

2025 年 4 月入学・2024 年 10 月入学
北海道大学大学院工学院修士課程

機械宇宙工学専攻、人間機械システムデザイン専攻、
エネルギー環境システム専攻、量子理工学専攻

応用量子科学系研究室群

専門科目試験問題

応用数学

試験期日：2024 年 8 月 20 日（火）

時 間：9：00～12：00

この問題用紙には計 4 問（このページを含めて 5 枚）の問題が出題されています。全 4 問の全てに解答しなさい。問題用紙以外には、答案用紙 4 組（2 枚一組）と草案紙 4 枚を配布します。各組の答案用紙は問題ごとに使用し、全ての答案用紙に問題の番号を明記してなさい。答案用紙のホッチキス止めをはずしてはいけません。

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題用紙を開いてはいけません。
2. 携帯電話、スマートフォンは電源を切り、カバン等にしまってください。身につけてはいけません。また、時計のアラームも使用を禁止しますので音のならないように設定してください。
3. 試験中、机上には、受験票、鉛筆（黒）、シャープペンシル（黒）、消しゴム、鉛筆削り、眼鏡、および計時機能だけの時計以外を置くことはできません。
4. 全ての答案用紙、草案紙の上欄に科目名、受験番号等を記入し、問題用紙にも受験番号を記入してください。
5. 各問ごとの 2 枚一組の答案用紙が不足した場合は「裏面に続く」と明記した上で、裏面を用いることができます。
6. 問題用紙の印刷不鮮明、答案用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に知らせてください。
7. 問題用紙の余白等は利用可能ですが、ホッチキスをはずしてはいけません。
8. 試験終了後、答案用紙だけでなく、問題用紙、草案紙も回収します。

受験番号	
------	--

科 目 名	応用数学
-------	------

問1 微分方程式に関する以下の設問に答えなさい。ただし、 $y = y(x)$ であり、 y', y'', y''' はそれぞれ1階、2階、3階の導関数とする。

(1) 以下の微分方程式の一般解を求めなさい。

(1-1) $xy' + y = 0$

(1-2) $y' - 3x^2y = e^{x^3}$

(1-3) $e^x + y + (x - \sin y)y' = 0$

(1-4) $y''' - 5y'' + 9y' - 5y = 0$

(1-5) $y'' + 4y' + 3y = 9x + 4xe^{-x}$

(2) 以下の式 (i) に示す非同次2階線形微分方程式の同伴方程式 (右辺が0の同次微分方程式) の一つの解は x である。このことをもとに式 (i) の一般解を求めなさい。

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = 2x^3 \quad (x \neq 0) \quad (\text{i})$$

(3) 以下の xy 平面の曲線群に関する小問に答えなさい。

$$x^2 + Cy^2 = 1 \quad (C \text{ は任意定数}) \quad (\text{ii})$$

(3-1) 曲線群 (ii) の任意定数を消去して1階の微分方程式を求めなさい。

(3-2) 曲線群 (ii) に直交する曲線群を求めなさい。

(次頁に続く)

問2 ベクトル解析に関する以下の設問に答えなさい。ただし各設問において、 i, j, k はデカルト座標系 (x, y, z) における x, y, z の各方向の単位ベクトルとする。

- (1) t, t_0 を実数とする。曲線 $r(t) = \frac{1}{3}t^3 i + t^2 j + 2t k$ の $t=1$ における接線が、 $t=t_0$ における接線と垂直になるとき、 t_0 の値を求めなさい。
- (2) スカラー関数 $f(x, y, z) = -x^3 - 8x - 3(y-2)(z-2)$ について、点 $P(0, 0, 2)$ における $-j$ 方向の方向微分係数を求めなさい。また、点 P において方向微分係数の絶対値が最大となる方向と最大値を求めなさい。
- (3) スカラー関数 $f(x, y, z) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}}$ の曲線 $C: t \cos t i + t \sin t j, 0 \leq t \leq a$ に沿った線積分 $\int_C f dt$ を求めなさい。
- (4) 次の小問に答えなさい。
 - (4-1) ベクトル関数 F が、あるスカラー関数 f の勾配で表されるならば、 $\nabla \times F = 0$ となることを証明しなさい。
 - (4-2) ベクトル関数 $F = e^{xy}(1+xy) i + (x^2 e^{xy} + \sin(2yz)) j + \sin(2yz) k$ に対して $\nabla \times F$ を計算することで、 $F = \nabla f$ となるスカラー関数 f が存在しないことを証明しなさい。
- (5) 曲面 S 上の位置ベクトルが、パラメータ u, v を用いて $r(u, v)$ と表されるとき、曲面 S の面積は以下のように表せる。

$$\iint_D \left| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right| du dv$$

ただし、 D は (u, v) で表されるパラメータ空間上の有界閉領域である。

- (5-1) 曲面 S が $z = g(x, y)$ で表されるとき、上式の積分が

$$\iint_{\tilde{D}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

と表せることを証明しなさい。ただし、 $\tilde{D}$ は xy 平面上の有界閉領域である。

- (5-2) 曲面 S が $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq 1$ で与えられるとき、 S の面積を求めなさい。
- (6) 半球面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ と $z=0$ で囲まれる領域を V とし、 S をその表面とする。ベクトル場 $F = x^3 i + y^3 j + z^3 k$ に対して

$$\int_S F \cdot dS$$

の値を計算しなさい。ここでガウスの定理を用いてもよい。

(次頁に続く)

問3 以下の設問に答えなさい。ここで、 z は複素数であり、 i は虚数単位を表す。また、 $z = x + yi$ (x, y は実数)とする。

- (1) z 平面上で $y = x - 2$ の関係を満たす z が、複素関数 $w = 1/z$ により変換されたときの w 平面上の図形を示しなさい。
- (2) $u(x, y) = 2x^3 - 6xy^2$ が調和関数であることを示し、 $u(x, y)$ を実部とする正則関数を求めなさい。
- (3) 次の積分を求めなさい。

$$\oint_C \frac{\cos z}{(z-i)^2} dz, \quad C: |z| = 2$$

- (4) 以下の関数 $f(z)$ を $z = 0$ の周りでテイラー展開しなさい。ここで、(4-2)では(4-1)の結果を利用してもよい。

$$(4-1) \quad f(z) = \frac{1}{1-z} \quad (|z| < 1)$$

$$(4-2) \quad f(z) = \frac{2}{z^2 - 4z + 3} \quad (|z| < 1)$$

- (5) 留数定理を使って次の実関数の積分を求めなさい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$$

問 4 以下の設問に答えなさい。

- (1) $f(x)$ が $[-\pi, \pi]$ で連続な実数の奇関数であるとき、そのフーリエ級数は、次式で与えられる。これを用いて、以下の小問に答えなさい。

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

- (1-1) $f(x) = x$ のフーリエ級数を求めなさい。

- (1-2) $\int_0^x f(x) \, dx$ と (1-1) の結果を利用して、 $g(x) = x^2$ のフーリエ級数を求めなさい。

- (2) 関数 $f(t)$ は $t \geq 0$ で区分的に連続な関数として定義されており、次のラプラス変換が有界であるとする。

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} \, dt \quad (s: \text{複素数})$$

以下の小問に答えなさい。ただし、いずれの小問においても、ラプラス変換 $\mathcal{L}[f'(t)]$ について、 $\lim_{t \rightarrow \infty} f'(t) e^{-st} = 0$ を満たす s が選ばれているものとする。

- (2-1) $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) \, dt\right] = \frac{1}{s} F(s)$ を証明しなさい。

- (2-2) $\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds} F(s)$ を証明しなさい。

- (2-3) $\mathcal{L}[e^{at}]$ を計算しなさい。ただし a は実数とする。

- (2-4) $\mathcal{L}\left[\int_0^t te^{-bt} \, dt\right]$ を計算しなさい。ただし b は実数とする。

- (3) 区間 $x \in [0, L], t \in [0, \infty)$ を定義域とする実関数 $\phi(x, t)$ は次の偏微分方程式 (波動方程式) と境界条件を満たす。

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0, \\ \phi(0, t) = 0, \quad \phi(L, t) = \sin(\omega t)$$

ただし、 $c > 0, \omega > 0$ であり、 $\omega L \neq n\pi$ (n : 整数) とする。

- (3-1) 境界条件を満足する $\phi(x, t)$ を求めなさい。

- (3-2) この偏微分方程式の物理的な例を示し、さらに、境界条件と振幅の関係について述べなさい。

2025 年 4 月入学・2024 年 10 月入学
北海道大学大学院工学院修士課程

機械宇宙工学専攻、人間機械システムデザイン専攻、
エネルギー環境システム専攻、量子理工学専攻

応用量子科学系研究室群

専門科目試験問題

電磁気学、材料科学、原子物理・原子炉工学

試験期日：2024 年 8 月 20 日（火）

時 間：13：30～16：30

この問題用紙には計 9 問の問題（このページを含めて 15 枚）が出題されています。3 科目各 3 問の計 9 問から 3 問を選択し、解答しなさい。問題用紙以外には、答案用紙 1 組（3 枚一組）と草案紙 3 枚を配布します。それぞれの問題ごとに 1 枚の答案用紙を使用し、全てに科目名と問題の番号を明記しなさい。答案用紙のホッチキス止めをはずしてはいけません。選択票には解答開始後に選択した 3 問に○を記入しなさい。

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題用紙を開いてはいけません。
2. 携帯電話、スマートフォンは電源を切り、カバン等にしまってください。身につけてはいけません。また、時計のアラームも使用を禁止しますので音のならないように設定してください。
3. 試験中、机上には、受験票、鉛筆（黒）、シャープペンシル（黒）、消しゴム、鉛筆削り、眼鏡、および計時機能だけの時計、電卓以外を置くことはできません。
4. 全ての答案用紙、草案紙の上欄に科目名、受験番号等を記入し、問題用紙にも受験番号を記入してください。
5. 各問ごとの答案用紙が不足した場合は「裏面に続く」と明記した上で、裏面を用いることができます。
6. 問題用紙の印刷不鮮明、答案用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に知らせてください。
7. 問題用紙の余白等は利用可能ですが、ホッチキスをはずしてはいけません。
8. 試験終了後、答案用紙だけでなく、選択票、問題用紙、草案紙も回収します。

受験番号	
------	--

問1 内部導体が円柱形で、外部導体が円筒形である同軸ケーブルに、絶縁破壊を起こさずに与えることのできる最大電位差に関する以下の問いに答えなさい。ただし、ケーブル両端の影響は考えない。

- (1) 図 1-1 のように、内部導体(半径 a)と、内部導体と同軸に中心軸から b の位置に置かれた外部導体の間に、一種類の誘電体(比誘電率 ϵ_{r1})が挿入されている同軸ケーブルを考える。内部および外部の導体に、それぞれ正および負の電荷を与えたとする。この同軸ケーブルの単位長さあたりに帯電する電荷の絶対値を σ とする。真空の誘電率を ϵ_0 とする。

(1-1) 内部導体の中心軸からの距離を r としたとき、電界強度 $E(r)$ を求めなさい。また、その分布を図示しなさい。

(1-2) 挿入されている誘電体は、電界強度が $E_{\max}$ を超えると絶縁破壊が生じる。 $E_{\max}$ を、この誘電体の絶縁破壊電界強度と呼ぶ。このとき、絶縁破壊が起こるときの内部導体と外部導体の電位差を求めなさい。

- (2) 次に、挿入されている誘電体を図 1-2 のように 2 種類にした場合を考える。すなわち、 $a < r \leq c$ の範囲に比誘電率 ϵ_{r1} の誘電体を、 $c < r < b$ の範囲に比誘電率 ϵ_{r2} の誘電体を配置し、内部および外部の導体に、それぞれ正および負の電荷を与えたとする(単位長さあたりに帯電する電荷の絶対値は σ)。

(2-1) $\epsilon_{r1} > \epsilon_{r2}$ のときの電界強度分布を図示しなさい。

(2-2) 2 つの誘電体の絶縁破壊電界強度がともに $E_{\max}$ であり、 $b = 4a$ 、 $c = 2a$ および $\epsilon_{r1} = 4\epsilon_{r2}$ の関係が成立する場合、絶縁破壊が起こるときの内部導体と外部導体の電位差を求めなさい。

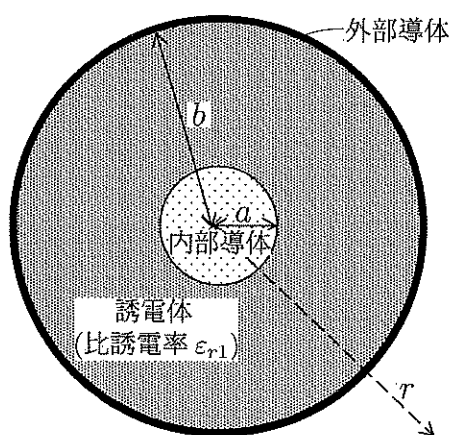


図 1-1

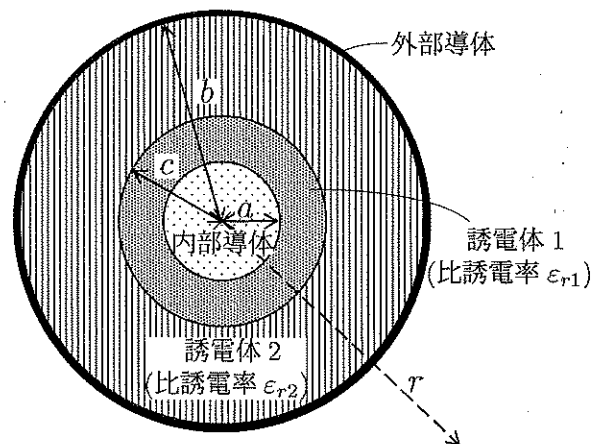


図 1-2

問2 以下の問いに答えなさい。なお、真空の透磁率は μ_0 とする。

- (1) 図2-1に示すように、真空中において有限の長さの直線定常電流 I_1 が点Aから点Bの向きに流れている。電流からの距離が l である点Cに生じる磁束密度 B を求めなさい。ただし、図に示すように、各点を結ぶ直線がなす角は $\angle CAB = \theta_1$ および $\angle CBA = \theta_2$ である。
- (2) 図2-2に示すように、真空中において、中心軸をデカルト座標系の z 軸とする無限に長い円柱状導体(直径が ϕ)と、 xz 平面上に置かれた正方形コイルDEFGがあり、無限に長い円柱状導体には定常電流 I_2 が z 軸の正の向きに流れている。図に示すように、 z 軸から辺DEまでの距離は a 、正方形コイルの1辺の長さは b である。 I_2 により xz 平面上(無限に長い円柱状導体の内部および外側)に生じる磁束密度 $B(x, 0, z)$ を求めなさい。
- (3) 次に、図2-2に示す正方形コイルに定常電流 I_3 を流した。ただし、正方形コイルを構成する導体の太さは無視でき、 $a > \phi$ であるとする。また、 I_3 の向きは図2-2に矢印で示す反時計回りであるとする。
 - (3-1) I_2 が作る磁場によって、正方形コイルの各辺が受ける力をそれぞれ求めなさい。
 - (3-2) I_2 が作る磁場によって、正方形コイル全体が受ける力 F を求めなさい。
 - (3-3) 正方形コイルの中心で磁場の大きさがゼロとなるための I_2 と I_3 の関係を求めなさい。

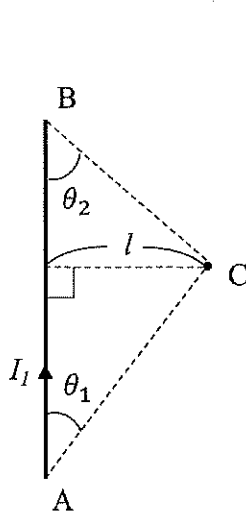


図2-1

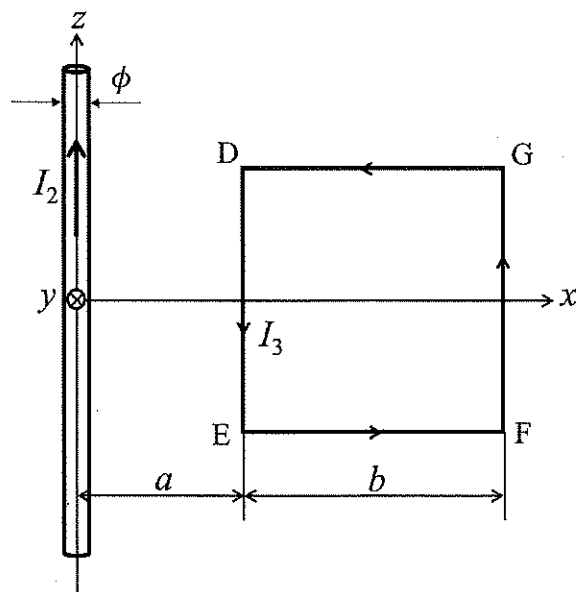


図2-2

- (4) 図 2-3 に示すように、図 2-2 の正方形コイルを半径が c の円形コイルに取り替え、円形コイルに定常電流 I_3 を反時計回りに流した。円形コイルは xz 平面に置かれており、 z 軸と円形コイルの中心との間の距離は d ($d > c$) である。また、 $d - c > \phi$ であり、円形コイルに用いた導体の太さは無視できるとする。

- (4-1) 図 2-3 に示す点 P における電流素片 $I_3 d\mathbf{r}$ に働く力の x 成分および z 成分をそれぞれ求めなさい。ただし、点 P は円形コイルの中心 O と点 P を結ぶ直線と x 軸のなす角が θ である円形コイル上の点であり、 $d\mathbf{r}$ は電流の向きに沿う線素ベクトルである。

- (4-2) 円形コイル全体に働く力を求めなさい。必要であれば以下の積分公式を用いてもよい。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\alpha}{\alpha + \beta \cos \varphi} d\varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}}$$

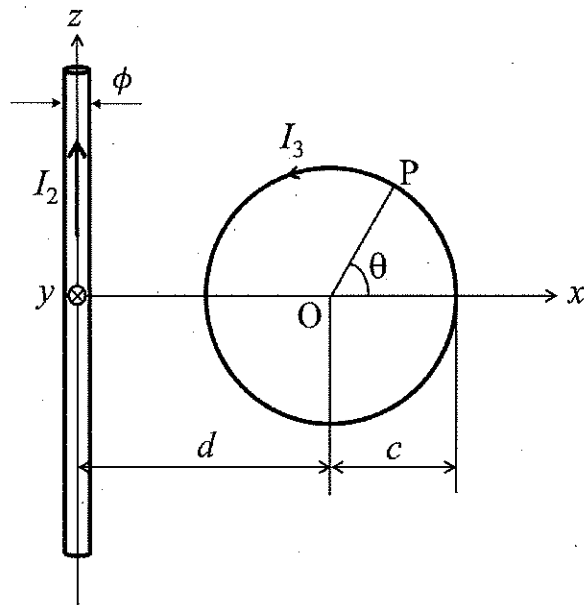


図2-3

問3 ドーナツ型の真空容器の対称軸がデカルト座標系の z 軸に置かれており、図3(a)はその xy 平面上での断面図、図3(b)は xz 平面上での断面図をあらわしている。真空容器の内側の半径は a 、外側の半径は b である。 z 軸の正の方向に磁束密度 B_z が印加され、 B_z は $B_z(r, t) = B(r) \frac{t}{T}$ のように空間分布は z 軸からの距離 r にのみ依存し、時間 t に比例して増加するものとする(T は時間の次元をもつ任意の定数)。 z 軸を対称軸とする円筒座標系 (r, θ, z) を用いて以下の問いに答えなさい。ただし、運動する電子のつくる磁場、重力の影響、および、磁場および電場に対する真空容器の影響は無視できるとする。また、必要であれば、円筒座標系において任意のベクトル $\mathbf{A} = (A_r, A_\theta, A_z)$ および任意のスカラー ψ に関する発散、回転、勾配が以下の式となることを用いてよい。

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}, \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right)$$

$$\nabla \psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)$$

- (1) 時間変化する磁束密度 B と誘導電場 E の関係を示すファラデーの法則を示しなさい。また、それにもとづいて $\mathbf{B} = (0, 0, B_z(r, t))$ のときの誘導電場の方向を求めなさい。
- (2) $B(r)$ が $B(r) = B_0$ で空間的に一様であるとき、
 - (2-1) z 軸からの距離が $r = r_0$ ($a < r_0 < b$)の xy 平面上に生じる誘導電場の大きさを求めなさい。また、 $r = r_0$ の円周上における誘導起電力を求めなさい。
 - (2-2) 時刻 t_0 において、外部から速度が $\mathbf{v} = (0, v_\theta, 0)$ の電子(電荷 $-e$ 、質量 m)を z 軸からの距離が $r = r_0$ ($a < r_0 < b$)の位置に入射したところ、入射した瞬間には半径が r_0 の円軌道を描いた。 v_θ を求めなさい。

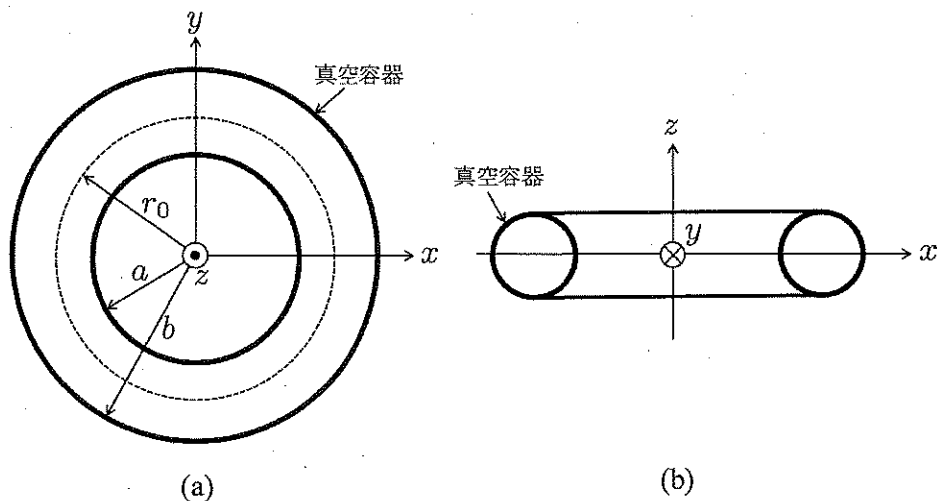


図3

- (2-3) 時刻 t_0 において (b) で求めた速度の電子を入射しても、時間が経過すると誘導電場によって電子が加速されるため、電子の軌道は半径が r_0 の円ではなくなる。この様子を考察し、 $t > t_0$ における電子の軌道の概要を描きなさい。ただし、電子は真空容器に衝突する場合を除いて真空容器の影響を受けずに運動するとする。また、図にはドーナツ型真空容器の xy 平面上での断面図も示すこと。
- (3) この装置を電子の加速器として用いる場合には、時刻 $t = 0$ において z 軸からの距離が $r = r_0$ ($a < r_0 < b$) の xy 平面上においた初速度 0 の電子が $t > 0$ において半径 r_0 の円運動を続ける必要がある。このようなことが実現されるために $B(r)$ が満たすべき条件を求めなさい。また、その条件を満たす $B(r)$ の例を一つ挙げなさい。

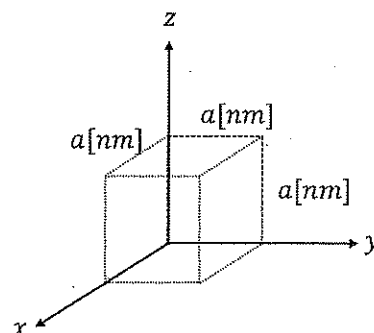
科 目 名	材料科学
-------	------

問 1

結晶構造に関する以下の問いに答えなさい。

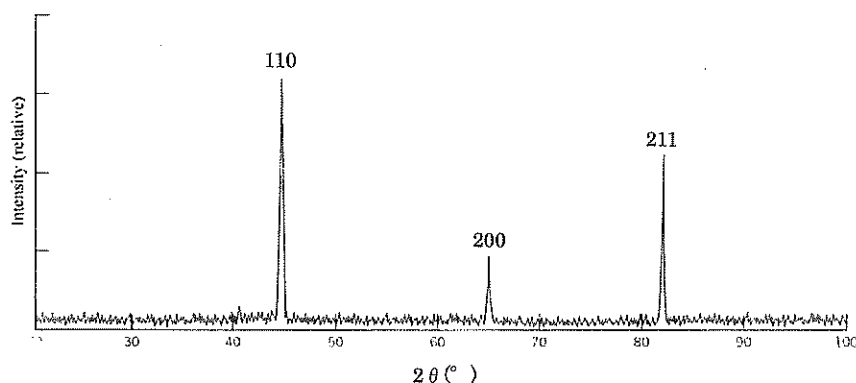
- (1) 以下のミラー指数で示される面、結晶方位を図示しなさい。座標軸は右図に示すものを使い、①から⑥まで別々の図に記載しなさい。

- ① $[1\ 1\ 0]$ ② $(3\ 2\ 0)$ ③ $(1\ 1\ 0)$
 ④ $[0\ 1\ 1]$ ⑤ $[\bar{1}\ 1\ 1]$ ⑥ $(1\ 2\ 1)$



- (2) 1 辺の長さが a の立方体の各頂点と立方体の中心に 1 個の原子が存在する単位格子の名称を答えなさい。
 (3) この単位格子に含まれる原子数 n を答えなさい。
 (4) この単位格子における原子の充填率を示す式を a 、原子半径 r を用いて答えなさい。また、充填率 (%) を、小数点以下 1 桁目を四捨五入して答えなさい。
 (5) この単位格子における最密面および最密方向を (1) の①～⑥の中から全て選択しなさい。
 (6) 鉄は原子半径が 0.124 nm である。(2) の結晶構造をとる時、鉄の格子定数 $[nm]$ を求めなさい。解答は、小数点以下 4 桁目を四捨五入して小数点以下 3 桁目まで答えなさい。
 (7) 鉄の原子量が 55.85 、アボガドロ数が 6.02×10^{23} であるとき、鉄の密度 $[g/cm^3]$ を、小数点以下 2 桁目を四捨五入して小数点以下 1 桁目まで答えなさい。
 (8) この鉄を波長 0.1542 nm の $\text{Cu-K}\alpha$ 線を使って粉末 X 線回折測定を行ったところ、下図のような回折パターンを得た。 $\{1\ 1\ 0\}$ 面からの回折ピークは $2\theta = 44.7^\circ$ 、 $\{2\ 0\ 0\}$ 面からの回折ピークは $2\theta = 65.1^\circ$ 、 $\{2\ 1\ 1\}$ 面からの回折ピークは $2\theta = 82.8^\circ$ であった。 $\{1\ 1\ 0\}$ 面の面間隔 $d_{110} [nm]$ と $\{2\ 0\ 0\}$ 面の面間隔 $d_{200} [nm]$ を求めなさい。計算には次の値を参照しなさい(使用しない値もある)。解答は、小数点以下 4 桁目を四捨五入して小数点以下 3 桁目まで答えなさい。

$\sin 44.7^\circ = 0.7034$	$\sin 22.35^\circ = 0.3803$	$\sin 65.1^\circ = 0.9070$	$\sin 32.55^\circ = 0.5380$
$\cos 44.7^\circ = 0.7108$	$\cos 22.35^\circ = 0.9249$	$\cos 65.1^\circ = 0.4210$	$\cos 32.55^\circ = 0.8429$
$\tan 44.7^\circ = 0.9896$	$\tan 22.35^\circ = 0.4111$	$\tan 65.1^\circ = 2.1543$	$\tan 32.55^\circ = 0.6383$



問 2

以下の設問 (1) および (2) の両方に対して解答しなさい。

(1) 真性半導体のエネルギーバンド構造に関する以下の問いに答えなさい。数値を答える際は、小数点以下 4 桁目を四捨五入して小数点以下 3 桁目まで答えなさい。

(1-1) 伝導帯の電子について、単位体積あたりに許容されるエネルギー状態数 (状態密度) $N(E)$ は、

$$\begin{cases} N(E) = A \times (E - E_c)^{0.5} & \text{for } E \geq E_c \\ N(E) = 0 & \text{for } E < E_c \end{cases}$$

と表される。ここで E は電子のエネルギー、 E_c は伝導帯の底のエネルギーである。また、 A は電子の質量ならびにプランク定数で表される比例定数である。 $A = 1$, $E_c = 0.4 \text{ eV}$ として、 $E = 0.30, 0.40, 0.45, 0.50, 0.60 \text{ eV}$ の 5 点について $N(E)$ の値を答えなさい。また、 $N(E)$ を $E = 0.3 \sim 0.6 \text{ eV}$ の範囲について図示しなさい。ただし、縦軸を $E [\text{eV}]$ 、横軸を $N(E)$ としなさい。

(1-2) エネルギー E の状態を電子が占める確率は、次のフェルミ・ディラック分布関数 $F(E)$ で与えられる。

$$F(E) = 1 / [1 + \exp\{(E - E_f) / kT\}]$$

ここで、 $E_f [\text{eV}]$ はフェルミ準位のエネルギー、 k はボルツマン定数 ($1.381 \times 10^{-23} \text{ J/K}$)、 $T [\text{K}]$ は温度である。電気素量を $1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ 、 $E_f = 0.3 \text{ eV}$ 、 $T = 600 \text{ K}$ として、 $E = 0.30, 0.40, 0.45, 0.50, 0.60 \text{ eV}$ の 5 点について $F(E)$ の値を答えなさい。また、 $T = 100, 300, 600 \text{ K}$ の時の $F(E)$ を $E = 0.0 \sim 0.6 \text{ eV}$ の範囲について図示しなさい。ただし、縦軸を $E [\text{eV}]$ 、横軸を $F(E)$ としなさい。

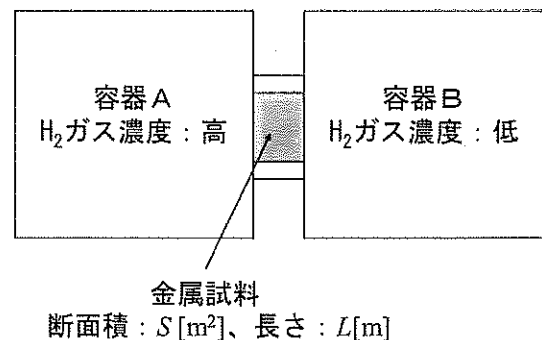
(1-3) 伝導帯における電子のキャリア密度 $n(E)$ は

$$n(E) = N(E) \times F(E)$$

と表される。 $A = 1$, $E_c = 0.4 \text{ eV}$, $E_f = 0.3 \text{ eV}$, $T = 600 \text{ K}$ として、 $n(E)$ を $E = 0.3 \sim 0.6 \text{ eV}$ の範囲について図示しなさい。ただし、縦軸を $E [\text{eV}]$ 、横軸を $n(E)$ としなさい。

(1-4) 伝導帯の底のエネルギー E_c と価電子帯の頂のエネルギー E_v の間のバンドの名称を日本語で答えなさい。

(2) 右図に示すように、濃度が異なる水素ガスが常に一定濃度に保たれている容器 A と容器 B の間に、金属試料 (断面積 $S [\text{m}^2]$ 、長さ $L [\text{m}]$) をセットして、容器 A 中の水素が金属試料中を拡散して、容器 B に移行する実験を行った。以下の問いに答えなさい。



(2-1) 実験を開始してから十分な時間が経過すると、単位時間あたりに金属試料中を拡散で移行する水素量が一定 ($J [\text{mol} \cdot \text{s}^{-1}]$) となった。拡散が Fick の第 1 法則に従うとした場合、その時の金属試料中の水素濃度分布を図示しなさい。ただし、容器 A 中の水素ガスと接している金

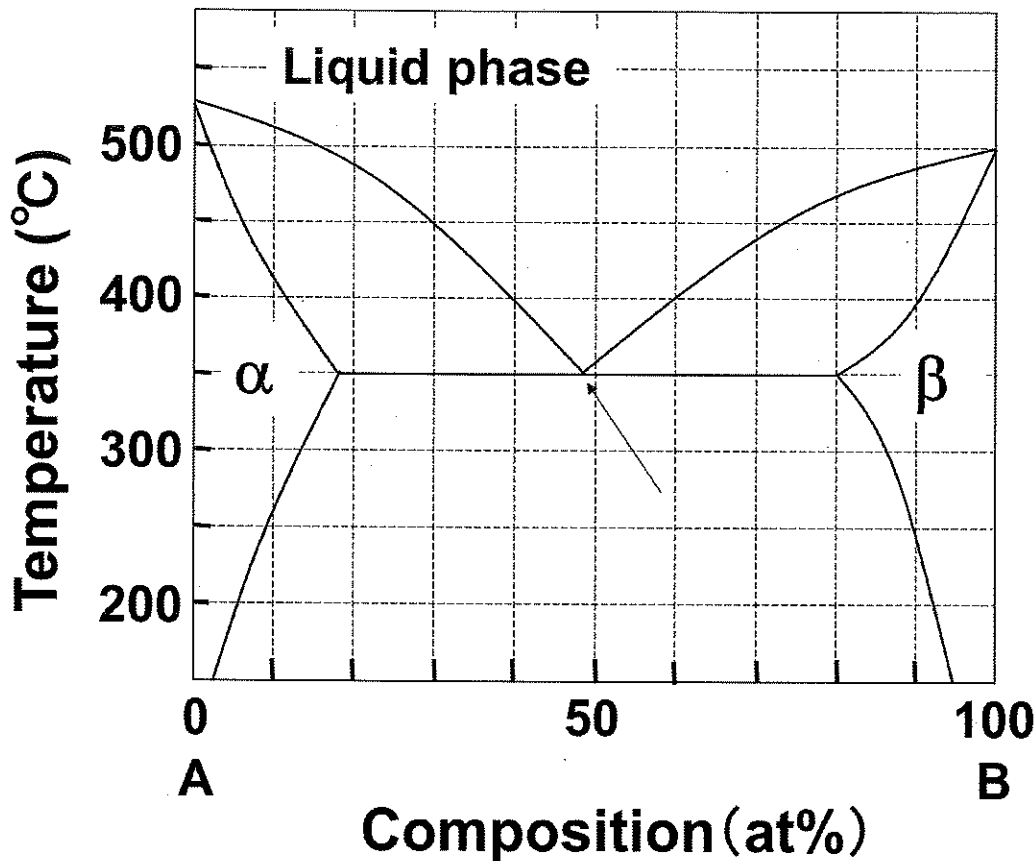
属表面を $x=0$ 、そこでの水素濃度を C_0 、容器 B 中の水素ガスと接している金属表面を $x=L$ 、そこでの水素濃度を C_L としなさい。

(2-2) 金属試料の長さを $3L$ として、(2-1) と同じ実験を行った。このとき、十分な時間が経過した後の、単位時間あたりに金属試料中を拡散で移行する水素量を答えなさい。また、その時の金属試料中の水素濃度分布を図示しなさい。なお、容器 B 中の水素ガスと接している金属表面の位置を $x=3L$ としなさい。

(2-3) 金属試料の温度を上昇させて (2-1) と同じ実験を行ったところ、単位時間あたりに金属試料中を拡散で移行する水素量が増加した。しかし、ある金属試料においては、さらに温度を上昇させて実験を続けると、ある温度において、単位時間あたりに金属試料中を拡散で移行する水素量が急に低下した。この低下の原因について、考えられる現象を説明しなさい。

問 3

下図は、ある金属の元素 A と元素 B からなる二元系状態図である。以下の問いに答えなさい。



- (1) 元素 A の濃度が 20at% の液相から初晶が晶出する温度を答えなさい。初晶が晶出する温度から更に 100℃まで徐冷した場合の組織の模式図を描きなさい。
- (2) 元素 B の濃度が 30at% の液相から初晶が晶出する温度を答えなさい。また、①初晶が晶出する温度及び、②その温度から 350℃直前、③350℃に達してごく短時間経過後、更に④200℃まで徐冷した場合、の組織の模式図をそれぞれ描きなさい。その際、各温度において形成した組織の各濃度を模式図中に示しなさい。
- (3) 矢印で示す点の自由度を答えなさい。その組成の液相をゆっくりと冷却した際の冷却曲線を図示しなさい。その際、縦軸と横軸のラベルを明示しなさい。
- (4) 微細な析出物を母相に形成させて金属の強度を向上させることが出来る。この析出強化を利用する場合、二元系状態図のどの組成からどの様に冷却したら良いか具体的に答えなさい。
- (5) 転位の運動を阻害させる因子についてその機構も含めて答えなさい。
- (6) 液相から球形の固相が形成する場合、凝固に伴うエネルギーの変化について説明しなさい。
- (7) 冷却速度を変化させると液相から晶出する固相にどのような影響があるか、冷却速度との関係を論じなさい。

問1 以下の(1)から(2)の問いに答えなさい。

- (1) 空間依存性を無視した原子炉について、時刻 t における中性子密度を $n(t)$ 、遅発中性子先行核密度を $C(t)$ としたとき、これらが以下の微分方程式を満足するものとする。

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} n(t) + \lambda C(t) \quad (1)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{\beta}{\Lambda} n(t) - \lambda C(t) \quad (2)$$

ここで、 ρ は反応度、 β は遅発中性子割合、 Λ は中性子生成時間、 λ は遅発中性子先行核の崩壊定数を示す。臨界状態の原子炉に対して $t = 0$ で反応度 ρ （ただし $0 < \rho < \beta$ ）をステップ状に印加したものとし、 $n(0) = n_0$ とする。なお、 β 、 Λ 、 λ は、一般的な軽水型原子炉での値を想定する。

- (1-1) 式(1)および式(2)の右辺各項の物理的意味を説明しなさい。

- (1-2) 反応度印加前の C を答えなさい。

- (1-3) 反応度印加前後で C の変化が無視でき、かつ反応度印加直後に $\frac{dn(t)}{dt} = 0$ が成り立つとしたとき、反応度印加直後の n を答えなさい。

- (1-4) $n(t) = A \exp(\omega t)$ 、 $C(t) = B \exp(\omega t)$ を仮定して式(1)、(2)に代入すると、以下の式が得られることを示しなさい。なお、 A 、 B は定数とする。

$$\begin{pmatrix} \omega - \frac{\rho - \beta}{\Lambda} & -\lambda \\ -\frac{\beta}{\Lambda} & \omega + \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0 \quad (3)$$

- (1-5) 式(3)に対して、 A 、 B に自明でない解が存在するという条件から、 ω として以下が得られることを示しなさい。

$$\omega = \frac{-(\lambda\Lambda - \rho + \beta) \pm \sqrt{(\lambda\Lambda - \rho + \beta)^2 + 4\Lambda\rho\lambda}}{2\Lambda} \quad (4)$$

- (1-6) 式(4)中の $(\lambda\Lambda - \rho + \beta)^2 + 4\Lambda\rho\lambda$ が、 ρ の値にかかわらず正となることを示しなさい。

- (1-7) 式(4)は、 $\Lambda \approx 0$ であることを用いると、以下のように近似できる。

$$\omega = \frac{-(\beta - \rho) \pm \sqrt{(\beta - \rho)^2 + 4\Lambda\rho\lambda}}{2\Lambda} \quad (5)$$

式(5)に対して、 $(\beta - \rho)^2 \gg 4\Lambda\rho\lambda$ であるとしたときに、1次のテーラー展開近似を利用して、 ω として $\frac{\rho\lambda}{\beta - \rho}$ 、および $-\frac{\beta - \rho}{\Lambda}$ が得られることを示しなさい。また、この結果を利用して、反応度を印加してから十分な時間が経過したとき、 n が2倍になるために要する時間を答えなさい。

- (2) 定格出力が Q_t [W]の加圧水型軽水炉に、 N_p 本の円筒状の燃料棒からなる燃料集合体が合計 N_a 体装荷されているものとする。燃料には低濃縮ウラン酸化物を用いるものとし、燃料棒の直径を D [cm]、発熱長を L [cm]とする。また、燃料集合体 1 体あたりのウラン重量を M [t]とする。
- (2-1) 定格出力運転時における燃料棒の全炉心平均出力密度 $\bar{Q}$ [W/cm³]を答えなさい。
- (2-2) 冷却材の炉心の出入り口温度差を ΔT [K]、冷却材の定圧比熱を C_p [J/(kg·K)]としたとき、定格出力運転時における全炉心の冷却材流量 W_c [kg/s]を答えなさい。
- (2-3) 冷却材密度を ρ [g/cm³]、燃料集合体 1 体あたりの冷却材流路面積を A [cm²]としたとき、定格出力運転時における全炉心平均の冷却材流速 v_c [cm/s]を答えなさい。なお、冷却材流量として W_c を用いてよい。
- (2-4) 定格の 90%出力で 100 日間運転したときの燃料の全炉心平均燃焼度 BU [(W·day)/t]を答えなさい。
- (2-5) 燃料中のウラン 235 が全て核分裂したときの放出エネルギーを、燃料中のウラン 1 t あたり S [W·day]としたとき、この燃料がとり得る最大の燃焼度は S [(W·day)/t]よりも大きい。その理由を 100 文字以内で説明しなさい。

問 2 黒体面のふく射伝熱に関する以下の問いに答えなさい。ただし空間は非吸収性とし、黒体面以外はふく射エネルギーの吸収は考慮しないものとする。

(1) ある空間内に向かい合う 2 つの黒体面 1 と 2 がある。それぞれの面積を $A_1[\text{m}^2]$ と $A_2[\text{m}^2]$ 、絶対温度を $T_1[\text{K}]$ と $T_2[\text{K}]$ 、面 1 からみた面 2 の形態係数を F_{12} 、ステファン・ボルツマン定数を $\sigma [\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)]$ とする。

(1-1) 単位時間に面 1 から放射される全ふく射エネルギーを答えなさい。

(1-2) 単位時間に面 1 から放射され、面 2 で吸収されるふく射エネルギーを答えなさい。

(1-3) 単位時間あたりに面 1 と面 2 の間で交換されるふく射エネルギーを答えなさい。

ただし、面 1 から面 2 に移動するエネルギーを正とする。

(2) 絶対温度 $T[\text{K}]$ の黒体から、波長 $\lambda[\text{m}]$ と $\lambda + d\lambda[\text{m}]$ の微小波長帯で放射される単色放射能 $E_{b\lambda}[\text{W}/\text{m}^3]$ は次のプランクの法則で表される。

$$E_{b\lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5 [\exp(C_2/\lambda T) - 1]}$$

ここで、 $C_1 = 3.742 \times 10^8 \text{ W} \cdot \mu\text{m}^4/\text{m}^2$ 、 $C_2 = 1.439 \times 10^4 \mu\text{m} \cdot \text{K}$ はそれぞれ第 1 ふく射定数、第 2 ふく射定数である。 $E_{b\lambda}$ を $\lambda = 0$ から ∞ まで積分して、ステファン・ボルツマンの法則を

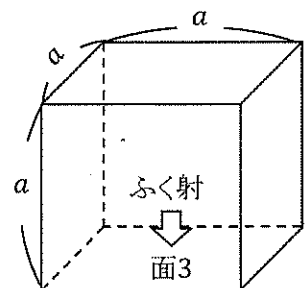
導き、ステファン・ボルツマン定数 σ を有効数字 3 桁で答えなさい。ただし、 $\int_0^\infty \frac{x^3}{\exp(x)-1} dx =$

$\frac{\pi^4}{15}$ とする。

(3) 正六面体 (1 辺 $a[\text{m}]$) の内側の向かい合う黒体面間のふく射エネルギー交換量を考える。

(3-1) 右図の内側の面 3 からみた隣接する内側の四面の形態係数が F のとき、面 3 からみた面 3 に平行な内側の面の形態係数を F を使って表しなさい。

(3-2) 面 3 の絶対温度が $T[\text{K}]$ 、それ以外の内側の面の温度が $T'[\text{K}]$ のとき、面 3 とそれ以外の内側の面との正味のふく射エネルギー交換量が F に依存しないことを、式を用いて証明しなさい。



問3 以下の(1)から(4)の問いに答えなさい。

- (1) 以下の問いに答えなさい。なお、 ${}^2\text{H}$, ${}^3\text{H}$, ${}^4\text{He}$, ${}^{27}\text{Al}$, ${}^{30}\text{P}$, 中性子 n の静止質量は、それぞれ、2.014102 u, 3.016049 u, 4.002603 u, 26.981539 u, 29.978314 u, 1.008665 u である。ただし、 $1\text{ u} = 931.5\text{ MeV}$ とする。
- (1-1) 下記の反応の Q 値、ならびに反応後の ${}^4\text{He}$ と中性子の運動エネルギーを有効数字3桁で答えなさい。簡単のため ${}^2\text{H}$ と ${}^3\text{H}$ が持つ運動エネルギーは0とする。



- (1-2) 式(1)で示される反応で発生した中性子に対する鉄の全断面積を $2.589 \times 10^{-24}\text{ cm}^2$ とした場合、この中性子を鉄により遮蔽して $1/10$ の強度に減衰させるのに必要となる厚さを有効数字3桁で答えなさい。ここでは中性子と鉄が何らかの相互作用を起こした場合、消滅するものとする。なお、鉄の密度は 6.98 g/cm^3 、質量数は56、アボガドロ数は 6.02×10^{23} とする。
- (1-3) 式(1)で示される反応で発生した ${}^4\text{He}$ を使用して以下の反応を起こそうとする場合、しきいエネルギーを示したうえで反応が起こるか否かを答えなさい。

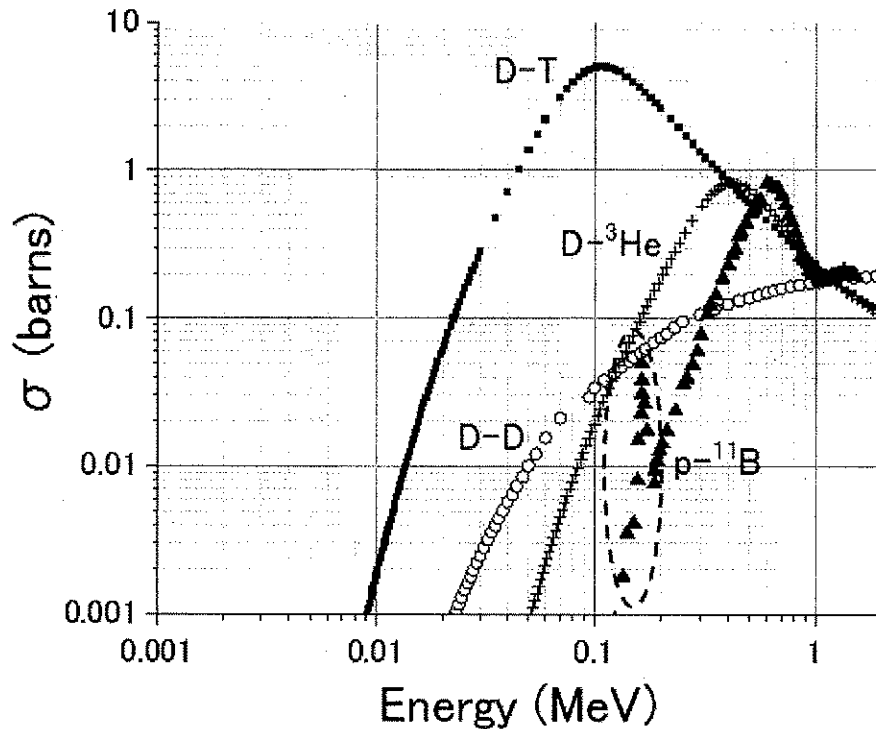


- (1-4) 式(2)で示される反応で発生した ${}^{30}\text{P}$ を回収し、放射能を測定したところ、 100 MBq であった。生成した ${}^{30}\text{P}$ は半減期2.50分で β^+ 壊変する。生成した ${}^{30}\text{P}$ の質量を有効数字3桁で答えなさい。簡単のため、 ${}^{30}\text{P}$ は同時に生成したものとする。
- (2) トリウム系列に属する ${}^{224}\text{Ra}$ の半減期を3.62日とする。天然の鉱石中に ${}^{224}\text{Ra}$ 原子1個あたり ${}^{228}\text{Th}$ 原子が193個含まれていたとしたとき、 ${}^{228}\text{Th}$ の半減期を有効数字3桁で答えなさい。なお、 ${}^{224}\text{Ra}$ は ${}^{228}\text{Th}$ が α 壊変することで発生する。
- (3) 以下の式(3), (4)の物理的意味を説明したうえで、軌道電子の半径 r を求めなさい。なお、 m は電子の質量、 v は電子の速度、 e は電子の電荷、 h はプランク定数、 k_0 はクーロン定数を示し、 n は整数とする。

$$\frac{k_0 e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad (3)$$

$$mvr = \frac{nh}{2\pi} \quad (4)$$

- (4) 下図に示す、代表的な核融合反応全断面積のエネルギー依存性を踏まえて、以下の問いに答えなさい。



- (4-1) 以下の文章中の空欄①～④にあてはまる言葉、記号を答えなさい。

D-D 反応では、 ^3He と中性子、もしくは、① と ② が発生する。また、 $\text{p-}^{11}\text{B}$ 反応では、3 個の ③ が発生するとともに、8.68 MeV のエネルギーが放出される。図中の $\text{p-}^{11}\text{B}$ 反応の全断面積には、0.16 MeV 辺りに破線で囲まれた鋭いピークが観測される。このような反応断面積に見られるピークは ④ と呼ばれる。

- (4-2) エネルギー源として核融合反応の利用を考える場合、D-D 反応と $\text{p-}^{11}\text{B}$ 反応を比べて、それぞれの反応の利点と欠点を説明しなさい。