2026年4月入学／2025年10月入学 応用物理学専攻修士課程入学試験問題 I
(応用数学 I 、力学、電磁気学)
2025年8月19日 9:00〜12:00

解答上の注意
(1) 問題用紙はこのページを含め3枚である．答案用紙は問毎に各1枚である．草案用紙は3枚である．
(2) 各問はその問題番号が記載された答案用紙に解答すること．裏面を使用してもよい．
(3) すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を明記すること．
(4) 試験終了後はすべての答案用紙を回収する(草案用紙は持ち帰ること)．

問1

xy 平面上の動点 P の座標 (x, y) が時間 t を変数とする次の微分方程式に従って変化している．

$$\frac{dx}{dt} = kx - y \qquad \cdots ①$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x - y \qquad \cdots ②$$

式 ① で k は実定数である．

（1） 上の連立微分方程式 ①, ② は行列形式で以下のように書くことができる．

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \cdots ③$$

行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ としたとき，$k = 1$ に対する行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ と固有ベクトル $\boldsymbol{u}$ を求めよ．$\boldsymbol{u}$ は規格化しなくてもよい．

（2） 動点 P の $t = 0$ での位置を座標 (2,2) としたとき，$k = 1$ の場合に $x(t)$, $y(t)$ が以下となることを示せ．

$$x(t) = 2\cos t, \quad y(t) = 2\cos t + 2\sin t$$

（3） （2）の解 $x(t)$, $y(t)$ が表す動点 $\mathrm{P}(x, y)$ の軌跡を xy 平面に図示せよ．

（4） 連立微分方程式 ③ の行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値方程式は，定数 k の値に依存して，それぞれ異なる 2 つの実数解，2 つの複素数解，実数の重解を持つ．
それらの解を持つ k の範囲を求めよ．

（5） 動点 P の初期位置がどこにあっても，時間が経った極限 $t \to \infty$ において，P が原点 (0,0) に限り無く近づいていくような定数 k の範囲を求めよ

2026年4月入学／2025年10月入学 応用物理学専攻修士課程入学試験問題 I
(応用数学 I 、力学、電磁気学)
2025年8月19日 9:00〜12:00

解答上の注意

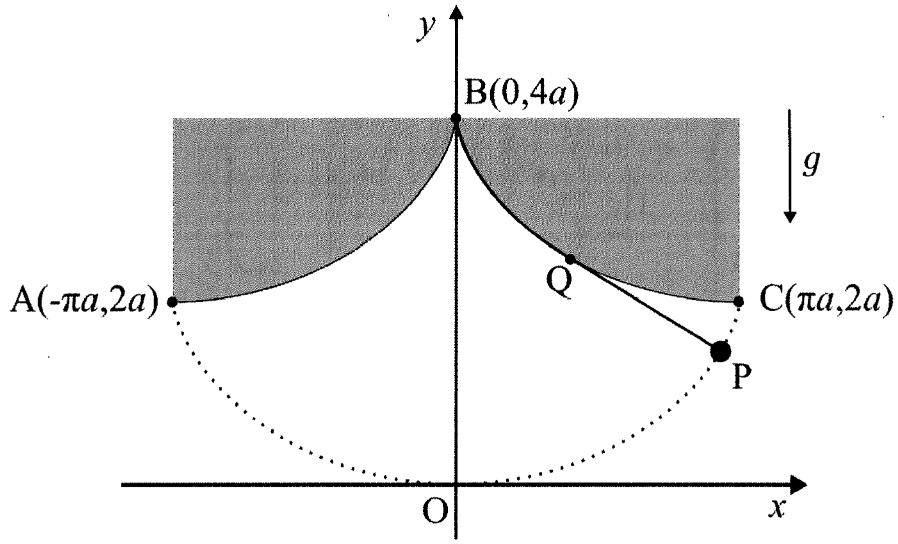
(1) 問題用紙はこのページを含め3枚である．答案用紙は問毎に各1枚である．草案用紙は3枚である．
(2) 各問はその問題番号が記載された答案用紙に解答すること．裏面を使用してもよい．
(3) すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を明記すること．
(4) 試験終了後はすべての答案用紙を回収する(草案用紙は持ち帰ること).

問2

鉛直面内において図のように鉛直上向きが正になるように y 軸を, 水平方向に向かって右方向が正となるように x 軸を取る．点 $\mathrm{B}(0, 4a)$ よりつるされた長さ $4a$ の糸の先に質量 m の質点 P がぶら下げられており, 図のように曲線 AB,BC で挟まれた間を振り子運動しているものとしよう．ここで曲線 AB,BC が媒介変数 θ を用いて

$$x = a(2\theta - \sin 2\theta)$$
$$y = a(1 + \cos 2\theta) + 2a$$

で定義されるサイクロイド曲線である時、以下の問に答えよ．ただし, $a > 0$, $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$ を満たし, 糸の太さ, 伸縮, 質量, 摩擦及び空気抵抗は無視できるものとする．また, 重力加速度を g とせよ．



1. 曲線 AB, BC 上の, 点 B 以外の任意の点における接線の傾き $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ を θ を用いて表わせ．また, この接線と x 軸がなす角が $\pi/2 - |\theta|$ となることを示せ (2 直線のなす角は 0 以上 $\pi/2$ 以下と定める).
2. ここで振り子の軌跡を求めてみよう．図のように糸はたわむことなく BQ 間で曲線 BC に接しており, 点 P は点 Q における曲線 BC の接線上にあるものとする．点 Q の座標を
$$(a(2\theta_0 - \sin 2\theta_0), a(1 + \cos 2\theta_0) + 2a)$$
としたとき, B から Q までの糸の長さが $4a(1 - \cos\theta_0)$ であることを示せ．ただし, 曲線 BC 上の微小長さ $\mathrm{d}\ell$ が $\mathrm{d}\ell = \sqrt{(\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta)^2 + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta)^2}\mathrm{d}\theta$ と書けることを用いてもよい．
3. θ_0 が $-\pi/2 \le \theta_0 \le \pi/2$ の範囲で変化する時, 質点 P が $(a(2\theta_0 + \sin 2\theta_0), a(1 - \cos 2\theta_0))$ で表されるサイクロイド曲線上を移動することを示せ．
4. 質点 P の運動エネルギー及び位置エネルギーを $m, g, a, \theta_0, \dot{\theta_0} = \mathrm{d}\theta_0/\mathrm{d}t$ を用いて表わせ．ただし, 位置エネルギーの算出は $y = 0$ を基準とし, 質点 P は点 A や点 C に到達するほどの運動エネルギーは持たないものとする．
5. θ_0 を $s = 4a\sin\theta_0$ を用いて s で置換し, s に関するラグランジュの運動方程式を導け．
6. 質点 P の振動周波数が振幅に依存しないことを示し、振動の周波数を求めよ．

2026年4月入学／2025年10月入学 応用物理学専攻修士課程入学試験問題Ⅰ
(応用数学Ⅰ、力学、電磁気学)
2025年8月19日 9:00～12:00

解答上の注意
(1) 問題用紙はこのページを含め3枚である．答案用紙は問毎に各1枚である．草案用紙は3枚である．
(2) 各問はその問題番号が記載された答案用紙に解答すること．裏面を使用してもよい．
(3) すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を明記すること．
(4) 試験終了後はすべての答案用紙を回収する(草案用紙は持ち帰ること)．

問3

図1のように、原点をOとし、Oから測った位置を $\vec{r}$ 、$|\vec{r}| = r$ とする。誘電率 ε_0 の真空中で、Oを中心とする２つの球面で挟まれた半径 $a \le r \le b$ の灰色の領域を、誘電率 ε 、電気伝導率 σ を持つ導体が占めているとする。ε 、σ は実定数である。一般に、電流密度（単位面積を流れる電流）$\vec{i}$ と電場 $\vec{E}$ は、$\vec{i} = \sigma\vec{E}$ の関係を満たす。

まず、$r = a$ の導体の内側の面に、電荷 Q_0 が一様に分布した静的状況を考える。位置 $\vec{r}$ における電場を $\vec{E}(\vec{r})$ とする。

(1) 電荷 Q_0 の作る電場 $\vec{E}(\vec{r})$ は球対称であり、r の関数である。電場の大きさ $E(r)$ を、$0 \le r \le a$、$a \le r \le b$、$b \le r$ の各領域において求めよ。また $E(r)$ の概略をグラフで示せ。

(2) $a \le r \le b$ の導体中に電荷 Q_0 が作る電場の静電エネルギー U_0 を求めよ。

次に、時刻 $t = 0$ において、$r = a$ の導体の内側の面に電荷 Q_0 を一様に与えたとして、この初期状態からの時間変化を考える。電荷が導体中に作る電場は、外向きに流れる電流を誘起し、時間の経過とともに導体の内側の面にあった電荷は減少していく。位置 $\vec{r}$、時刻 t における電場を $\vec{E}(\vec{r},t)$ とすれば、$\vec{E}(\vec{r},t)$ は球対称で r の関数となる。時刻 t において導体の内側の面にある電荷を $Q(t)$ とする。また半径 r の球面を考え、この面を貫いて外向きに流れる全電流を $I(r,t)$ とする。変位電流の効果は考えないものとする。

(3) 導体中で $I(r,t)$ と電場の大きさ $E(r,t)$ の間に成り立つ関係式を、σ と r を用いて表せ。

(4) 導体中の $E(r,t)$ を $Q(t)$ を用いて表せ。

(5) $Q(t)$ の時間変化率は、外向きに流れる電流により決まることをから $Q(t)$ を求めよ。ただし解は Q_0、ε、σ を用いて表せ。

(6) 導体中の $E(r,t)$ を求めよ。ただし解は Q_0、ε、σ を用いて表せ。

(7) $t = 0$ から時刻 t までの時間に、導体中で生じるジュール熱 $W(t)$ を求めよ。（ヒント：単位時間当たり単位体積当たりのジュール熱は $\vec{i}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}(\vec{r},t)$ で与えられる。）

(8) じゅうぶん時間が経過したとき、それまでに導体中で生じた全ジュール熱 $W(t=\infty)$ を求めよ。

(9) じゅうぶん時間が経過したとき、電荷の分布はどのようになるか述べよ。またこのときの電場の大きさ $E(r, t=\infty)$ の概略をグラフで示せ。

(10) この導体が鉄であり、$\varepsilon = 8.9 \times 10^{-12}$ [F/m]、$\sigma = 1.0 \times 10^{7}$ [1/Ωm] の値を持つとする。$Q(t) = Q_0/e$ となる時刻 t を求めよ。e は自然対数の底である。

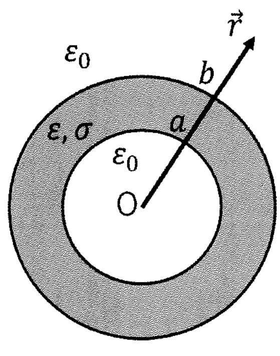


図1

2026年4月入学／2025年10月入学 応用物理学専攻修士課程入学試験問題Ⅱ
(応用数学Ⅱ、熱・統計力学、量子力学)
2025年8月19日 13:00〜16:00

解答上の注意
(1) 問題用紙はこのページを含め3枚である．答案用紙は問毎に各1枚である．草案用紙は3枚である．
(2) 各問はその問題番号が記載された答案用紙に解答すること．裏面を使用してもよい．
(3) すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を明記すること．
(4) 試験終了後はすべての答案用紙を回収する(草案用紙は持ち帰ること).

問4

複素関数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ に関して，以下の問いに答えよ．

（1）$z=0$ を中心とするテイラー展開を求めよ (収束半径を明記すること).

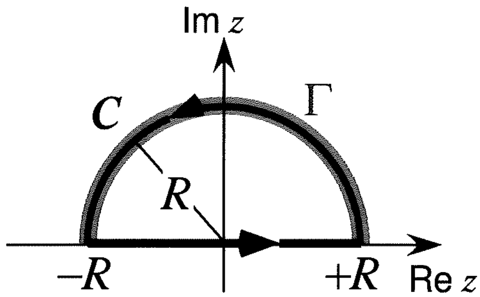
（2）$z=i$ を中心とするローラン展開を求めよ (収束半径を明記すること).

（3）以下では，実軸上の $-R$ から R までの線分と，円 $|z|=R$ の実軸上方にある半円周 Γ とを連結した下図のような閉曲線を積分路 C として考える. $R(\neq 1)$ を適宜，場合分けして $\oint_C f(z)dz$ を求めよ.

（4）Γ 上の点に対して $\left|z^2+1\right| \geq R^2-1$ が成り立つことを示せ．また実変数 θ を用いて $z=Re^{i\theta}(R>1)$ とおくことにより，$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \leq \dfrac{\pi R}{R^2-1}$ を示せ.

（5）$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz=0$ であることを示し，実変数 x についての積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ を求めよ.

（6）実関数積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}dx$ ，$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2+1}dx$ をそれぞれ算出せよ.



2026年4月入学／2025年10月入学 応用物理学専攻修士課程入学試験問題Ⅱ
(応用数学Ⅱ、熱・統計力学、量子力学)
2025年8月19日 13:00〜16:00

解答上の注意
(1) 問題用紙はこのページを含め3枚である．答案用紙は問毎に各1枚である．草案用紙は3枚である．
(2) 各問はその問題番号が記載された答案用紙に解答すること．裏面を使用してもよい．
(3) すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を明記すること．
(4) 試験終了後はすべての答案用紙を回収する(草案用紙は持ち帰ること)．

問5

温度T、化学ポテンシャルμの熱浴と弱く相互作用する部分系を考える。グランドカノニカル分布（大正準分布）を考えると、この部分系が粒子数n、エネルギーEの状態にある確率は、ボルツマン定数をk_Bとして

$$\exp\left(\frac{n\mu-E}{k_BT}\right)$$

に比例する。これを用いて以下の問いに答えよ。
なお導出の過程や考え方を丁寧に記述すること。

1. 部分系としてエネルギーεの一つの量子力学的準位を考える。
   (1) この準位に存在する粒子の数がnである場合の、系のエネルギーEを示せ。
   (2) この準位に存在する粒子の数nが、$n=0$または$n=1$に限られる場合の粒子数の平均値$\overline{n}_A$を求めよ。
   (3) この準位に存在する粒子の数nに制限がなく、$n=0,1,2,\cdots$である場合の粒子数の平均値$\overline{n}_B$を求めよ。
   (4) $\overline{n}_A$および$\overline{n}_B$の名称を答えよ。

2. 次に部分系として、粒子数が1で熱浴との間にはエネルギーの移動のみがある系を考える。この粒子は縮退のないエネルギー$E_0\,(=0)$の基底準位と、N重に縮退したエネルギー$E_1\,(>E_0)$の励起準位の2つのエネルギーのみを取り得るとする。粒子数が一定であることを考えて、以下の問いに答えよ。
   (1) 粒子が基底準位のエネルギー$E_0\,(=0)$および励起準位のエネルギーE_1を持つ確率を、それぞれ$P_0(T)$と$P_1(T)$とする。$P_0(T)$と$P_1(T)$を求めよ。
   (2) エネルギーの平均値$\overline{E}(T)$を示せ。
   (3) 高温（$T\to\infty$）における$\overline{E}$の値を、$N=1$および$N\gg1$の場合についてそれぞれ示せ。またそれらの値となる理由を概ね200字以内で説明せよ。
   (4) 熱容量$c(T)$を示せ。

2026年4月入学／2025年10月入学 応用物理学専攻修士課程入学試験問題Ⅱ
(応用数学Ⅱ、熱・統計力学、量子力学)
2025年8月19日 13:00〜16:00

解答上の注意

(1) 問題用紙はこのページを含め3枚である．答案用紙は問毎に各1枚である．草案用紙は3枚である．
(2) 各問はその問題番号が記載された答案用紙に解答すること．裏面を使用してもよい．
(3) すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を明記すること．
(4) 試験終了後はすべての答案用紙を回収する(草案用紙は持ち帰ること)．

問6

等核２原子分子が安定に存在する理由を、縮退のある場合の摂動論を用いて考察する。非摂動状態として２原子核が無限に離れている場合を考え、２原子核が接近する効果を摂動として扱うことにする。図 1(a) は、原子に電子が一つ束縛された１次元の原子模型を示す。原子にはエネルギー ϵ_0 の量子状態が存在する。その波動関数は実数で $\psi_0(x)$ と表され、図にその概念図を示した。ここで、 a_0 は波動関数の広がりを特徴づける長さで、$\psi_0(|x| \gg a_0) \approx 0$ が成立する。これらの状況は

$$H_a|g\rangle = \epsilon_0|g\rangle, \quad \langle x|g\rangle = \psi_0(x),$$

と表現することができる。ここで H_a は原子核に束縛された電子の状態に作用するハミルトニアン、$|g\rangle$ は束縛状態のベクトルである。

二つの原子核が図 1(b) のような配置になった。一つの電子が左の原子核 $x = -d$ に束縛された状態を $|L\rangle$、右の原子核 $x = d$ に束縛された状態を $|R\rangle$ とし、以下ではこの２状態を基底とする２準位系を考察する。すなわち、２原子分子の電子状態に作用するハミルトニアン H の行列表示

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \langle L|H|L\rangle & \langle L|H|R\rangle \\ \langle R|H|L\rangle & \langle R|H|R\rangle \end{pmatrix}$$

を得ることで電子状態の解析を行う。ただし、２電子間のクーロン相互作用は無視できるとする。

(1) まず、$d \gg a_0$ の場合を考察する。二つの原子は互いに孤立しているので、$|L\rangle$ と $|R\rangle$ がともに固有状態になり、それらの波動関数は $\langle x|L\rangle = \psi_0(x+d)$、$\langle x|R\rangle = \psi_0(x-d)$ と表されるはずである。この場合の $\hat{H}$ を記述せよ。

(2) 次に、二つの原子核が図 1(b) のように接近する効果を、これら $|L\rangle$ と $|R\rangle$ の遷移要素

$$\langle L|H|R\rangle = \langle R|H|L\rangle = -t, \quad t > 0,$$

を用いて表現する。$\hat{H}$ を記述し、２準位系の固有値と固有ベクトルを求めよ。また図 1(a) のように固有状態の波動関数の概形を描け。

(3) 等核２原子分子には、本来二つの電子が束縛されるはずである。二つの原子核が離れているとき ($d \gg a_0$)、基底状態における二つの電子の配置とそのようになる理由を説明せよ。また２電子の基底状態のエネルギー $E_g(\infty)$ を求めよ。

(4) 二つの原子核が図 1(b) のように近づいた場合の、２電子の基底状態のエネルギー $E_g(d)$ を求めよ。計算結果と電子のスピンを考慮して、２原子分子が安定に存在する理由を考察せよ。

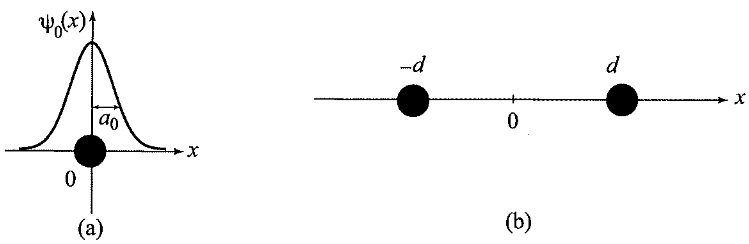


図 1: (a) 黒丸で原子核を表した原子の模型。原子核は電荷 $e > 0$ に帯電し、電子の電荷は $-e$ なので、原子は電気的に中性である。$\psi_0(x)$ はエネルギー ϵ_0 を持つ束縛状態の波動関数であり、a_0 は波動関数の広がりを特徴づける長さである。(b) 二つの原子が $d \approx a_0$ に接近した等核２原子分子の模型。電子の波動関数は示していない。