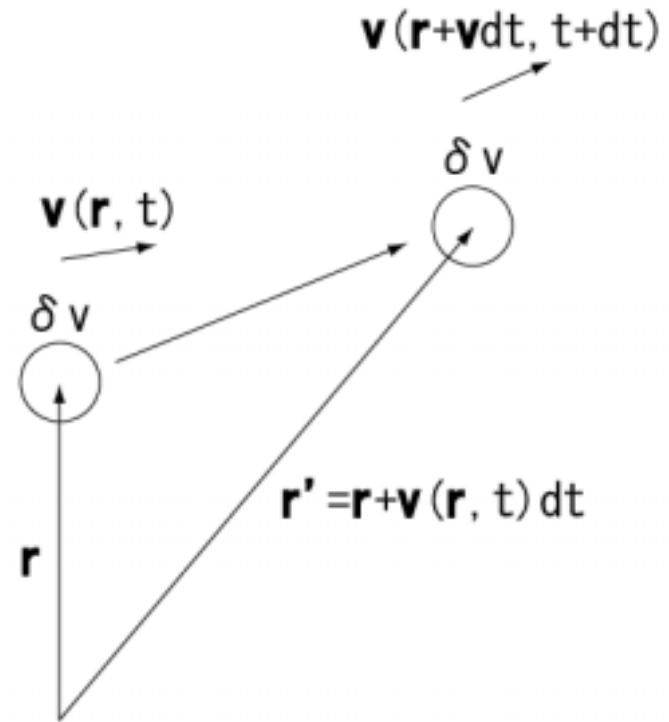
質量の保存

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div}(\rho \mathbf{v}) \quad \rho: \text{密度}$$



非圧縮性
 $\rho = \text{一定}$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0$$



加速度

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \frac{\mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{v}dt, t + dt) - \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{dt}$$

$$= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}$$

流れに沿っての変化を見た微分
ラグランジュ微分 (物質微分)

速度場の方程式

$$\rho \frac{dv_\alpha}{dt} \equiv \rho \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + v_\beta \frac{\partial v_\alpha}{dx_\beta} \right) = \frac{\partial \sigma_{\beta\alpha}}{dx_\beta}$$

応力テンソル $\sigma_{\alpha\beta}$ の表式

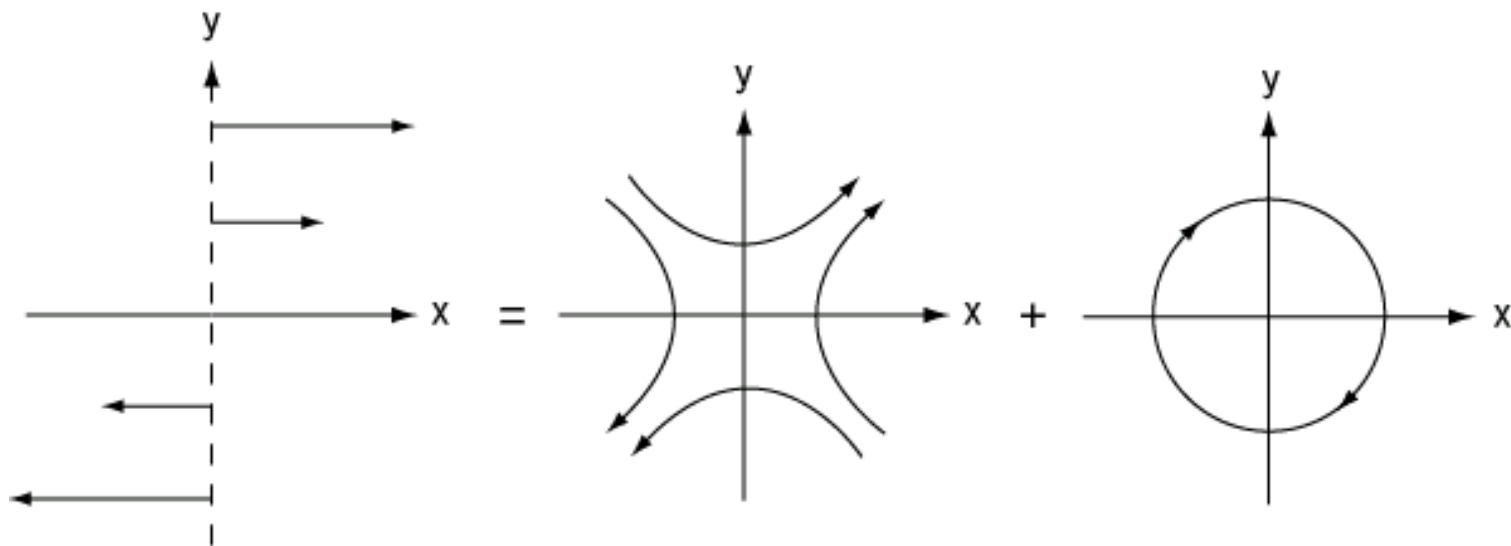
等方性流体の場合は速度勾配 $\partial v_\beta / \partial x_\alpha$ の関数

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} = A_{\alpha\beta} + W_{\alpha\beta}$$
$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \quad (4.16a) \text{ 非回転流}$$

$$W_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \quad (4.16b) \text{ 回転流}$$

$$\text{角速度ベクトル } \boldsymbol{\omega} = (-W_{yz}, -W_{zx}, -W_{xy})$$

ずり流れ



ずり流れ

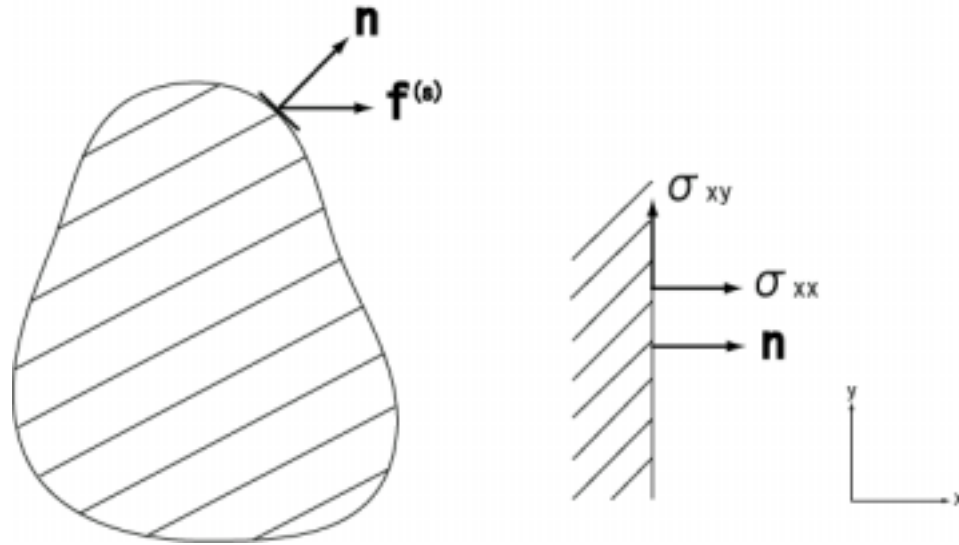
A
非回転流

W
回転流

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = A_{xy} + W_{xy} \neq 0$$

応力テンソル

$\sigma_{\alpha\beta}$: α 軸に垂直な面の正の側から負の側が受ける
単位面積あたりの力の β 成分

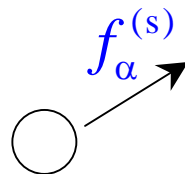


単位面積当りの力

$$\sigma_{\beta\alpha} n_{\beta}$$

単位体積当りの力

$$f_{\alpha}^{(s)} = \partial \sigma_{\beta\alpha} / \partial x_{\beta}$$



等方性流体の応力テンソル

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^{(\text{visc})} - p\delta_{\alpha\beta}$$

粘性応力

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(\text{visc})} = 2\eta A_{\alpha\beta} = \eta \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right)$$

η : 粘性係数

p : 圧力

非圧縮性流体のナビエ・ストークス方程式

$$\rho \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + \rho v_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} v_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} p + \eta \Delta v_\alpha$$

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0$$

配向ベクトルの運動方程式

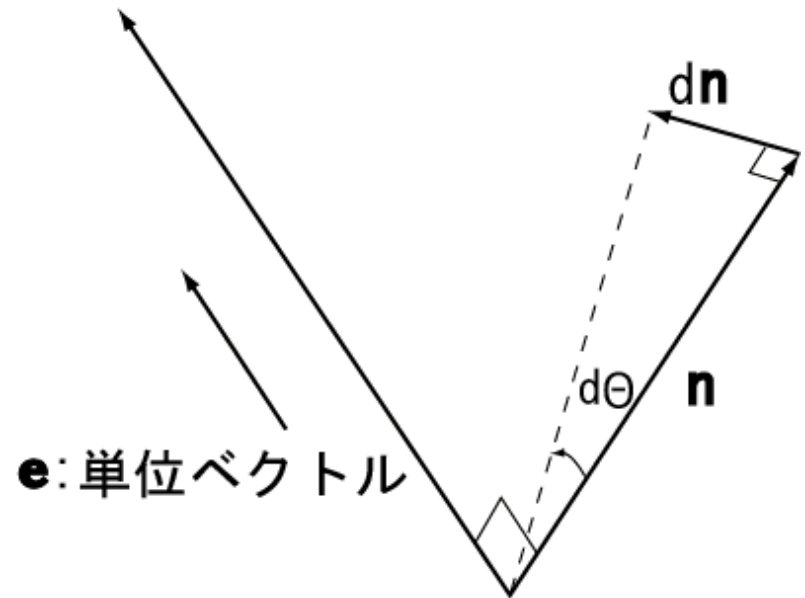
$$e d\theta = \Omega dt = \mathbf{n} \times d\mathbf{n}$$

Ω : 角速度ベクトル

↓

$$\Omega = \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{n}}{dt}$$

$$e d\theta = \Omega dt$$



$$I \frac{d\Omega}{dt} = \Gamma$$

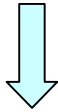
I : 単位体積当たりの慣性モーメント

Γ : 単位体積当たりのトルク

Γ の表式

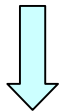
分子場 $\mathbf{h}(\mathbf{r})$: 自由エネルギーから生ずる配向ベクトルに働く
単位体積当たりの力

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{n}(\mathbf{r}) + \delta \mathbf{n}(\mathbf{r})$$



$$\delta F = -\int \mathbf{h}(\mathbf{r}) \cdot \delta \mathbf{n}(\mathbf{r}) dV \quad (4.26)$$

$$h_\alpha(\mathbf{r}) = -\left(\frac{\partial f_d}{\partial n_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{\partial f_d}{\partial (\partial n_\alpha / \partial x_\beta)} \right) \right) = -\frac{\delta F}{\delta n_\alpha} \quad (4.27)$$



$$\delta F = -\int \mathbf{h}(\mathbf{r}) \cdot \delta \mathbf{n}(\mathbf{r}) dV = -\int (\mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \mathbf{h}(\mathbf{r})) \cdot (\mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \delta \mathbf{n}(\mathbf{r})) dV$$

$$e\delta\theta = \mathbf{n} \times \delta \mathbf{n} : \text{回転角} \Rightarrow \Gamma^{(F)} = \mathbf{n} \times \mathbf{h} : \text{単位体積当りのトルク} \quad (4.56)$$

- 2種類の粘性トルク $\Gamma_1^{(\text{visc})}, \Gamma_2^{(\text{visc})}$

N の定義：流れに対する配向ベクトルの相対的变化速度

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \Omega \times \mathbf{n} \quad \text{実験室系に対して}$$

$$\mathbf{N} \equiv (\Omega - \omega) \times \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{n}}{dt} - \omega \times \mathbf{n} \quad (4.55) \quad \text{流れに対して}$$

配向ベクトルの回転に対する抵抗 $-\gamma_1 \Omega$?

流れによる回転 ω を差し引く必要（相対的な回転）

$$(\Omega - \omega) = \mathbf{n} \times \mathbf{N} + (\mathbf{n} \cdot \Omega_0) \mathbf{n} \quad ((4.55) \text{から})$$

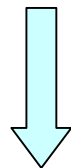
$$\Gamma_1^{(\text{visc})} = -\gamma_1 \mathbf{n} \times \mathbf{N} = -\gamma_1 \mathbf{n} \times \left(\frac{d\mathbf{n}}{dt} - \omega \times \mathbf{n} \right) \quad \gamma_1: \text{粘性係数}$$

非回転流から受ける粘性トルク

$$\Gamma_2^{(\text{visc})} = -\gamma_2 \mathbf{n} \times A \mathbf{n}$$

配向ベクトルの運動方程式

$$\begin{aligned} I \frac{d\Omega}{dt} = \Gamma &= \mathbf{\Gamma}^{(F)} + \Gamma_1^{(\text{visc})} + \mathbf{\Gamma}_2^{(\text{visc})} & \Gamma^{(\text{visc})} &= \Gamma_1^{(\text{visc})} + \Gamma_2^{(\text{visc})} \\ & & &= -\gamma_1 \mathbf{n} \times \left(\frac{d\mathbf{n}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} \right) - \gamma_2 \mathbf{n} \times A \mathbf{n} \quad (4.63) \\ &= \mathbf{n} \times \mathbf{h} - \gamma_1 \mathbf{n} \times \left(\frac{d\mathbf{n}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} \right) - \gamma_2 \mathbf{n} \times A \mathbf{n} \end{aligned}$$



慣性が粘性に比べ無視できる

配向ベクトル場の方程式

$$\mathbf{n} \times \mathbf{h} = \gamma_1 \mathbf{n} \times \left(\frac{d\mathbf{n}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} \right) + \gamma_2 \mathbf{n} \times A \mathbf{n}$$

応力テンソル

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^{(e)} + \sigma_{\alpha\beta}^{(visc)}$$

エリクセンの応力(自由エネルギーに起因する力)

$$\sigma_{\beta\alpha}^{(e)} = - \frac{\partial f_d}{\partial (\partial n_\gamma / \partial n_\beta)} \frac{\partial n_\gamma}{\partial x_\alpha} - p \delta_{\alpha\beta}$$

粘性応力

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(visc)} = \alpha_4 A_{\alpha\beta} + \alpha_1 n_\alpha n_\beta n_\mu n_\rho A_{\mu\rho} + \alpha_5 n_\alpha n_\mu A_{\mu\beta} + \alpha_6 n_\beta n_\mu A_{\mu\alpha}$$

非回転流

$$+ \alpha_2 n_\alpha N_\beta + \alpha_3 n_\beta N_\alpha$$

回転流

$$\left(N = (\Omega - \omega) \times \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{n}}{dt} - \omega \times \mathbf{n} \right)$$

α_i : 粘性係数

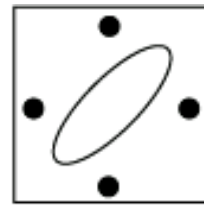
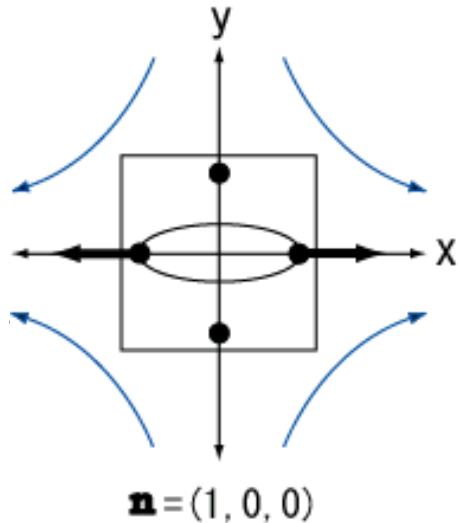
各項の意味

$$\alpha_1 n_\alpha n_\beta n_\mu n_\rho A_{\mu\rho}$$

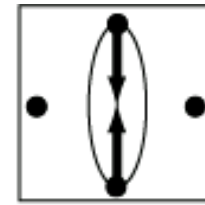
非回転流 $A_{xx} = 1, A_{yy} = -1$

$$\mathbf{n} = (n_x, n_y, 0)$$

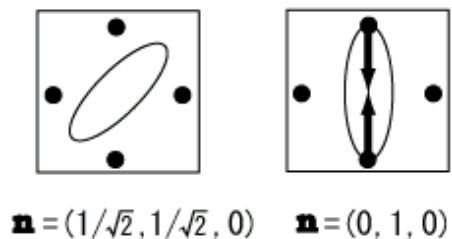
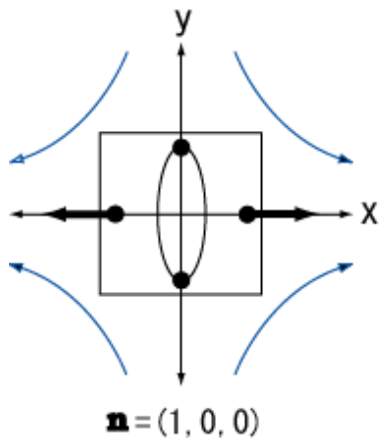
$$n_\alpha n_\beta n_\mu n_\rho A_{\mu\rho} \Rightarrow (n_x^2 - n_y^2) \begin{pmatrix} n_x^2 & n_x n_y \\ n_x n_y & n_y^2 \end{pmatrix}$$



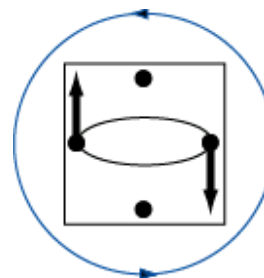
$$\mathbf{n} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$$



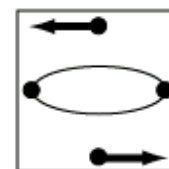
$$\mathbf{n} = (0, 1, 0)$$



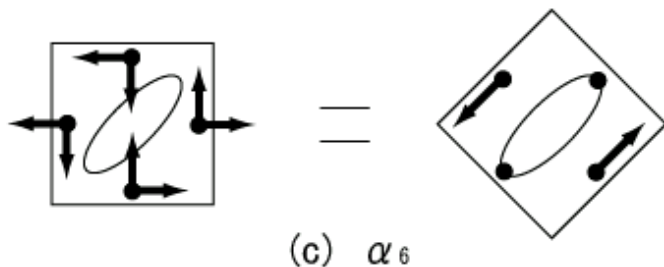
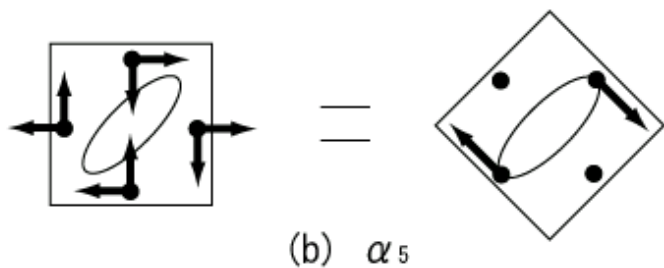
(a) α_1



(d) α_2



(e) α_3



$$\gamma_1 = \alpha_3 - \alpha_2$$

$$\gamma_2 = \alpha_6 - \alpha_5$$

パロディの関係式

$$\alpha_6 - \alpha_5 = \alpha_2 + \alpha_3$$

エリクセン・レスリー方程式のまとめ

$$\rho \frac{dv_\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\sigma_{\beta\alpha}^{(e)} + \sigma_{\beta\alpha}^{(visc)} \right) \quad (4.76a) \quad \text{速度場}$$

$$I \frac{\partial \Omega}{\partial t} (=0) = \mathbf{n} \times \mathbf{h} - \gamma_1 \mathbf{n} \times \left(\frac{d\mathbf{n}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} \right) - \gamma_2 \mathbf{n} \times \mathbf{A} \mathbf{n} \quad (4.76b) \quad \text{配向ベクトル場}$$

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (4.76c) \quad \text{非圧縮性条件}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^{(visc)} = & \alpha_4 A_{\alpha\beta} + \alpha_1 n_\alpha n_\beta n_\mu n_\rho A_{\mu\rho} + \alpha_5 n_\alpha n_\mu A_{\mu\beta} + \alpha_6 n_\beta n_\mu A_{\mu\alpha} \\ & + \alpha_2 n_\alpha N_\beta + \alpha_3 n_\beta N_\alpha \end{aligned} \quad (4.77)$$

$$\sigma_{\beta\alpha}^{(e)} = - \frac{\partial f}{\partial (\partial n_\gamma / \partial n_\beta)} \frac{\partial n_\gamma}{\partial x_\alpha} - p \delta_{\alpha\beta} \quad (4.78a)$$

$$h_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{\partial f}{\partial (\partial n_\alpha / \partial x_\beta)} \right) - \frac{\partial f_d}{\partial n_\alpha} \quad (4.78b)$$

$$N_\alpha = \frac{dn_\alpha}{dt} - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n})_\alpha = \frac{dn_\alpha}{dt} - W_{\alpha\beta} n_\beta \quad (4.78c)$$

変数 v, n, p (自由度 6) 方程式の数 6

ミーソビッツの粘性係数

$$v = (0, 0, \dot{\gamma} x) \quad \dot{\gamma}: \text{ずり速度}$$

n は強磁場で固定

$$\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (4.80)$$

(4.16)から

$$A_{xz} = W_{zx} = -\omega_y = \frac{1}{2} \dot{\gamma} \quad (4.81)$$

(4.78c)から

$$N_z = \omega_y n_x = -\frac{1}{2} \dot{\gamma} n_x, \quad N_x = -\omega_y n_z = \frac{1}{2} \dot{\gamma} n_z$$

以上の式を(4.77)へ代入して

$$\sigma_{xz}^{(visc)} = \eta(\theta, \phi) \dot{\gamma} \quad \eta(\theta, \phi): \text{有効粘性率}$$

$$\eta(\theta, \phi) \equiv \frac{1}{2} \left\{ (2\alpha_1 \cos^2 \theta - \alpha_2 + \alpha_5) \sin^2 \theta \cos^2 \phi + (\alpha_3 + \alpha_6) \cos^2 \theta + \alpha_4 \right\}$$

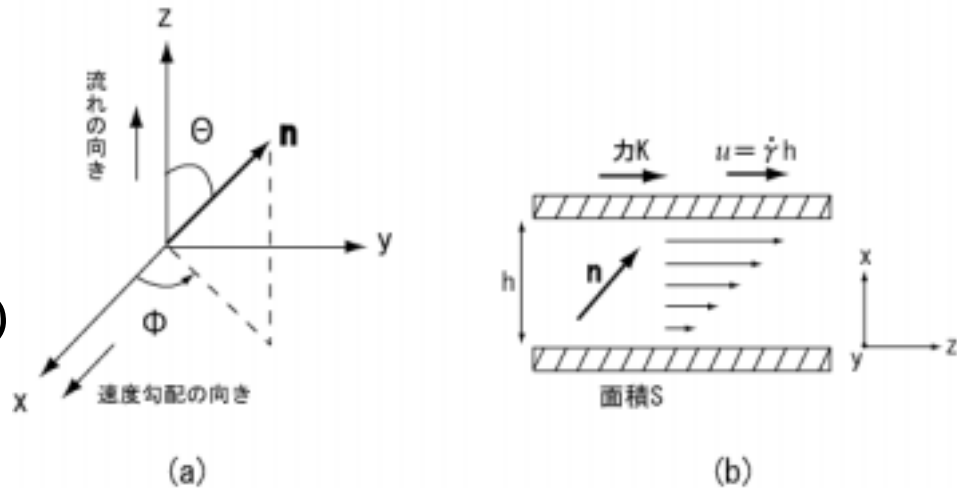


図4.11

$$\dot{\gamma} = u/h, \quad \sigma_{xz} = K/S$$

ミーソビッツの粘性係数

(a) 配向ベクトルが速度勾配に平行な場合 ($\theta = 90^\circ, \phi = 0^\circ$)

$$\eta_1 = \frac{1}{2}(-\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5)$$

(b) 配向ベクトルが流れに平行な場合 ($\theta = 0^\circ$)

$$\eta_2 = \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6)$$

(c) 配向ベクトルが流れと速度勾配に垂直な場合($\theta = 90^\circ, \phi = 90^\circ$)

$$\eta_3 = \frac{1}{2}\alpha_4$$

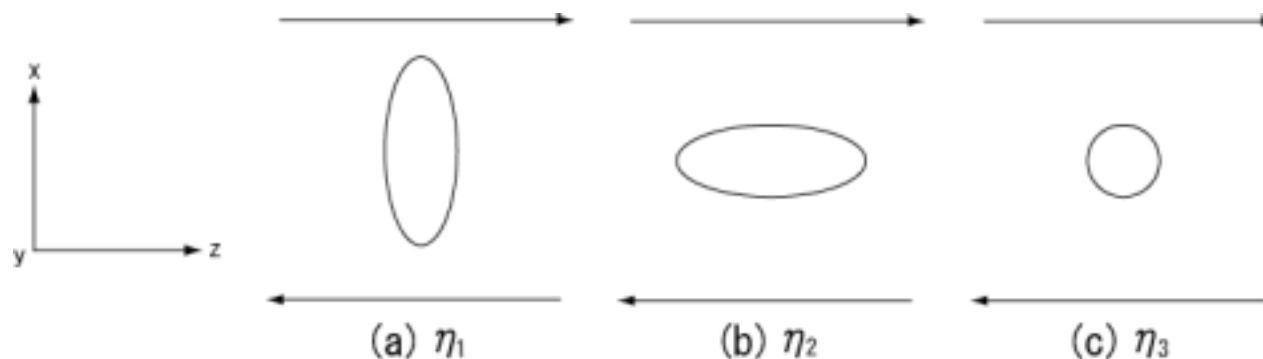


図4.12

配向ベクトルに束縛がない場合

図4.12(c)の場合

(4.63),(4.80),(4.81)から

$$\Gamma^{(\text{visc})} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{安定}$$

図4.12(a)と(b)を含む一般的な場合($\phi = 0$)

$\mathbf{n} = (\sin\theta, 0, \cos\theta)$, (4.63),(4.81)から

$$\begin{aligned}\Gamma_y^{(\text{visc})} &= -\gamma_1(n_z N_x - n_x N_z) - \gamma_2(n_z n_\mu A_{\mu x} - n_x n_\mu A_{\mu z}) \\ &= -\frac{1}{2}\dot{\gamma} \{ \gamma_1 + \gamma_2 \cos 2\theta \}\end{aligned}$$

$$\Gamma_y^{(\text{visc})} = 0$$



$$\cos 2\theta_0 = -\gamma_1 / \gamma_2 \quad (|\gamma_1 / \gamma_2| < 1 \text{ の場合}) \quad \theta_0 : \text{流動配向角}$$

フレデリクス転移のダイナミクス

図3.3のセルにおいて磁場が変化する場合

$v(r, t = 0) = 0$ ならば (4.78c) および (4.77) から $v(r, t) = 0$



$\omega = 0, A = 0$ とし (4.76b) の z 成分のみを考慮すればよい

$$\gamma_1 \left(\mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right)_z = (\mathbf{n} \times \mathbf{h})_z$$

一方, (4.56) から

$$\delta F = - \int (\mathbf{n} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{e} \delta \theta dV = - \int (\mathbf{n} \times \mathbf{h})_z \delta \theta dV$$

$$\therefore (\mathbf{n}(r) \times \mathbf{h}(r))_z = - \frac{\delta F}{\delta \theta}$$

また, $\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ から

$$\left(\mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right)_z = \frac{d\theta}{dt}$$

運動方程式

$$\gamma_1 \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\delta F}{\delta \theta} \stackrel{(3.6)}{=} K_2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \mu_0^{-1} \Delta \chi B^2 \sin \theta \cos \theta$$

境界条件 : $\theta(0) = \theta(d) = 0$

簡単な例

しきい値以上の磁場での平衡状態から磁場を切った場合

$B = 0$ とおき , 解を $\theta(z, t) = \theta_m(t) \sin(qz)$ ($q = \pi / d$) とすると

$$\frac{d\theta_m}{dt} = -\frac{\pi^2 K_2}{\gamma_1 d^2} \theta_m$$



$$\theta_m(t) = \theta_m(0) \exp(-t/\tau), \quad \tau = \gamma_1 d^2 / \pi^2 K_2$$