

2024年4月入学・2023年10月入学
北海道大学大学院工学院修士課程

機械宇宙工学専攻，人間機械システムデザイン専攻，
エネルギー環境システム専攻，量子理工学専攻

応用量子科学系研究室群

専門科目試験問題

応用数学

試験期日：2023年8月22日（火）

時間：9：00～12：00

この問題用紙には計4問の問題が出題されています。全4問の全てに解答してください。問題用紙以外には、答案用紙4組（2枚一組）と草案紙4枚を配布します。各組の答案用紙は問題ごとに使用し、全ての答案用紙に問題の番号を明記してください。答案用紙のホッチキス止めをはずしてはいけません。

注意事項

- 試験開始の合図があるまで、この問題用紙をひらいてはいけません。
- 携帯電話，スマートフォンは電源を切り，カバン等にしまってください。身につけてはいけません。また，時計のアラームも使用を禁止しますので音のならないように設定してください。
- 試験中，机上には，受験票，鉛筆（黒），シャープペンシル（黒），消しゴム，鉛筆削り，眼鏡，および計時機能だけの時計以外を置くことはできません。
- 全ての答案用紙，草案紙の上欄に科目名，受験番号等を記入し，問題用紙にも受験番号を記入してください。
- 各問ごとの2枚一組の答案用紙が不足した場合は「裏面に続く」と明記した上で，裏面を用いることができます。
- 問題用紙の印刷不鮮明，答案用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督員に知らせてください。
- 問題用紙の余白等は利用可能ですが，ホッチキスをはずしてはいけません。
- 試験終了後，答案用紙だけでなく，問題用紙，草案紙も回収します。

受験番号	
------	--

問1 微分方程式について以下の設問に答えなさい。

- (1) 以下の微分方程式の一般解を求めなさい。ただし、 $y = y(x)$ であり、 y' , y'' , y''' はそれぞれ1階, 2階, 3階の導関数とする。

(1-1) $(1+x)y' = 1+y$

(1-2) $xy' - y = x(1+2x^2)$

(1-3) $e^x + \cos y + (2y - x \sin y)y' = 0$

(1-4) $y''' - y'' + y' - y = 0$

(1-5) $y'' - 3y' + 2y = 2x + 20 \sin 2x$

- (2) 微分方程式の応用に関する以下の問いに答えなさい。

質量 m の物体が鉛直下向きに運動するとき、物体は重力 (重力加速度を g とする) ならびにその速度 v に比例する抵抗力 kv ($k > 0$) を受けるとする。時刻 $t=0$ において $v=0$ とするとき、 $v(t)$ を示しなさい。また十分に時間がたった後の速度 (終端速度) を示しなさい。なお物体が運動する距離は十分に長く終端速度に至るまで地面に到達することはないものとする。物体の加速度は速度の時間微分 $\frac{dv}{dt}$ であらわされるものとする。

- (3) 曲線群に関する以下の問いに答えなさい。

- (3-1) xy 平面上の点 $A(0,1)$, 点 $B(0,-1)$ と点 $P(x,y)$ において線分 AP と線分 BP の距離の比が一定となるような点 P の軌跡はアポロニウスの円と呼ばれる以下の円の曲線群の式 (i) になることを導きなさい。ただし、 C は任意定数とする。

$$x^2 + (y - C)^2 = C^2 - 1 \quad (i)$$

- (3-2) 曲線群 (i) の任意定数 C を消去して、1階の微分方程式を導きなさい。

- (3-3) 曲線群 (i) と直交する軌跡をあらわす曲線群の方程式を導きなさい。

問2 以下のベクトル解析に関する設問に答えなさい。ただし各設問において、 i, j, k はデカルト座標系 (x, y, z) における x, y, z の各方向の単位ベクトルとする。

- (1) 点 $P(-2, 1, t)$ と点 $Q(1, 1, 2)$ を結ぶ直線がベクトル $i - k$ と垂直、かつ二つのベクトル $i + sk$ および $sj + tk$ で張られる平面に平行となる時、実数 t, s を求めなさい。
- (2) スカラー関数 $\phi(x, y, z) = 2x^2 - 5y^2 - x - 6y + 5$ について、点 $P(1, -1, 0)$ における $v = 3i - 4j$ 方向の方向微分係数を求めなさい。また、点 P において方向微分係数が最大となる方向、および方向微分係数の最大値を答えなさい。
- (3) t を実数として、 $x^3 - 2xy + yz = t + 4$ であらわされる曲面 S を考える。点 $P(2, 1, t)$ における S の接平面が原点を通るとき、 t の値を求めなさい。
- (4) ベクトル関数 $A(t)$ は、 t に関する $A(t)$ および $|A(t)|$ の微分が可能であるとし、それぞれの導関数を $A'(t)$ および $|A(t)|'$ と記す。 $|A(t)| \neq 0$ のとき、以下の問いに答えなさい。

(4-1) $|A(t)|' = \frac{A(t) \cdot A'(t)}{|A(t)|}$ が成り立つことを示しなさい。

(4-2) $A(t) \times A'(t) = 0$ が成り立つとき、 $\frac{A(t)}{|A(t)|}$ が定ベクトルとなることを示しなさい。

- (5) 以下を求めなさい。ここで $r = xi + yj + zk$, $r = |r|$ であり、 $r \neq 0$ とする。

(5-1) $\nabla \cdot \left(\frac{r}{r^3} \right)$

(5-2) $\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right)$

- (6) 半球面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ を S とする。ベクトル場 $F = z^3i + xj + y^2k$ に対して以下を求めなさい。

$$\int_S \nabla \times F \cdot dS \quad (dS \text{ の向きは球面外向きを正とする})$$

問3 以下の複素関数に関する設問に答えなさい。ただし、 z は複素数であり、 i は虚数単位をあらわす。また、 $z = x + iy$ (x, y は実数)とする。

(1) 以下の (a) から (c) の空欄を埋めなさい。

(1-1) i^n は n を整数とするとき、(a) である。

(1-2) $\log(-2)$ の主値は、(b) である。

(1-3) 次の積分は、(c) である。

$$\oint_{|z|=2} \frac{(z-1)^2 + 2(z-1)^3}{(z-1)^3} dz$$

(2) $f(z) = \frac{z^*}{|z|^2}$ が、 $|z| = 0$ 以外で微分可能であることを証明しなさい。ただし z^* は z の複素共役をあらわす。

(3) 極座標系 $\mathbf{r} = (r, \theta, \phi)$ において、

$$(\nabla^2 + k^2) \Psi(\mathbf{r}) = \delta^3(\mathbf{r}) \quad (k \neq 0)$$

の自由空間における解は

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{k' \sin(k' r)}{k^2 - k'^2} dk'$$

となる。積分経路のとり方により $\Psi(\mathbf{r})$ の解は複数あるが、

$$G_0(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi r} \exp(ikr)$$

がその一つであることを示しなさい。

問4 以下の設問に答えなさい。

- (1) この設問での全ての関数は、 $t < 0$ で関数値が 0 であり、 $t \geq 0$ において区分的に連続な関数とする。また、そのラプラス変換は有界とする。 $f(t)$ のラプラス変換は次の形で定義する。以下の小問に答えなさい。

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (s: \text{複素数})$$

- (1-1) $\mathcal{L}[e^{at}]$ を求めなさい。ただし a は複素数とする。
 (1-2) $\mathcal{L}[\sin bt]$ を求めなさい。ただし b は実数とする。
 (1-3) $\mathcal{L}[\cos ct]$ を求めなさい。ただし c は実数とする。
 (1-4) 二つの関数 $f_1(t)$ と $f_2(t)$ の畳み込み積分 $(f_1 * f_2)(t)$ を

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

とする。このラプラス変換が次の関係を満たすことを示しなさい。

$$\mathcal{L}[(f_1 * f_2)(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] \mathcal{L}[f_2(t)]$$

- (1-5) 以下の方程式を満たす $f(t)$ を求めなさい。

$$\int_0^t f(\tau) e^{2(t-\tau)} d\tau = \sin t$$

- (2) 複素数値関数 $a(x)$ のフーリエ変換とその逆変換を、それぞれ、以下のように定義するとき、 $A(-k) = A^*(k)$ となるために必要な $a(x)$ の条件を示しなさい。ただし、 $A^*(k)$ は $A(k)$ の複素共役をあらわし、 x, k は実数とする。

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(x) e^{-ikx} dx, \quad a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{+ikx} dk$$

- (3) 区間 $x = [0, L], t = [0, \infty)$ を定義域とする実関数 $f(x, t)$ は次の偏微分方程式 (拡散方程式) と境界条件を満たす。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (D > 0) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x, 0) = \sin \frac{\pi}{L} x, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(x, t) = 0, \\ f(0, t) = 0, \quad f(L, t) = 0. \end{array} \right.$$

- (3-1) $f(x, t)$ を求めなさい。

- (3-2) (3-1) で求めた $f(x, t)$ は定義域内で $f(x, t) \geq 0$ であり、 $I(t) = \int_0^L f(x, t) dx$ は t の増加とともに減衰している。これは境界条件に起因する。物理的な例をあげ、 $I(t)$ が減衰する理由を示しなさい。

2024年4月入学・2023年10月入学

北海道大学大学院工学院

修士課程 入学試験

応用量子科学系研究室群

専門科目

(電磁気学, 材料科学, 原子物理・原子炉工学)

選択票

受験番号	
------	--

各科目3問、計9問のうち選択した3問に○を記入しなさい。

科目名	問1	問2	問3
電磁気学			
材料科学			
原子物理・原子炉工学			

2024年4月入学・2023年10月入学
北海道大学大学院工学院修士課程

機械宇宙工学専攻，人間機械システムデザイン専攻，
エネルギー環境システム専攻，量子理工学専攻

応用量子科学系研究室群

専門科目試験問題

電磁気学，材料科学，原子物理・原子炉工学

試験期日：2023年8月22日（火）

時 間：13:30～16:30

この問題用紙には計9問の問題が出題されています。3科目各3問の計9問から3問を選択し、解答してください。問題用紙以外には、答案用紙1組（3枚一組）と草案紙3枚を配布します。答案用紙それぞれは問題ごとに使用し、全てに科目名と問題の番号を明記してください。答案用紙のホッチキス止めをはずしてはいけません。

注 意 事 項

- 試験開始の合図があるまで、この問題用紙をひらいてはいけません。
- 携帯電話，スマートフォンは電源を切り，カバン等にしまってください。身につけてはいけません。また，時計のアラームも使用を禁止しますので音のならないように設定してください。
- 試験中，机には，受験票，鉛筆（黒），シャープペンシル（黒），消しゴム，鉛筆削り，眼鏡，および計時機能だけの時計，電卓以外を置くことはできません。
- 全ての答案用紙，草案紙の上欄に科目名，受験番号等を記入し，問題用紙にも受験番号を記入してください。
- 各問ごとの答案用紙が不足した場合は「裏面に続く」と明記した上で，裏面を用いることができます。
- 問題用紙の印刷不鮮明，答案用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督員に知らせてください。
- 問題用紙の余白等は利用可能ですが，ホッチキスをはずしてはいけません。
- 試験終了後，答案用紙だけでなく，問題用紙，草案紙も回収します。

受験番号	
------	--

科目名	電磁気学
-----	------

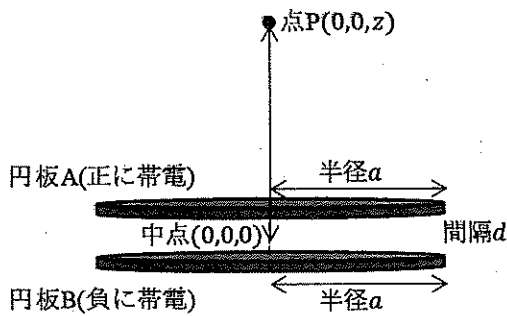
問1 帯電した円板が作る電界に関する以下の問いに答えなさい。

- (1) 下図のように、誘電率が ϵ_0 である真空中に、厚さが無視できる2つの円板(ともに半径 a)を正対させた場合を考える。円板間の間隔は d である。円板Aには正の電荷、円板Bには負の電荷を帯電させ、面電荷密度の絶対値が半径 r の関数で円板Aおよび円板Bともに以下のように分布しているとする。

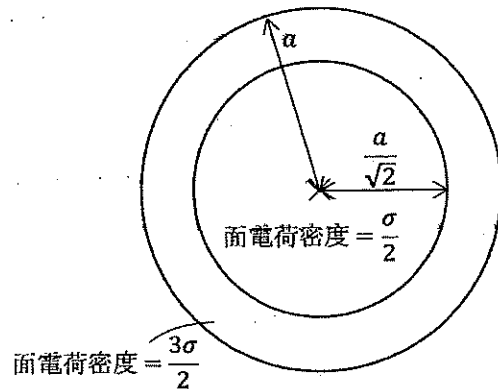
$$0 \leq r \leq \frac{a}{\sqrt{2}} \text{ のとき, 面電荷密度の絶対値 } \frac{\sigma}{2}$$

$$\frac{a}{\sqrt{2}} < r \leq a \text{ のとき, 面電荷密度の絶対値 } \frac{3\sigma}{2}$$

この場合の円板の中心軸(z 軸とする)に沿った位置の点Pにおける電場 \mathbf{E} 、および無限遠方を基準とした静電ポテンシャル V を求めなさい。ただし、円板Aの中心と円板Bの中心の中点を原点とし、点Pの座標を $(0, 0, z)$ とする。



全体図



面電荷密度の絶対値の分布

- (2) 以上で求めた式を用いて、半径 a 、間隔 d がともに距離 z に比べて非常に小さい場合の点Pにおける静電ポテンシャルが

$$V = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 z^2}$$

となることを示しなさい。ただし、円板A、Bの持つ電荷をそれぞれ Q 、 $-Q$ とする。

問2 中心軸が z 軸で厚さが無視できる半径 a の帯電円板が二枚あり、それぞれの中心位置を $z = \pm d/2$ とする。この中心位置の z 座標の正負 (\pm) に対応して次式のように正・負に帯電し、 z 軸の周りの回転角周波数も $\pm\omega$ (複号同順) である場合に以下の小問に答えなさい。

$$\text{面電荷密度: } \sigma_{\pm}(R) = \begin{cases} \pm \frac{1}{2} \sigma_0, & 0 \leq R \leq \frac{a}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{3}{2} \sigma_0, & \frac{a}{\sqrt{2}} < R \leq a \end{cases}$$

ただし、 R は円板の中心である z 軸からの距離を表す。

- この正負に帯電した回転円板のそれぞれの電荷 Q_+ および Q_- を求めなさい。
- この回転円板系の全電流を求めなさい。
- この回転円板系の全磁気モーメントを求めなさい。
- この回転円板系の z 軸上の磁場 $H_z(0, 0, z)$ を求めなさい。

ただし、 $z=0$ の平面に置かれ、原点を中心とする半径 b の円形コイルに電流 i が流れているとき、このコイル電流が中心軸 (z 軸) 上に作る磁場が z 成分のみで次式で与えられることを利用してもよい。

$$H_z(0, 0, z) = \frac{b^2 i}{2(z^2 + b^2)^{3/2}}$$

問3 以下の問いに答えなさい。

(1) 図3-1に示すように、一様な磁束密度 B の磁場中（磁場の方向は紙面裏側から表側）に、高さ a 、幅 b の凸形状部を有する導線（導線A）が、U字路導線上に置かれている。U字路導線は2本の平行導線部を有し、紙面と平行な面内にある。導線AとU字路導線は点P、Qで接しており、辺OP、RQの長さは d 、 $RQ//OP$ である。直線PQを軸に角速度 ω で導線Aを等速回転させた。導線AとU字路導線で作られる閉回路に発生する誘導起電力を求めよ。ただし $a < d$ 、 $b < c$ であり、時刻 $t=0$ において導線AはU字路導線と同一面内にあり、凸形状部は、閉回路部に対して外側に凸である。

(2) 図3-2に示すように図3-1の導線Aを取り除き、新たに导体棒（質量 M 、電気抵抗 R ）をU字路導線上に辺ROと平行に置いた。さらに辺ROの一部を起電力 E の直流電源（内部抵抗は無視できる）とスイッチ S に置き換えた。导体棒を動かさないように固定した状態でスイッチ S を閉じると、导体棒には電流 $I(t)$ が流れた。 t は時刻であり、 $I(t)$ が作る磁場は無視できるものとする。初期電流 $I(0)=E/R$ となるようにした後、 $t=0$ で导体棒の固定を解除すると、导体棒は速度 $v(t)$ でU字路導線上を、辺ROから遠ざかる方向に滑らかに動き出した。导体棒とU字路導線間の摩擦、U字路導線の電気抵抗は無視できるものとする。以下の(a)-(d)の設問に答えなさい。

(a) 导体棒を流れる電流 $I(t)$ に磁場が及ぼす力（ローレンツ力）の大きさ $F(t)$ は

$$F(t) = I(t)Bc$$

となることを用いて、导体棒についての運動方程式を示しなさい。

(b) 导体の動きに伴い発生する誘導起電力に留意し、U字路導線と导体棒で作る閉回路における起電力 E 、誘導起電力、および导体棒に生じる電圧の間の関係を示しなさい。

(c) $I(t)$ 、 $v(t)$ を求めなさい。

(d) $I(t)$ 、 $v(t)$ の時間変化をグラフとして示しなさい。ただしU字路導線の平行導線部は十分に長いとして、 $I(t)$ 、 $v(t)$ の取りうる値の範囲について明記すること。

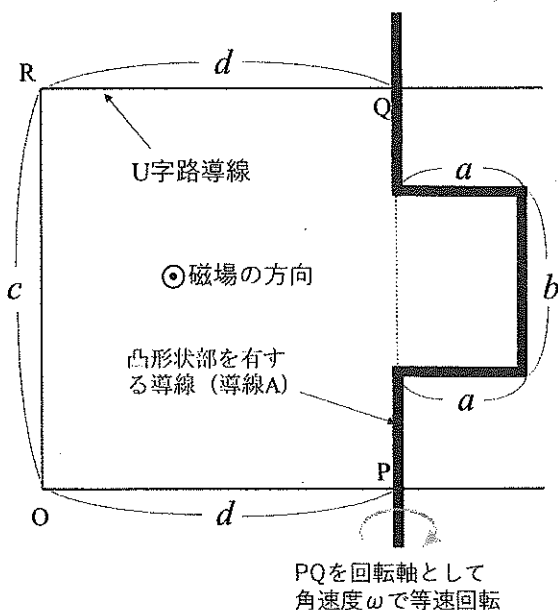


図3-1

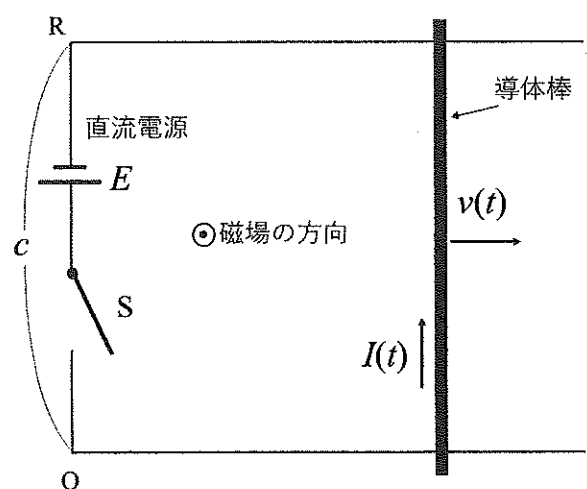
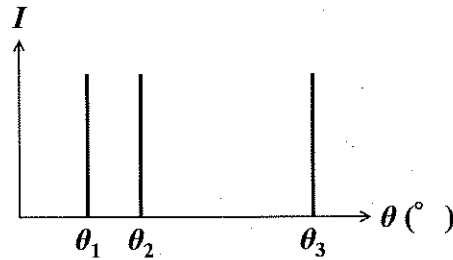


図3-2

問1 ある純金属の粉末 X 線回折パターンを測定したところ、以下の図のような X 線散乱強度 I のピークが得られた。このパターンより、この試料の結晶構造は面心立方格子であることがわかった。これに関して、以下の問いに答えなさい。



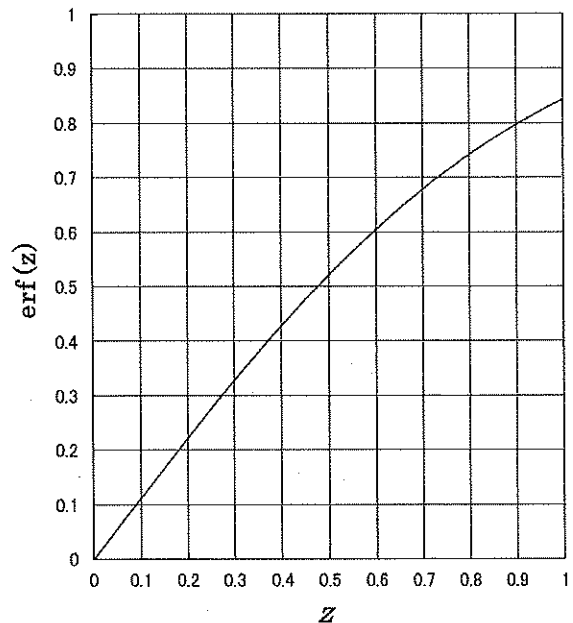
- (1) 格子定数を a (nm) として、3次元の単位格子を図示しなさい。また、配位数を答えなさい。
図示の際は実空間の直交座標系を用い、格子定数と原子のサイト占有位置を明記しなさい。
- (2) モル質量が 64 (g mol^{-1}) である試料の単結晶の密度は 9 (g cm^{-3}) であった。これらの情報を用いて、この面心立方格子の格子定数 a (nm) を小数点以下3桁 (小数点以下4桁目を四捨五入) まで答えなさい。ただし、アボガドロ定数を 6.022×10^{23} (mol^{-1}) とする。
- (3) (111)面に垂直な方向のミラー指数 $[uvw]$ について、 u , v , w 間の大きさの関係を答えなさい。
- (4) (3) の方向に垂直な方向のミラー指数を一つ答えなさい。また、そのように答えた数学的根拠を述べなさい。
- (5) $\{111\}$ に等価な面を全て答えなさい。ただし、平行な面は同一面として一方のみを答えなさい。
- (6) 結晶構造因子 $F_{hkl} = \sum_n f_n \exp[2\pi i (h x_n + k y_n + l z_n)]$ を考える。ここで \sum_n は n に関する総和を意味し、 f_n は単位胞内の n 番目の原子サイトの原子散乱因子、 i は虚数単位、 (hkl) は結晶格子面のミラー指数、 (x_n, y_n, z_n) はサイト n に関する格子定数で規格化された座標 (規格化されているため 0 以上 1 以下の値を取る) である。ただし、純金属では f_n は全サイトの原子が同じ値 (f) となることに注意しなさい。面心立方格子において、この結晶構造因子に寄与する4つのサイト $n=1, 2, 3, 4$ の規格化された原子座標 (x_n, y_n, z_n) を全て答えなさい。
- (7) 粉末 X 線回折におけるブラッグ散乱の回折ピーク強度 I_{hkl} と結晶構造因子 F_{hkl} の大きさの関係を述べなさい。ただし、ここでは多重度、温度因子、偏光因子、選択配向、吸収、装置分解能といった複雑な効果や影響を考慮しなくて良い。
- (8) 面心立方格子におけるブラッグ散乱の回折ピークが消滅しない h, k, l の回折条件を理由と共に説明しなさい。また、回折ピークが消滅しない時の結晶構造因子 F_{hkl} の値を答えなさい。解答の際は根拠となる計算過程を示しなさい。なお、原子散乱因子を f とする。
- (9) 波長 $\lambda = 0.154$ (nm) の X 線をこの純金属粉末試料に入射させた。この時に観測される回折ピークのブラッグ角 (入射光ならびに回折光が結晶面となす角) θ ($^\circ$) を最も小さいものから順に3つ ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$)、小数点以下1桁 (小数点以下2桁目を四捨五入) まで答えなさい。

問2 鉄単体の立方体試料の一面が炭化水素系のガスに接触し、高温条件下で炭素原子が試料内部に拡散する現象を考える。このとき、試料表面の炭素濃度が実験期間中一定であり、試験期間中に炭素は試料の中心部に到達しないと仮定した場合、試料中の炭素濃度は次式で与えられる。

$$\frac{C_s - C_x}{C_s - C_0} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

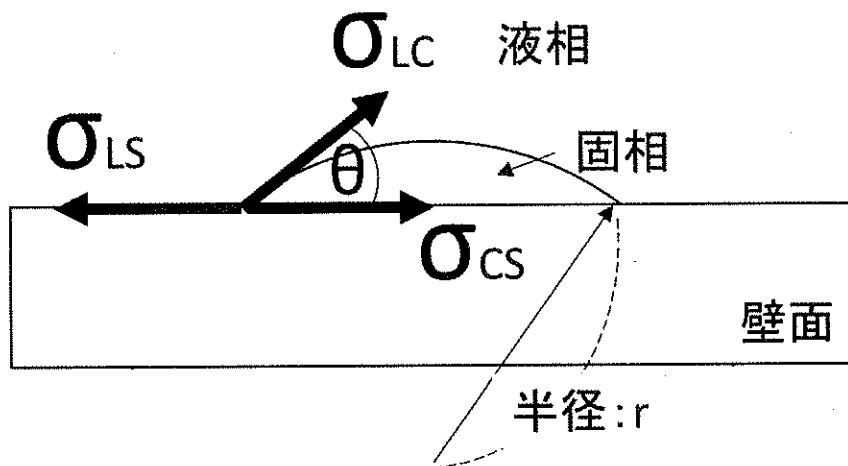
ここで、 C_s :試料表面の炭素濃度(wt%)、 C_0 :試料の初期炭素濃度(wt%)、 C_x :試料表面から深さ x (m) の位置における炭素濃度(wt%)、 t :拡散時間(s)、 D :純鉄試料中の炭素の拡散係数($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)である。以下の問いに答えなさい。

- (1) 拡散時間が t_0 , t_1 , t_2 の時の試料中の炭素の濃度分布例をそれぞれ図示しなさい。ただし、 $t_2 > t_1 > t_0 = 0$ としなさい。また、横軸は試料表面から深さ方向への距離(m)、縦軸は炭素濃度(wt%) としなさい。
- (2) 試料(初期炭素濃度 0 wt%)に、試料表面の炭素濃度が 2 wt%の状態に炭素を 5 時間拡散させたところ、拡散温度が 1000 °Cでは表面より深さ 0.9 mm の位置で炭素濃度が 1 wt%となった。また、1200 °Cでは表面より深さ 1.9 mm の位置で炭素濃度が 1 wt%となった。それぞれの温度における拡散係数を求め、その計算過程も含めて解答しなさい。ただし、誤差関数は右の図から読み取った値を用いて良い。
- (3) (2) の結果をもとに、拡散の活性化エネルギーを求め、その計算過程も含めて解答しなさい。ただし、この温度範囲では活性化エネルギーは一定であると仮定して良い。
- (4) (2) および (3) の結果をもとに、1100 °C で炭素を純鉄試料中に拡散させた際に、深さ 2 mm の位置で炭素濃度が 1 wt%に到達する時間を求め、その計算過程も含めて解答しなさい。
- (5) 炭素の拡散係数および活性化エネルギーを 600~800 °Cの温度範囲で同様に決定したところ、1000~1200 °Cの温度範囲における結果と異なった。純鉄は 911 °Cで bcc (低温側) から fcc (高温側) に結晶構造が変化すること、また鉄中に炭素原子は侵入型で固溶すると考えた上で、この原因を説明しなさい。



問3 以下の設問(1)および(2)の両方に対して解答しなさい。

- (1) C 種の元素からなる p 個の相を有する合金の平衡状態における Gibbs の相律を導出しなさい。その際には変数の個数と拘束条件の数を考えて説明しなさい。
- (2) 容器に入った液体をゆっくり冷却し、固相を得た。凝固の過程を注意深く観察すると液相中だけでなく、容器の壁面からもドーム状の固相が生成していることがわかった。下図は、壁面に生成し、成長しつつある固相を模式的に記した。 θ は接触角、 σ_{LC} 、 σ_{LS} 、 σ_{CS} は、それぞれ液相と固相の界面張力、液相と容器壁面の界面張力、固相と容器壁面の界面張力である。以下の問いに答えなさい。



- (2-1) 冷却速度(単位時間あたりの温度低下)を速くしたところ、融点を過ぎてても凝固が開始せず、融点以下のある温度に達したところで凝固を開始した。この現象を何というか答えなさい。また、この際の冷却曲線を凝固終了後、十分な時間が経過したところまで示しなさい。
- (2-2) 3つの界面張力(σ_{LC} 、 σ_{LS} 、 σ_{CS})の関係式を答えなさい。
- (2-3) 壁面上に固相が形成することによる系の自由エネルギー変化 ΔG を以下のパラメータを用い、正負の符号に注意して、記述しなさい。
 V : 固相の体積、 ΔG_v (液相と固相の単位体積あたりの自由エネルギー差の絶対値)、
 A_{CS} : 固相と壁面との界面積、 A_{LC} : 固相と液相との界面積、
 σ_{CS} のスカラ一量: 固相と壁面との単位面積あたりの界面自由エネルギー
 σ_{LC} のスカラ一量: 固相と液相との単位面積あたりの界面自由エネルギー
 σ_{LS} のスカラ一量: 液相と壁面との単位面積あたりの界面自由エネルギー
ここで、 ΔG_v 、 σ_{CS} 、 σ_{LC} 、 σ_{LS} はいずれも正の値であり、液相と壁面との界面積は固相の形成により、 A_{CS} だけ減少していることに注意しなさい。
- (2-4) ドーム状の固相が半径 r の球欠(球の一部)であると仮定すると、 A_{CS} 、 A_{LC} 、 V はそれぞれ以下のように与えられる。(2-2)、(2-3)および以下の式を使って整理すると ΔG が(1)および(2)式で表せることを示しなさい。

$$A_{CS} = \pi r^2 \sin^2 \theta$$

$$A_{CL} = 2 \pi r^2 (1 - \cos \theta)$$

$$V = \pi r^3 \frac{(2 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)^2}{3}$$

$$\Delta G = \left\{ -\frac{4}{3} \pi r^3 \Delta G_V + 4 \pi r^2 \sigma_{LC} \right\} f(\theta) \quad (1)$$

$$f(\theta) = \frac{(2 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)^2}{4} \quad (2)$$

- (2-5) ΔG は液相中に固相が核生成する際のエネルギー障壁である。このことをふまえ、壁面で固相が生成する方が液相中で半径 r の固相が形成するより容易であることを(1)および(2)式を使って説明しなさい。また、(2-1)で解答した現象と接触角 θ との関係についても述べなさい。

問1 以下の問いに答えなさい。

- (1) 速度 v_L で運動する質量 m の中性子と、静止している質量 M の原子核との弾性衝突を考え、衝突後の中性子及び原子核の速度をそれぞれ v_L' 、 V_L' とする。また、 $A = M/m$ とし、 M は m の整数倍であるとする。

- (1-1) この系の重心の速度 v_{CM} は $\frac{1}{1+A}v_L$ と与えられる。重心系における衝突前の中性子の速度 v_c を、 v_L を用いて書きなさい。

- (1-2) 重心系での散乱後の中性子の速度を v_c' としたとき、 $|v_c'| = |v_c|$ が成り立つ。重心系における散乱角 (v_c と v_c' がなす角) が θ であったとき、以下の式が成り立つことを証明しなさい。

$$|v_L'|^2 = \frac{A^2 + 1 + 2A\cos\theta}{(A+1)^2} \cdot |v_L|^2$$

- (1-3) 衝突前後の中性子の運動エネルギーを E_i 、 E_f としたとき、以下の式を導出しなさい。

なお、 $\alpha = \frac{(A-1)^2}{(A+1)^2}$ とする。

$$E_f = \frac{(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos\theta}{2} \cdot E_i$$

- (1-4) この弾性衝突により中性子が最もエネルギーを失うときの E_f 、 M 、及び θ を答えなさい。

- (2) 拡散距離 L が同一で中性子無限増倍率 k が異なる2種類の核燃料を考える。これらが一様に装荷された球形の原子炉A、Bがいずれも臨界であったとし、原子炉Aの半径は原子炉Bの半径の2倍であったとする。原子炉A、Bに装荷された核燃料の中性子無限増倍率をそれぞれ k_A 、 k_B としたとき、これらの中に成り立つ式を答えなさい。なお、核燃料の材料バックリングは $\frac{k-1}{L^2}$ 、半径が R の球形の原子炉の形状バックリングは $\left(\frac{\pi}{R}\right)^2$ と与えられるものとする。

- (3) 均質の核燃料が一様に装荷された、体積が一定の円筒の原子炉について、中性子実効増倍率が最大となるときの半径と高さの比を答えなさい。なお、半径が R 、高さが X の円筒の原子炉の形状バックリングは $\left(\frac{2.4}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{X}\right)^2$ と与えられるものとする。

- (4) 軽水型原子炉(軽水炉)では、主に低速の中性子(熱中性子)を核分裂反応に利用する。

軽水炉において、核分裂反応によって発生した多数の高速中性子は、種々の物理過程によりその数を増減させ、新たな核分裂反応を誘起する。この過程を簡易的に記述するものとして四因子公式があり、そこで用いられる因子として、高速核分裂因子、共鳴を逃れる確率、熱中性子利用率、中性子再生率がある。この各々について説明せよ。また、六因子公式においてこれら四因子とは別に導入される2つの因子について説明せよ。

問2 図1のように、加熱された半径 R の円管内に流体を一様な速度 u_B で流入させるものとする。ここで、流れに沿った方向での位置を x 、円管の中心軸からの距離を r とした座標系を設定する。以降では、十分に発達した層流条件での時間的に定常な速度分布および温度分布を考えるものとする。このとき、速度分布、および管壁の温度 T_W と流体の混合平均温度 T_B の温度差で無次元化した無次元温度分布 θ は r のみに依存する。流体の温度を T 、速度の x 方向成分を u 、 r 方向成分を v 、圧力を p とする。また、流体の密度を ρ 、粘性係数を μ 、比熱を C 、熱伝導率を k 、流体と円管壁の熱伝達係数を h とし、これらは一定とする。以下の問いに答えなさい。

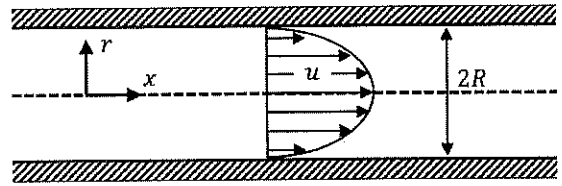


図1. 円管内の十分に発達した流れ

- (1) この座標系における非圧縮性流体の運動量の x 方向成分の式、エネルギーの式は、それぞれ式(1)、式(2)で与えられる。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right) \quad (1)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{k}{\rho C} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) \quad (2)$$

これらの式に対し、十分に発達した円管内の流れで成立する境界層近似を適用し、以下の式(1)'および式(2)'を導出しなさい。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (1)'$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{k}{\rho C} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (2)'$$

- (2) 式(1)'を解いて、 u を R 、 r 、 $\frac{dp}{dx}$ 、 μ を用いて表しなさい。ただし、境界条件は、 $\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0$ および $u(r=R) = 0$ とする。

- (3) 円管内の流体の断面平均速度は、 $u_B = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r u dr$ で計算される。 u を u_B 、 R 、 r を用いて表しなさい。

- (4) 円管の内壁が等熱流束壁条件を考える。熱流束は $q = h(T_W - T_B)$ である。 $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T_B}{\partial x} = \frac{2q}{\rho C u_B R}$ が

成り立つとき、式(2)'を無次元温度 $\theta = \frac{T - T_W}{T_B - T_W}$ 、 $\eta = \frac{r}{R}$ 、ヌセルト数 $Nu_R = \frac{hR}{k}$ を用いて表しなさい。

- (5) (4)で導出した式を解いて、 θ を η , Nu_R を用いて表しなさい。ただし、境界条件は、 $\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0$ および $\theta(\eta=1) = 0$ とする。
- (6) 混合平均温度から、 $2 \int_0^1 \theta \frac{u}{u_b} \eta d\eta = 1$ が成立する。この計算式を用いて、等熱流束壁条件下でのヌセルト数 Nu_R を小数点以下第2位まで答えなさい。
- (7) 等温壁の条件での円管内の十分に発達した層流のヌセルト数 Nu_R は 1.83 である。加熱条件以外の円管や流体の条件が同一の場合、等熱流束壁条件の熱伝達係数は、等温壁条件の熱伝達係数の何倍になるか。小数点以下第2位まで答えなさい。

問3 以下の文章を読んだうえで、それに続く問いに答えなさい。

ラザフォードは1919年、窒素ガス中にα線を入射すると、酸素と①が発生する下記の人工的核反応を発見した。さらに、ホウ素、フッ素、アルミニウム、塩素などの軽元素にα線を当てると①が発生することを確認した。

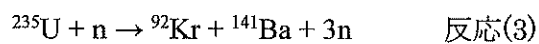


1934年、ジョリオ・キュリー夫妻は、同様にアルミニウムにα線を当てると、α線源を取り除いた後も③の放出がしばらく続くことを発見し、化学分析により下記の反応が生じることを発見した。

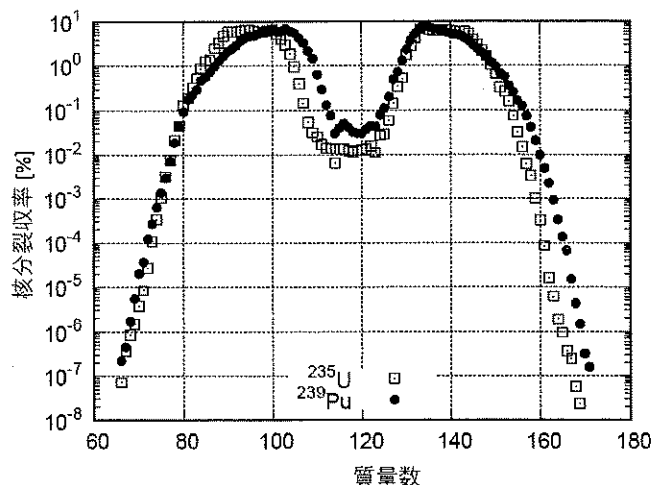


この反応で発生した³⁰Pは半減期2.498分で⑤壊変し、③が放出され³⁰Siが生成する。放出された③は、運動エネルギーを主に周辺にある原子との⑥相互作用により失い、最終的に電子と再結合する。その際、⑦MeVの光子が2本、⑧度方向に同時に放出される。この光子を⑨と呼ぶ。

さらに、1938年、ハーンとストラスマンは天然ウランに中性子を照射すると放射性物質が生成することを見出した。彼らは当初、生成したのはラジウムと考えていたが、生成した放射能がバリウム起因である事を突き止め、クリプトンの放射性同位体と同一の半減期を有する放射性核種の存在を示した。その後、天然存在比0.72%の²³⁵Uが下記の反応を起こしていることが分かった。



この反応を核分裂反応と呼び、右図に示すように質量数90~105と135~145程度の2つの⑩に分裂する確率が高い。核分裂反応によって生じる⑩の割合を核分裂収率という。



- (1) 上の文章中の空欄①～⑩にあてはまる言葉，記号，数値を答えなさい。
- (2) ラザフォードが見出した反応(1)が生じるために必要な α 線のしきいエネルギーを有効数字3桁で答えなさい。 ^{14}N ， ^{17}O ， ^1H ， ^4He の静止質量は，それぞれ，14.00307 u，16.99913 u，1.00782 u，4.00260 uである。ただし，1 u = 931.5 MeV とする。
- (3) 反応(2)により発生した直後の ^{30}P の放射能を測定したところ 100 MBq であった。このときの ^{30}P の質量を有効数字3桁で答えなさい。簡単のため， ^{30}P は瞬時に生成したものとする。
- (4) ^{30}P の壊変に伴い発生する光子を遮蔽するため，周囲を厚さ 2 cm の鉛で囲った。鉛と相互作用を起こさずに遮蔽の外に出てくる光子の割合を有効数字3桁で答えなさい。鉛の原子番号は 207 であり，この光子に対する相互作用の反応断面積を $52.1 \times 10^{-28} \text{ m}^2$ ，密度を 11.34 g/cm^3 とする。
- (5) ^{235}U の核分裂反応では平均 200 MeV のエネルギーと平均 2.5 個の中性子が放出される。熱出力 3 kW の原子炉で毎秒あたりに発生する中性子の個数を有効数字3桁で答えなさい。
- (6) 1 回の核分裂反応により，崩壊定数が λ_A である原子核 A が平均で γ 個発生するものとする。この核分裂反応が単位時間あたり R 回発生するとしたとき，原子核 A の時刻 t における個数 $N_A(t)$ を答えなさい。なお， $N_A(0) = 0$ とする。
- (7) (6)で発生した原子核 A が崩壊すると，崩壊定数が λ_B である原子核 B に壊変するものとする。 $t \rightarrow \infty$ としたとき，原子核 B の個数を答えなさい。なお，原子核 B は核分裂反応では発生しないものとする。