2025 年 4 月入学/2024 年 10 月入学　応用物理学専攻修士課程入学試験問題 I
（応用数学 I，力学，電磁気学）
2024 年 8 月 20 日 9:00~12:00

解答上の注意

(1)　問題用紙はこのページを含め 3 枚である．答案用紙は問毎に各 1 枚である．草案用紙は 3 枚である．

(2)　各問はその問題番号が記載された答案用紙に解答すること．裏面を使用してもよい．

(3)　すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を明記すること．

(4)　試験終了後はすべての答案用紙を回収する（草案用紙は持ち帰ること）．

問1

1) 以下の設問に答えよ．

(i) 次の行列 M の固有値と対応する固有ベクトルを全て求めよ．

$$M=\begin{pmatrix}13 & 9\\ -20 & -14\end{pmatrix}.$$

(ii) t を独立変数とする 2 つの関数 $x(t)$, $y(t)$ についての以下の連立微分方程式の一般解を求めよ．必要であれば，(i) の結果を用いてよい．

$$3\frac{dx}{dt}+2\frac{dy}{dt}+x+y=0,$$
$$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+7x+5y=0.$$

2) x と t を独立変数とする関数 $u(x,t)$ に対する偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

を考える．ここで $x\in[0,L]$, $t\in[0,\infty)$ である．次の境界条件

$$u(0,t)=u(L,t)=0, \tag{2}$$

と初期条件

$$u(x,0)=\begin{cases} x & (0\le x\le \frac{L}{2})\\ L-x & (\frac{L}{2}<x\le L)\end{cases}, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \tag{4}$$

を満たす非自明な実数解 ($u=0$ ではない解) を以下の指示に従い求めよ．

(i) x の関数 $X(x)$ と t の関数 $T(t)$ を用い $u(x,t)$ を，$u(x,t)=X(x)T(t)$ と変数分離形で表した上で，(1) 式に代入することにより

$$\frac{1}{9T}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}=\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=\lambda, \tag{5}$$

となることを示せ．あわせて，定数 λ を導入した理由も答えよ．

(ii) X についての常微分方程式の一般解を導出し，境界条件 (2) を満たす解と λ の条件を求めよ．ただし，$\lambda<0$ と仮定せよ．

(iii) T についての常微分方程式の一般解を導出せよ．

(iv) (ii),(iii) の結果，および重ね合わせの原理を用い，境界条件 (2) を満たす $u(x,t)$ を書き表せ．

(v) 以下の関係式を用い，境界条件 (2) に加え，初期条件 (3), (4) 式も満たす解 $u(x,t)$ を求めよ．

$$\frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx=\delta_{m,n}. \tag{6}$$

ここで m,n は正の整数，$\delta_{m,n}$ はクロネッカーのデルタである．

2025 年 4 月入学/2024 年 10 月入学　応用物理学専攻修士課程入学試験問題 I
(応用数学 I, 力学, 電磁気学)
2024 年 8 月 20 日 9:00~12:00

解答上の注意
(1)　問題用紙はこのページを含め 3 枚である. 答案用紙は問毎に各 1 枚である. 草案用紙は 3 枚である.
(2)　各問はその問題番号が記載された答案用紙に解答すること. 裏面を使用してもよい.
(3)　すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を明記すること.
(4)　試験終了後はすべての答案用紙を回収する (草案用紙は持ち帰ること).

問2

質量 m の二つの質点が、図のように長さ ℓ の二本の細い糸で結ばれている。一端が原点に固定された糸のもう一方の端は質点 1 に固定されていて、この糸と x 軸の間の角を θ_1 とする。また、質点 1 と質点 2 を結ぶ糸と、x 軸の間の角を θ_2 とする。糸は変形せず、その質量は m よりも十分小さく無視できる。x 軸の正の向きに重力が働いており、その重力加速度を g とする。このような二自由度系が示す xy 平面内の微小振動を、以下の設問に従って解析せよ。x 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{i}$、y 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{j}$ とする。

(1) 質点 1 の位置ベクトル $\boldsymbol{r}_1$ と、質点 2 の位置ベクトル $\boldsymbol{r}_2$ を ℓ、$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ などを用いて表せ。また各質点の速度 $\dot{\boldsymbol{r}}_1$、$\dot{\boldsymbol{r}}_2$ を計算し $\dot{\theta}_1$、$\dot{\theta}_2$ などを用いて表せ。ここで、$\dot{X} = \dfrac{dX}{dt}$ は時間微分を表す。

(2) 以下の設問では、振動角が十分に小さいこと $\theta_1 \ll 1$、$\theta_2 \ll 1$ を仮定する。x 方向の質点の速度の大きさが y 方向の質点の速度の大きさに比べて十分に小さいという事実を用い、質点の速度は近似的に

$$\dot{\boldsymbol{r}}_1 = \ell\dot{\theta}_1\boldsymbol{j}, \quad \dot{\boldsymbol{r}}_2 = \ell(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\boldsymbol{j},$$

と表現できることを示せ。

(3) 二自由度系のポテンシャル・エネルギーを計算し、ラグランジュ関数を導出せよ。また、θ_1、θ_2 に関して線形なラグランジュの運動方程式

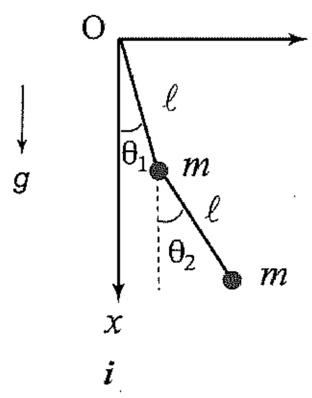
$$2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + 2\omega_0^2\theta_1 = 0, \quad \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \omega_0^2\theta_2 = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

を導出せよ。

(4) (3) で導出した線形なラグランジュの運動方程式を解き、二つの固有振動数を求めよ。

(5) 二つの固有振動モードの特徴や相違点を説明せよ。(図を用いても良い)

(6) この二自由度系における保存量を一つ挙げ、実際に保存していることを示せ。



2025 年 4 月入学/2024 年 10 月入学　応用物理学専攻修士課程入学試験問題 I
（応用数学 I，力学，電磁気学）
2024 年 8 月 20 日 9:00~12:00

解答上の注意

(1)　問題用紙はこのページを含め 3 枚である．答案用紙は問毎に各 1 枚である．草案用紙は 3 枚である．

(2)　各問はその問題番号が記載された答案用紙に解答すること．裏面を使用してもよい．

(3)　すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を明記すること．

(4)　試験終了後はすべての答案用紙を回収する（草案用紙は持ち帰ること）．

問3

1. 質量 m、電荷 e の点電荷が、各座標軸への射影が全て角振動数 ω_0 の単振動で表される運動をしている。点電荷の位置座標を $\boldsymbol{Z} = (x, y, z)$、時間を t とする。なお、点電荷が、運動にともなって電磁波を放出してエネルギーを消失する現象は考慮しないとして、以下の問いに答えなさい。

(1) この点電荷の運動方程式を x, y, z 成分ごとに示しなさい。

(2) この点電荷に、z 軸に平行で一様な静磁場 $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ を加えて十分時間をおいたときの運動を考える。点電荷の運動方程式を x, y, z 成分に分けて示したうえで、z 方向の運動が単振動であることを示しなさい。

(3) 点電荷の運動を xy 平面への射影を取ることにより調べるため、座標 x, y の時間変化を以下の式で表す。

$$x = \alpha\cos(\omega t + \delta)$$
$$y = \beta\sin(\omega t + \delta)$$

ただしα, β, δ は定数、$\omega > 0$ とする。

このとき、(2)で求めた運動方程式から解として得られる 2 つの ω (ω_1とω_2) を求めなさい。

(4) 点電荷の運動の xy 平面への射影を、(3)で得られた ω_1とω_2 のそれぞれに対応させて答案用紙の図中に示しなさい。

(5) このとき、ω_1とω_2の差が磁場の強さに比例することを示しなさい。

2. 図 1 のような、交流電源につながれた 2 枚の導体円板からなる平行板コンデンサーを考える。ここで、円板の半径を R とし、極板の間隔を d とする。円形極板の中心軸からの距離を r としたとき、コンデンサー内部の $0 \le r \le a$ と $a < r \le R$ の領域は誘電率がそれぞれ ε_1 と ε_2 の誘電体で満たされている。なお、これらの誘電体の透磁率は真空の透磁率μ_0に等しいものとする。ここで、電束密度 $\boldsymbol{D}$ を電場 $\boldsymbol{E}$ と誘電率 ε を用いて $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$ と定義する。また、端の効果および導線を流れる電流による磁場の影響は無視できるものとし、以下の問いに答えなさい。

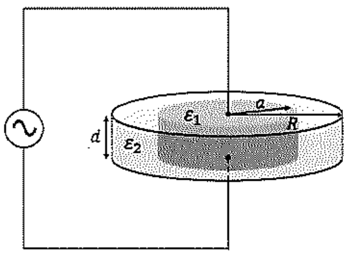


図 1

(1) この平行板コンデンサーの静電容量を求めなさい。

(2) 交流電源の出力電圧 $V(t)$ を $V(t) = V_0 \sin\omega t$ とする。このときのコンデンサー内の電束密度の大きさ D を r と t の関数 $D(r, t)$ として求めなさい。さらに、コンデンサー内部 $(r < R)$ における磁束密度の大きさ B を r と t の関数 $B(r, t)$ として求めなさい。

(3) コンデンサーの形状を $R = 1.0 \times 10^{-2}$ m、$d = 1.0 \times 10^{-3}$ m とした。$a = 8.0 \times 10^{-3}$ m とし、$\varepsilon_1 = 2.3\varepsilon_0$、$\varepsilon_2 = 3.8\varepsilon_0$ である。ここで、ε_0 は真空の誘電率である。交流電源を $V_0 = 1.0 \times 10^1$ V、$f = \omega/2\pi = 1.0 \times 10^6$ Hz としたとき、コンデンサー内部で中心軸からの距離が 5.0×10^{-3} m $(r = 5.0 \times 10^{-3}$ m$)$の場所での磁束密度の振幅を数値で求めなさい。ここで、真空中の光速は 3.0×10^8 m/s とする。

2025 年 4 月入学/2024 年 10 月入学　応用物理学専攻修士課程入学試験問題 II
（応用数学 II，熱・統計力学，量子力学）
2024 年 8 月 20 日 13:00~16:00

解答上の注意

(1)　問題用紙はこのページを含め 3 枚である．答案用紙は問毎に各 1 枚である．草案用紙は 3 枚である．
(2)　各問はその問題番号が記載された答案用紙に解答すること．裏面を使用してもよい．
(3)　すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を明記すること．
(4)　試験終了後はすべての答案用紙を回収する（草案用紙は持ち帰ること）．

問4

[1] 図 1 のように、3 次元座標中の原点0を中心とする単位球の表面と、平面 $z=\frac{1}{2}$ の重なり部分で作られる曲線Cを考える。またx,y,z方向の単位ベクトルをそれぞれ$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$とし、ベクトル場$\boldsymbol{A}=y^3\boldsymbol{i}+(x+3z^2)\boldsymbol{j}+(x^2+3z)\boldsymbol{k}$を考える。

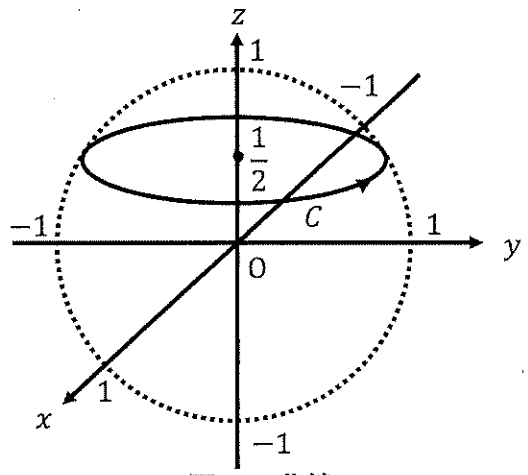


図 1：曲線C

(1) 曲線Cにおけるベクトル場$\boldsymbol{A}$の線積分

$$I_1=\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$$

を計算せよ。ただし、この(1)ではストークスの定理を使わずに直接的に線積分を実行して計算せよ。また積分経路の向きは、図中の矢印で示す通り$+z$方向から見て反時計回りである。

(2) $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$を計算せよ。

(3) ストークスの定理を用いて、(1)の線積分I_1を面積分に置き換えて計算せよ。

(4) 単位球の表面をSとする。閉曲面Sにおける以下の面積分I_2を計算せよ。ただし$\boldsymbol{n}$は面Sに垂直な単位ベクトルを表す。また、ガウスの定理を使ってもよい。

$$I_2=\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

[2] 複素領域 $D=\{z\in 複素数\,|\,\mathrm{Im}\,z\geq 0\}$ において正則な関数 $f(z)$ がある。$f(z)$ は $|z|\to\infty$ において 0 に一様収束するものとする。この関数について実軸 ($\mathrm{Im}\,z=0$ の直線) 上の主値積分

$$\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(z)}{z-\omega}dz\equiv\lim_{\epsilon\to+0}\left[\int_{-\infty}^{\omega-\epsilon}\frac{f(z)}{z-\omega}dz+\int_{\omega+\epsilon}^{\infty}\frac{f(z)}{z-\omega}dz\right] \qquad \text{(A)}$$

を求めたい。ただし、ω は任意の実数、ϵ は正の実数である。これに関する以下の問に答えよ。

(1)　図 2 に示した複素平面上の経路 $C=C_1+C_2+C_3+C_4$ に沿った積分

$$\oint_C\frac{f(z)}{z-\omega}dz$$

を求めよ。但し C_1 は原点 $z=0$ を中心とする半径 $R>0$ の上半円、C_3 は点 $z=\omega$ を中心とする半径 $\epsilon>0$ の上半円で、$-R<\omega-\epsilon,\omega+\epsilon<R$ とする。また積分経路上の矢印は積分の方向を表す。必要ならコーシーの積分定理を証明無しで使ってよいが、その適用条件を明記すること。

(2)　$R\to+\infty$ における経路 C_1 に沿った以下の積分を求めよ。

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_1}\frac{f(z)}{z-\omega}dz$$

(3)　$\epsilon\to+0$ における経路 C_3 に沿った以下の積分を求めよ。

$$\lim_{\epsilon\to+0}\int_{C_3}\frac{f(z)}{z-\omega}dz$$

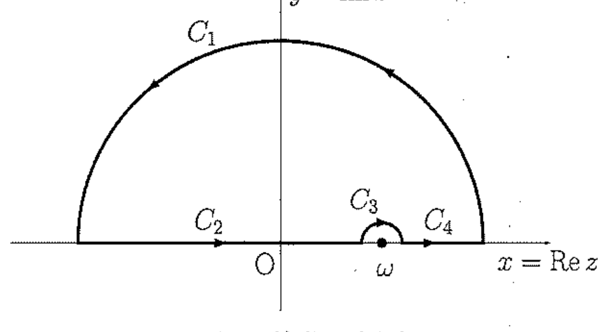


図 2: 積分の経路

(4)　式 (A) の積分を求めよ。

(5)　得られた結果を踏まえ、$f(z)$ の虚部 $f_2(z)=\mathrm{Im}\,f(z)$ を用いて、実部 $f_1(z)=\mathrm{Re}\,f(z)$ を表せ。

2025 年 4 月入学/2024 年 10 月入学　応用物理学専攻修士課程入学試験問題 II
（応用数学 II，熱・統計力学，量子力学）
2024 年 8 月 20 日 13:00~16:00

解答上の注意

(1)　問題用紙はこのページを含め 3 枚である．答案用紙は問毎に各 1 枚である．草案用紙は 3 枚である．
(2)　各問はその問題番号が記載された答案用紙に解答すること．裏面を使用してもよい．
(3)　すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を明記すること．
(4)　試験終了後はすべての答案用紙を回収する（草案用紙は持ち帰ること）．

問5

質量m_A, m_Bの原子A, Bからなる 2 原子分子がN個含まれる理想気体を考える。この気体が温度Tの熱浴に接して熱平衡状態にあるとし，以下の問いに答えよ。

[1] 2 原子分子の原子間の距離がdに固定されているとすると，分子 1 個のハミルトニアンは，分子の質量$M = m_A + m_B$と重心まわりの慣性モーメント$I = m_A m_B d^2/(m_A + m_B)$を用いて

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{1}{2I}\left(p_\theta{}^2 + \frac{p_\varphi{}^2}{\sin^2\theta}\right) \tag{a}$$

と書くことができる。ただし，分子の重心の座標$\boldsymbol{R}$，分子の向きを表す角度θ, φ（下図参照）にそれぞれ共役な運動量を$\boldsymbol{P}, p_\theta, p_\varphi$と表した。

(1) (a)式を用いて、分配関数

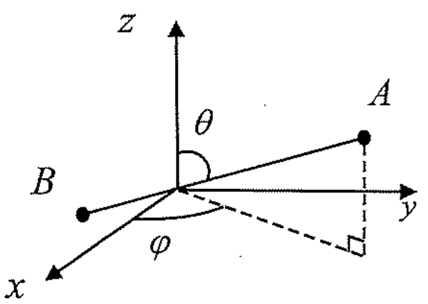
$$z = \frac{1}{h^5}\int d\boldsymbol{R}\int d\boldsymbol{P}\int d\theta\int d\varphi\int dp_\theta\int dp_\varphi \exp\left(-\frac{H}{k_B T}\right) \tag{b}$$

を計算し，以下の(c)式で表されることを示せ。ただし，hはプランク定数，k_Bはボルツマン定数で，気体の体積をVとする。

$$z = \frac{1}{h^5}V\left(2\pi M k_B T\right)^{\frac{3}{2}} 8\pi^2 I k_B T \tag{c}$$

必要なら，以下の公式を用いてよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-cx^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{c}}$$



(2) (1)の結果を用いて、理想気体の圧力を計算せよ。
(3) (1)の結果を用いて、理想気体の内部エネルギーを計算せよ。

[2] [1]において扱った原子A, Bが，それぞれ，正電荷qと負電荷$-q$をもつ場合を考える。このとき，BからAに向かう位置ベクトルを$\boldsymbol{d}$とすると，分子は双極子モーメント$\boldsymbol{p}_0 = q\boldsymbol{d}$をもつ一つの電気双極子と見なすことができる。この極性分子からなる極性気体にz方向に大きさEの電場をかけると，各々の双極子の位置エネルギーは$\boldsymbol{p}_0$の大きさp_0を用いて

$$U = -p_0 E\cos\theta \tag{d}$$

と書くことができる。その結果、双極子間の相互作用を無視する理想気体において、ハミルトニアンは(a)式と(d)式の和で表される。

(1)　この場合の極性気体の分配関数を計算せよ。

(2)　ヘルムホルツの自由エネルギーFを計算せよ。

(3)　極性気体の分極$P = -\dfrac{\partial F}{\partial E}$を計算せよ。

(4)　$p_0 E \ll k_B T$の場合にPがEに比例することを示し，その比例係数（誘電感受率）を求めよ。必要なら，以下の公式を用いてよい。

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \cong \frac{1}{x} + \frac{x}{3} \quad (x \ll 1)$$

2025 年 4 月入学/2024 年 10 月入学　応用物理学専攻修士課程入学試験問題 II
（応用数学 II，熱・統計力学，量子力学）
2024 年 8 月 20 日 13:00~16:00

解答上の注意
(1)　問題用紙はこのページを含め 3 枚である．答案用紙は問毎に各 1 枚である．草案用紙は 3 枚である．
(2)　各問はその問題番号が記載された答案用紙に解答すること．裏面を使用してもよい．
(3)　すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を明記すること．
(4)　試験終了後はすべての答案用紙を回収する（草案用紙は持ち帰ること）．

問6

電子が結晶格子中のある位置に局在しているときは，スピンを電子の持つ唯一の自由度として取り扱うことができる。ある時刻 t における，そのような電子の状態（波動関数）$\psi(t)$ が

$$\psi(t) = c_{\uparrow}(t)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + c_{\downarrow}(t)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_{\uparrow}(t)\\c_{\downarrow}(t)\end{pmatrix} \qquad \cdots ①$$

で与えられるとする。ここで，$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ はスピン上向きの状態，$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ はスピン下向きの状態を表し，$c_{\uparrow}(t), c_{\downarrow}(t)$ は時刻 t に依存する複素数で $|c_{\uparrow}(t)|^2 + |c_{\downarrow}(t)|^2 = 1$ を満たすものとする。

電子はスピンによる磁気モーメント $\boldsymbol{M}$ を持ち，この磁気モーメント $\boldsymbol{M}$ は

$$\boldsymbol{M} = -K\boldsymbol{S} \qquad \cdots ②$$

の式により，正の定数 K とスピン演算子 $\boldsymbol{S} = (S_x, S_y, S_z)$ で表される。ただし，$\boldsymbol{S}$ の x, y, z 成分はそれぞれ

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix},\ S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\\mathrm{i} & 0\end{pmatrix},\ S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \qquad \cdots ③$$

である（$\hbar$ はプランク定数 $/(2\pi)$）。

いま，正の定数 B で表される x 軸方向の外部磁場 $\boldsymbol{B} = (B, 0, 0)$ が存在して，ハミルトニアン H が

$$H = -\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{B} \qquad \cdots ④$$

と書けるものとする（$\cdot$ は内積を表す）。時刻 $t = 0$ のとき，

$$\psi(0) = \begin{pmatrix}c_{\uparrow}(0)\\c_{\downarrow}(0)\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\\mathrm{i}\end{pmatrix} \qquad \cdots ⑤$$

であったとして，以下の問いに答えよ。

(1)　ハミルトニアン H を 2×2 の行列の形で表せ。

(2)　$\begin{pmatrix}c_{\uparrow}(t)\\c_{\downarrow}(t)\end{pmatrix}$ が満たすべきシュレディンガー方程式を記せ。

(3)　(2) の微分方程式から $\psi(t) = \begin{pmatrix}c_{\uparrow}(t)\\c_{\downarrow}(t)\end{pmatrix}$ を t の関数として表せ。

(4)　時刻 t におけるスピンの x 方向成分の期待値 $\langle S_x(t)\rangle$ は $\psi(t)^{\dagger}S_x\psi(t)$ を計算することにより得られる。$\langle S_x(t)\rangle$ を t の関数として求めよ。ただし，$\psi(t)^{\dagger}$ は $\psi(t)$ の複素共役転置ベクトルを表す。

(5)　(4) と同様に時刻 t における，スピンの y 方向成分の期待値 $\langle S_y(t)\rangle$，およびスピンの z 方向成分の期待値 $\langle S_z(t)\rangle$ を求めよ。

(6)　(4), (5) の結果から，t をパラメータとして，「$t \geqq 0$ における点 $(\langle S_x(t)\rangle, \langle S_y(t)\rangle, \langle S_z(t)\rangle)$ の軌跡」を描き，スピンがどのような運動をするか記せ。