

北海道大学大学院工学院修士課程

機械宇宙工学専攻，人間機械システムデザイン専攻，
エネルギー環境システム専攻，量子理工学専攻

機械・宇宙航空工学系研究室群

試験問題

材料力学，機械力学・制御工学

試験日：令和5年8月22日（火）

時間：9：00～12：00

「材料力学」，「機械力学・制御工学」とともに問1および問2の両方を解答せよ。
なお，各問は別の答案用紙に解答し，問の番号を明記せよ。

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで問題用紙の中を見てはいけません。
2. 携帯電話，スマートフォンは電源を切りなさい。時計のアラームも使用してはいけません。
3. 受験中，机上には受験票，鉛筆（黒），シャープペンシル（黒），消しゴム，鉛筆削り，眼鏡，計時機能だけの時計および電卓以外は置くことができません。
4. 答案用紙，草案紙上欄に科目名，問の番号（答案用紙のみ）および受験番号を記入しなさい。なお，専攻名は記入不要です。また，問題用紙下欄に受験番号を記入しなさい。
5. 答案用紙は裏面を用いても構いません。ただし「裏面に続く」と明記しなさい。
6. 問題用紙の印刷不鮮明，答案用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督員に申告しなさい。
7. 問題用紙の余白は利用しても構いませんが切り離してはいけません。
8. 試験終了後，問題用紙，答案用紙および草案紙はすべて提出しなさい。

受験番号	
------	--

問1および問2の両方を解答しなさい。

なお、各問は別の答案用紙に解答し、問の番号を明記しなさい。

問1 図1(a)に示すように半径 r 、長さ L の丸棒の一端を固定し、他端に引張荷重 P 、トルク T を作用させた。引張荷重 P とトルク T の間に $P=4T/r$ の関係が成り立つとき、丸棒の縦弾性係数を E 、横弾性係数を G として、以下の問いに答えなさい。

- (1) 丸棒の断面二次極モーメントが $\pi^4/2$ となることを示しなさい。
- (2) 丸棒の伸びとねじれ角をそれぞれ求めなさい。
- (3) 丸棒の軸応力と丸棒側面のせん断応力をそれぞれ求め、それらの関係をモールの応力円で示しなさい。
- (4) 丸棒側面のせん断応力を τ として、最大主応力と最大せん断応力の大きさをそれぞれ表しなさい。また、最大主応力の方向（引張荷重の方向からの角度）を求めなさい。
- (5) 図1(b)のように、トルク T のみを作用させた場合、最大主応力の大きさが図1(a)と変わらないような丸棒の半径を r^* とする。このとき、 $(r^*/r)^3$ の値を求めなさい。

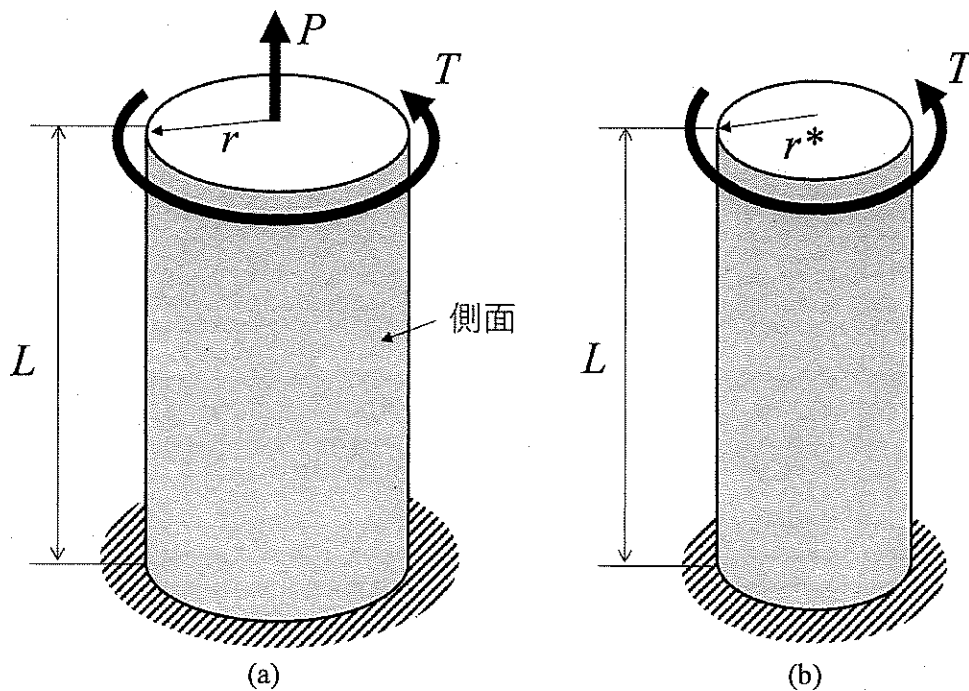


図1

問2 図2に示すように、縦弾性係数が E 、横断面が幅 b 、高さ h の長方形である真直はりを点 A および点 B で単純支持し、スパン L の中央に曲げモーメント M を作用させた。

- (1) 単純支持点 A における反力を求めなさい。
- (2) この真直はりの断面二次モーメントを求めなさい。
- (3) この真直はりの断面二次モーメントを I としてたわみ曲線を求めなさい。さらに、その概形を図示しなさい。

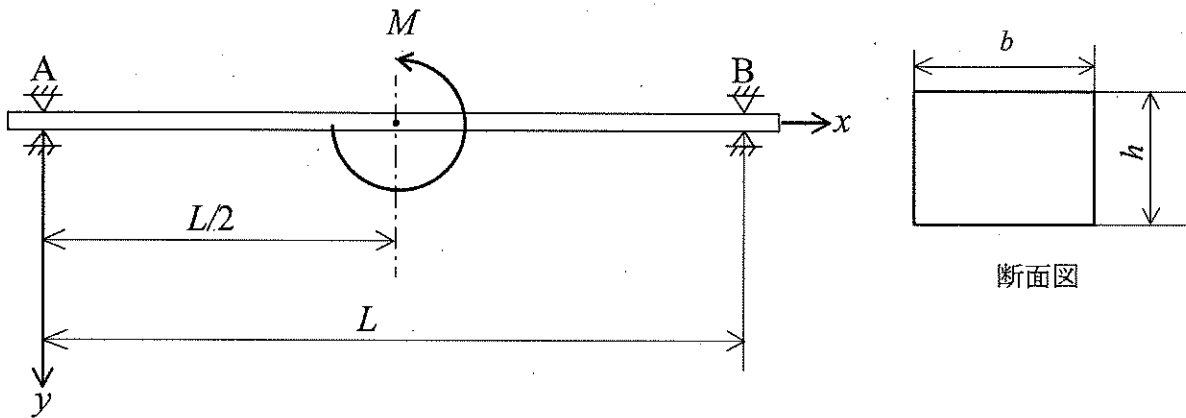


図2

次に、図3に示すように、図2のはりの下半分を縦弾性係数が E' のはり要素に置き換えて積層はりとした。ただし、 $E < E'$ である。

- (4) この積層はりの上面から中立軸までの距離 y_0 を求めなさい。
- (5) y_0 を用いて、この積層はりの曲げ剛性を表しなさい。

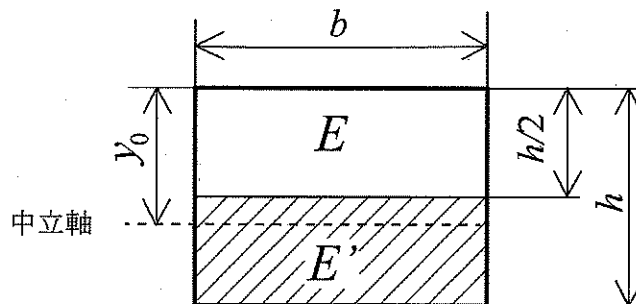


図3

問1 および問2の両方を解答しなさい。

なお、各問は別の答案用紙に解答し、問の番号を明記しなさい。

問1 次の(1)および(2)に答えなさい。

(1) 図1のように、質量 $3m$ 、長さ l_1 の細長く一様な剛体棒があり、右端に質量 m の質点を取り付けられ、左端は回転支持されている。また、回転支点から距離 l_1 および l_2 の位置において、ばね定数 k_1 および k_2 のばねがそれぞれ鉛直方向に配置され、床および天井に接続されている。棒は図1のように水平の状態できっ合っている。ここで、棒の右端を鉛直方向に微小変位させ、静かに手を離すと棒は振動を始めた。回転角を θ 、重力加速度を g 、振動の振幅は十分に小さいとして以下の問いに答えなさい。

(1-1) 回転支持まわりの系の慣性モーメントを求めなさい。

(1-2) 系の運動方程式を求めなさい。

(1-3) 系の運動の固有振動数を求めなさい。

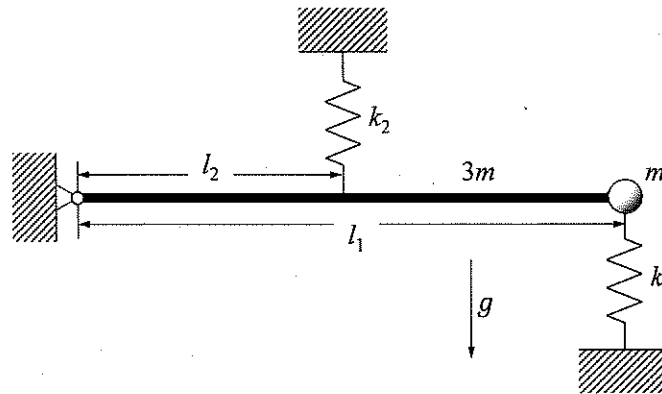


図1

(2) は次ページに記されている。

(2) 図2のように、質量 m 、半径 r の一様な円板1と円板2がある。2つの円板の中心 O_1 および O_2 において、ばね定数 k の3本のばねが水平方向に配置され、両側のばねは両端の壁にそれぞれ接続している。ばねは自然長の状態であり、2つの円板は下端において摩擦のある床（すべりなし）と接触し静止している。座標軸 x_1 および x_2 を図2のように定義する。ここで、2つの円板の中心 O_1 および O_2 の水平方向にそれぞれ異なる変位を与え静かに手を離すと、2つの円板は回転をしながら水平方向に運動を始めた。以下の問いに答えなさい。

(2-1) 円板1の回転角を θ_1 とした時、 θ_1 を x_1 を用いて表しなさい。

(2-2) この系の運動エネルギー T およびポテンシャルエネルギー U をそれぞれ求めなさい。

(2-3) 円板1と円板2の運動方程式をそれぞれ求めなさい。

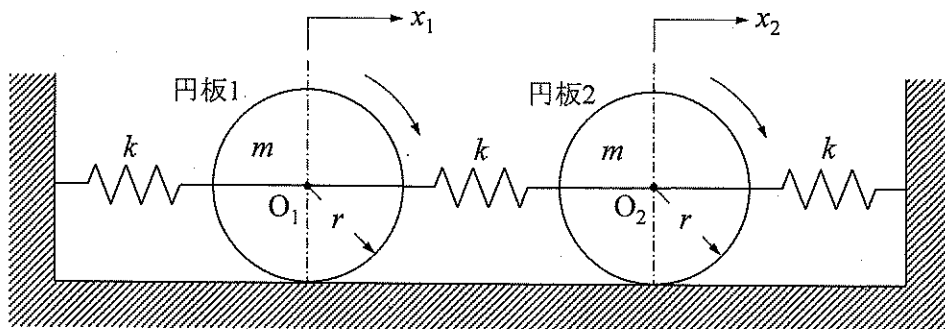


図2

問2 次の(1)および(2)に答えなさい。

(1) 図3および図4に示すようなフィードバック制御系を考える。図中の $R(s)$, $Y(s)$ および $E(s)$ は、それぞれ入力 $r(t)$, $y(t)$ および偏差 $e(t)$ のラプラス変換である。以下の問いに答えなさい。ただし、図3に示す系の単位ステップ応答 $y(t)$ は次式で与えられる。

$$y(t) = (1 + 2e^{-2t} - 3e^{-3t})$$

- (1-1) 図3に示すシステムの $R(s)$, $Y(s)$ を、ラプラス演算子 s の関数として求めなさい。ただし、入力 $r(t)$ は単位ステップ入力とする。
- (1-2) (1-1)の結果を用いて、閉ループ伝達関数 $G(s)$ を求めなさい。
- (1-3) (1-1) および (1-2) の結果を用いて、開ループ伝達関数 $L(s)$ を求めなさい。
- (1-4) $G(s)$ について、ボード線図の概略図を折れ線近似によって描きなさい。なお、周波数の範囲を $0.1 \text{ rad/s} \sim 100 \text{ rad/s}$ とし、周波数軸は対数目盛としなさい。
- (1-5) 図4に示すシステムにおいて、 $r(t)$ を単位ステップ入力とするとき、出力 $y(t)$ と $r(t)$ の定常偏差が 0.1 となる定数 K を求めなさい。なお、 $L(s)$ は (1-3) で求めたものと同一であるものとする。また、このとき閉ループ系が安定であることを示しなさい。

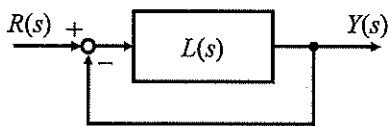


図3

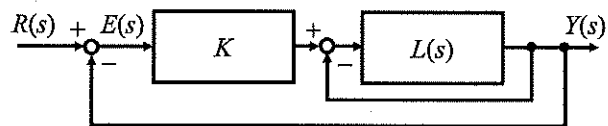


図4

(2) は次ページに記されている。

(2) 微分方程式

$$\ddot{x}(t) - 4\dot{x}(t) + 3x(t) = u(t)$$

で表されるシステムについて、以下の問いに答えなさい。

- (2-1) 入力を $u(t)$, 出力を $x(t)$ として、微分方程式をラプラス変換して伝達関数を求めなさい。
- (2-2) $x(t) = x_1(t)$, $\dot{x}(t) = x_2(t)$ として、このシステムの状態方程式を示しなさい。ただし、状態ベクトル $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, 入力 $u(t)$ を用いなさい。
- (2-3) 非制御時の極を求め、システムの安定性を判別しなさい。そして、このシステムに状態フィードバック $u(t) = -[f_1 \ f_2] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ を適用し、閉ループ系の極を $(-1+j4)$ と $(-1-j4)$ に配置するためのフィードバックゲイン $[f_1 \ f_2]$ を求めなさい。

北海道大学大学院工学院修士課程

機械宇宙工学専攻, 人間機械システムデザイン専攻,
エネルギー環境システム専攻, 量子理工学専攻

機械・宇宙航空工学系研究室群

試験問題

流体力学, 熱力学

試験日: 令和5年8月22日(火)

時間: 13:30~16:30

「流体力学」, 「熱力学」とともに問1および問2の両方を解答せよ.
なお, 各問は別の答案用紙に解答し, 問の番号を明記せよ.

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで問題用紙の中を見てはいけません.
2. 携帯電話, スマートフォンは電源を切りなさい. 時計のアラームも使用してはいけません.
3. 受験中, 机上には受験票, 鉛筆(黒), シャープペンシル(黒), 消しゴム, 鉛筆削り, 眼鏡, 計時機能だけの時計および電卓以外は置くことができません.
4. 答案用紙, 草案紙上欄に科目名, 問の番号(答案用紙のみ)および受験番号を記入しなさい. なお, 専攻名は記入不要です. また, 問題用紙下欄に受験番号を記入しなさい.
5. 答案用紙は裏面を用いても構いません. ただし「裏面に続く」と明記しなさい.
6. 問題用紙の印刷不鮮明, 答案用紙の汚れ等に気付いた場合は, 手を挙げて監督員に申告しなさい.
7. 問題用紙の余白は利用しても構いませんが切り離してはいけません.
8. 試験終了後, 問題用紙, 答案用紙および草案紙はすべて提出しなさい.

受験番号	
------	--

問1および問2の両方を解答しなさい。

なお、各問は別の答案用紙に解答し、問の番号を明記しなさい。

問1

図1のように円筒形のボトルを逆さにして水を高さ H まで入れた。上部は大気圧 P_a に開放されている。上部の直径は d_1 、ノズルの直径は d_2 で、初期にはノズルの先端は栓で閉じられている。水の密度 ρ 、重力加速度 g はそれぞれ一定とし、以下の問いに答えなさい。

- (1) ノズル内の先端に作用する圧力を求めなさい。
- (2) ノズルの栓を外したときにノズルから噴出する水の流速を u_2 とする。ボトル内の水面が降下する速度 u_1 を、 u_2 を使って記しなさい。
- (3) ベルヌーイの定理を使い、水面が高さ H にあるときの水の噴出速度 u_2 を求めなさい。なお損失は無視して良い。
- (4) 栓を外したあとは水の噴出により水面の高さが時間 t とともに減少していく。このとき水面の高さを $h(t)$ とすれば、 $u_1 = -dh/dt$ で与えられる。(3) の答えを使って、水面とノズル先端の間で成立する連続の式を、 h に関する微分方程式として表しなさい。
- (5) (4) で記した微分方程式から、水面の高さが H の半分になるまでの所要時間を求めなさい。ただし水面は直径 d_1 のボトル本体部に留まるとする。

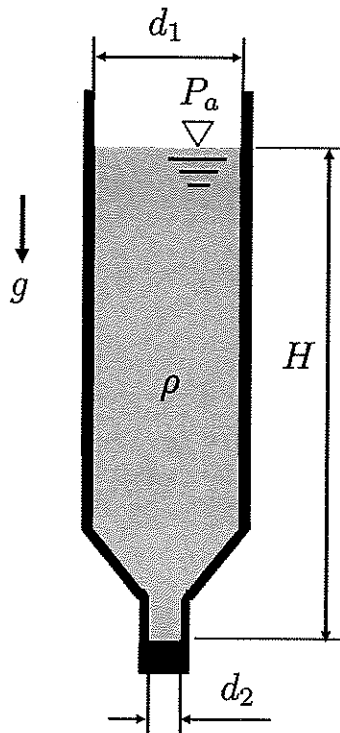


図1

問2

図2のように同一軸で異なる半径を持つ2つの円筒の隙間について2次元非圧縮性粘性流れを考える。内円筒半径を R_1 、外円筒半径を R_2 とする。軸方向速度がなく、円筒座標 (r, θ) で表した連続の式、運動方程式は以下で与えられる。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad \text{①}$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \quad \text{②}$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \quad \text{③}$$

ここで、半径と周方向の速度成分 u_r, u_θ 、圧力 p であり、粘性係数 μ と密度 ρ は一定で、重力などの外力は働かないものとする。また、流れは内外円筒面で壁面と同一速度となる条件を満たすものとする。角速度およびトルクは周方向座標 θ と同じく反時計回りを正とする。このとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) 内外円筒がどちらも角速度 Ω で定常回転するとき、流れ速度が $u_r = 0, u_\theta = r\Omega$ で定常となり、内外円筒と流体は一体となって回転した。このとき、連続の式①を満たすことを示しなさい。また、運動方程式②、③より、

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho u_\theta^2}{r} \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \quad \text{④}$$

であることを示しなさい。

- (2) 外円筒が静止し内円筒が角速度 Ω で回転するとき、流れ速度が

$$u_r = 0 \quad \text{かつ} \quad u_\theta = \frac{C_1}{r} + C_2 r \quad (C_1 \text{ および } C_2 \text{ は定数}) \quad \text{⑤}$$

となり層流定常で軸対称となった。任意の定数 C_1 および C_2 について、式⑤が周方向の運動方程式③を満たすことを示しなさい。

- (3) (2) のとき、境界条件を満たすように定数 C_1 および C_2 を定めて、周方向速度 u_θ の分布を求めなさい。

- (4) (2) のとき、半径 r でのせん断応力が

$$\tau = \mu r \frac{d}{dr} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \quad \text{⑥}$$

で与えられることを用いて、内円筒および外円筒に働くトルクをそれぞれ求めなさい。

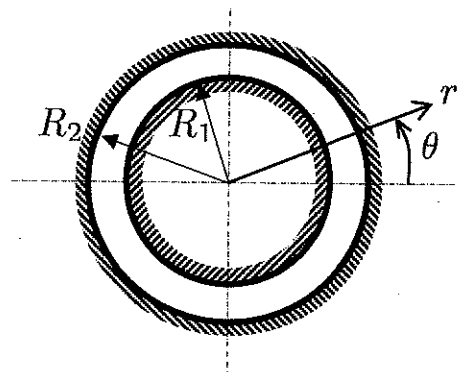


図2

科 目 名	熱力学
-------	-----

問1 および問2の両方を解答しなさい。

なお、各問は別の答案用紙に解答し、問の番号を明記しなさい。

問1

変形しない容積 $2V_1$ [m^3]の断熱容器が隔壁により2等分されており、それぞれの部屋には種類の異なる気体Aと気体Bが別々に充填されている。はじめ、気体Aは圧力 p_1 [Pa]、温度 T_1 [K]、気体Bは圧力 $2p_1$ [Pa]、温度 $2T_1$ [K]である。隔壁の体積は無視でき、気体A、気体Bはともに理想気体、比熱比は κ [-]で等しいとして、以下の問いに答えなさい。なお、解答に用いることができる記号は問題文中で与えたもののみとするが、解答に至る途中経過においては任意の記号を定義して使用してもよい。

- (1) 十分に時間が経つと、隔壁を通して熱が移動し気体Aと気体Bが等しい温度 T_2 [K]となった。この過程で生じた気体Aおよび気体Bの内部エネルギー変化 ΔU_A [J]および ΔU_B [J]をそれぞれ求めなさい。また、温度 T_2 [K]を T_1 [K]を用いて表しなさい。
- (2) (1)の過程で生じたエントロピー変化 ΔS [J/K]を求めなさい。
- (3) 次に隔壁を取り外して十分に時間が経つと、気体Aと気体Bが一様な混合気体となった。このときの温度 T_3 [K]を混合前の温度 T_2 [K]を用いて表しなさい。なお、導出過程も示しなさい。
- (4) (3)の過程で生じたエントロピー変化 ΔS [J/K]を求めなさい。
- (5) (1)と(3)の過程を通して、系全体で減少するエクセルギー量 $-AE_{\text{closed}}$ [J]を求めなさい。ここで、周囲環境温度は T_0 [K]とする。

問2

下図のような理想気体を動作流体とする圧縮比 $\varepsilon = V_1/V_2 = 17.0$ の理論サバテサイクルがある。状態1の温度が350 K, 状態1の絶対圧力が140 kPa, 状態3の温度が1818 K, 状態5の温度が800 K, 行程容積 $(V_1 - V_2)$ が 640 cm^3 であるとき, 以下の問いに答えなさい。ただし, この理想気体の比熱比 $\kappa = c_p/c_v = 1.40$, 気体定数 $R = 0.2872 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ とする。なお, 有効数字3桁(4桁で計算して3桁で記載)で解答しなさい。

- (1) 定積比熱 c_v [$\text{kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$]および定圧比熱 c_p [$\text{kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$]を求めなさい。
- (2) 状態1と状態2における各容積 V_1 [cm^3], V_2 [cm^3]およびこの理想気体の質量 m [kg]を求めなさい。
- (3) 縮切比 $\sigma = V_4/V_2$ および状態4の容積 V_4 [cm^3]を求めなさい。
- (4) 状態2と状態4の各温度 T_2 [K]および T_4 [K]を求めなさい。
- (5) 各過程におけるエントロピーの変化量 $(\Delta S_{12}, \Delta S_{23}, \Delta S_{34}, \Delta S_{45}, \Delta S_{51})$ [kJ/K]を求めなさい。また, T - S 線図を描きなさい。
- (6) このサイクルを1秒間に20回繰り返す際に得られる仕事 W [kW]を求めなさい。
- (7) このサイクルの熱効率 η を求めなさい。

