2024 年 4 月入学/2023 年 10 月入学 応用物理学専攻修士課程入学試験問題 I
(応用数学 I, 力学, 電磁気学)
2023 年 8 月 22 日 9:00〜12:00

解答上の注意

(1) 問題用紙はこのページを含め 3 枚である。答案用紙は問 1, 問 2, 問 3 それぞれ 1 枚である。草案用紙は 3 枚である。

(2) 答案用紙には問題番号が記載されている。各問はその問題番号が記載された答案用紙に解答すること。裏面を使用してもよい。

(3) すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を明記すること。

(4) 試験終了後はすべての答案用紙を回収する（草案用紙は持ち帰ること)。

問 1

[1] 1 階線形微分方程式

$$\frac{dy(x)}{dx} + P(x)y(x) = Q(x) \tag{1}$$

について、以下の各問に答えよ。

1. 微分方程式 (1) の一般解が、$\int P(x)dx$ の積分定数を 0 として

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c\right) \quad (c \text{ は任意定数}) \tag{2}$$

で与えられることを示せ。

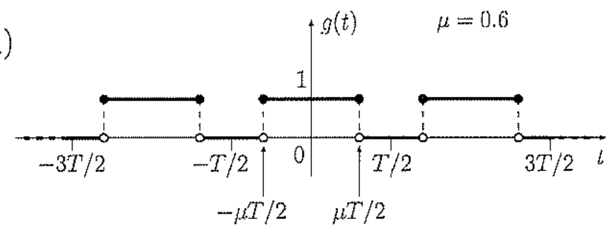
2. 微分方程式

$$x^2\frac{dy(x)}{dx} + (1-2x)y(x) = x^2 \tag{3}$$

の一般解を求めよ。

3. 微分方程式 (3) の、初期条件 $x=1, y=2$ を満たす特殊解を求めよ。

[2] 以下で表される周期 T の周期関数 $g(t)$ がある。(右図参照)



$$g(t) = \begin{cases} 0 & (-\frac{1}{2}+n)T < t < (-\frac{1}{2}\mu+n)T \\ 1 & (-\frac{1}{2}\mu+n)T \le t \le (\frac{1}{2}\mu+n)T \\ 0 & (\frac{1}{2}\mu+n)T < t \le (\frac{1}{2}+n)T \end{cases}$$

ここで n は整数である。また μ は $0 < \mu < 1$ の値を取る定数である。この関数のフーリエ変換を求めたい。

任意の関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t}dt$$

と定義する。$f(t)$ が周期 T の周期関数であれば、次に示すように無限区間の積分を 1 周期分の積分によって表せる。

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{i\omega(t+nT)}dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{in\omega T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{i\omega t}dt$$

1. $f(t) = g(t)$ として上式の最右辺の積分部分

$$\int_{-T/2}^{T/2} g(t)\, e^{i\omega t}dt$$

を、$\omega = 0$ と $\omega \neq 0$ のふたつの場合について求めよ。

2. デルタ関数を含む以下の関係

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{inx} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(x - 2m\pi)$$

と 1. の結果とを用いて、$g(t)$ のフーリエ変換 $G(\omega)$ を表わせ。

3. $\mu = 0.5$ のとき、$G(\omega)$ は $\omega = 0$ 以外では $\omega = 2m\pi/T$ (m は奇数) でのみ 0 でない値をとることを示せ。

4. $\omega = 4\pi/T$ の $|G(\omega)|$ を最大にする μ を求めよ。

2024 年 4 月入学/2023 年 10 月入学 応用物理学専攻修士課程入学試験問題 I
(応用数学 I, 力学, 電磁気学)
2023 年 8 月 22 日 9:00〜12:00

解答上の注意

(1) 問題用紙はこのページを含め 3 枚である。答案用紙は問 1，問 2，問 3 それぞれ 1 枚である。草案用紙は 3 枚である。

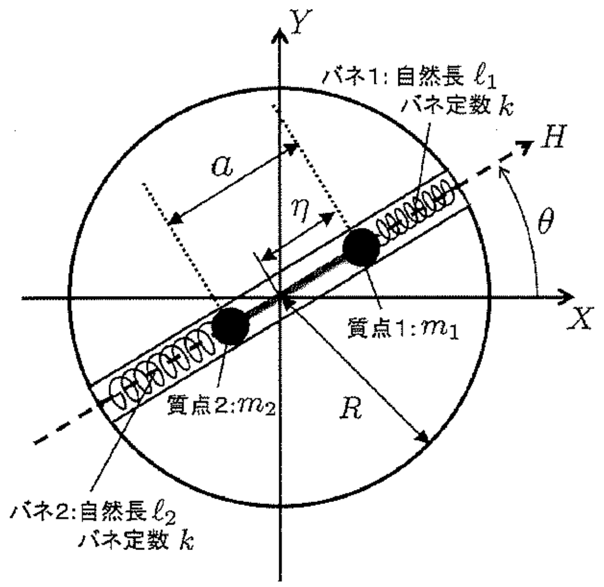
(2) 答案用紙には問題番号が記載されている。各問はその問題番号が記載された答案用紙に解答すること。裏面を使用してもよい。

(3) すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を明記すること。

(4) 試験終了後はすべての答案用紙を回収する（草案用紙は持ち帰ること）。

問 2

中心軸まわりに一定の角速度 ω (>0) で回転する半径 R の円盤が，水平なテーブル面上に設置されている．テーブル面にはデカルト座標の X 軸と Y 軸が固定されており，Z 軸は鉛直上向きで円盤の中心軸に一致する．右図は，円盤を Z 軸の正の方向から見たものである (Z 軸は省略)．円盤内には中心を通る直線状のパイプが埋め込まれている．そして，このパイプの中には，質量 m_1 の質点 1 と質量 m_2 の質点 2 が伸縮しない長さ a の棒でつながったものが，円盤の外端に固定された 2 つのバネで繋がれて組み込まれている．質点 1 に繋がったバネ 1 の自然長は ℓ_1，質点 2 に繋がったバネ 2 の自然長は ℓ_2 であり，両方ともバネ定数は k である．質点はパイプ内を滑らかに移動できる．また，棒とバネの質量は無視できる．



円盤の中心を原点として，質点 2 から質点 1 へ向かう方向を正とする座標軸 H を導入する．H 軸が X 軸となす角を θ とすると，質点 1，質点 2 のデカルト座標 (x_1, y_1), (x_2, y_2) は，この θ と原点から質点 1 までの距離 η を用いて

$$x_1 = \eta\cos\theta, \quad y_1 = \eta\sin\theta$$
$$x_2 = (\eta - a)\cos\theta, \quad y_2 = (\eta - a)\sin\theta$$

と表される．時間微分演算 (d/dt) はドット ($d\theta/dt = \dot{\theta}$ など) で表すとして，以下の問いに答えよ．

（1）静止座標系から見た質点系の運動エネルギー K を，η と θ を用いて表せ．

（2）静止座標系から見た質点系のポテンシャルエネルギー U を，η と θ を用いて表せ．

（3）$\dot{\theta} = \omega$ として，この系のラグランジュ関数 L を示せ．

以下では中心軸まわりに角速度 ω で回転する回転座標系で H 軸に沿った質点系の運動を考える．

（4）（3）で求めた L から，回転座標系における質点系のポテンシャルエネルギー V を求めよ．

（5）（4）で求めた V から，H 軸に沿って質点系が静止する位置 (平衡点) η_0 を求めよ．また質点系が平衡点に静止する場合，棒の中心が円盤の中心と一致するときの角速度 ω を求めよ．

（6）平衡点 η_0 を中心とする新しい座標を $\tilde{\eta} = \eta - \eta_0$ とする．これを用いてラグランジュ関数 L は

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\tilde{\eta}}^2 + \frac{1}{2}\{(m_1 + m_2)\omega^2 - 2k\}\tilde{\eta}^2 + C$$

と表せる．ここで C は定数である．$\tilde{\eta}$ に関するラグランジュ方程式を求めよ．

（7）（6）の結果から，静止した質点系を平衡位置からずらした時に引き戻されるための ω の条件を求めよ．

（8）（7）の条件が満たされるとき，質点系は平衡位置からずらすと H 軸に沿った単振動をする．質点系の振動の角速度 $\tilde{\omega}$ を求めよ．また，$m_1 = 0.05$ [kg]，$m_2 = 0.10$ [kg]，$k = 1.5$ [N/m]，$\omega = 2.0$ [rad/s] として，$\tilde{\omega}$ [rad/s] の数値を有効数字 2 桁で答えよ．

2024 年 4 月入学/2023 年 10 月入学 応用物理学専攻修士課程入学試験問題 I
（応用数学 I，力学，電磁気学）
2023 年 8 月 22 日 9:00〜12:00

解答上の注意

(1) 問題用紙はこのページを含め 3 枚である。答案用紙は問 1，問 2，問 3 それぞれ 1 枚である。草案用紙は 3 枚である。
(2) 答案用紙には問題番号が記載されている。各問はその問題番号が記載された答案用紙に解答すること。裏面を使用してもよい。
(3) すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を明記すること。
(4) 試験終了後はすべての答案用紙を回収する（草案用紙は持ち帰ること）。

問 3

図 1 に示す断面を持つ同軸円筒型のケーブルがある．内側，外側とも導体でできており，同じ中心軸を持ち，内導体の直径は a, 外導体の内直径は b, 外直径は c である．２つの導体間の隙間（斜線部分）は等方的な誘電率 ε, 透磁率 μ を持つ誘電体で満たされており，ケーブルの長さは a, b, c に比べて十分長く，$+z$ 方向に直線状であるとする．
以下の問いに答えよ．

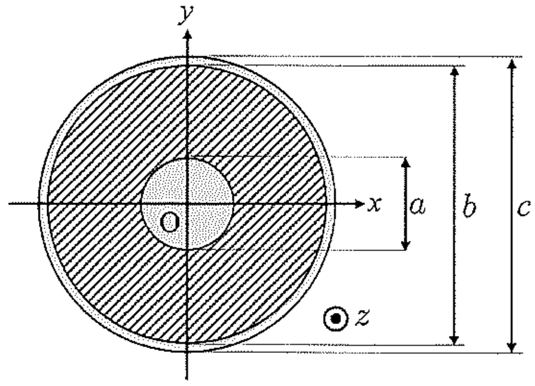


図 1: 同軸円筒型のケーブルの断面.

(1) このケーブルの内導体，外導体に単位長さあたりそれぞれ $q\ (>0)$, $-q$ の電荷を与えた．電荷は長さ方向に一様に分布しているものとする．ケーブル断面での電気力線の概略を描け．

(2) 中心点 O から距離 r での電場を Gauss の法則を使って求め，r を横軸にして電場分布をグラフに描け．

(3) 内外導体間の電位差 V を求めよ．

(4) (2) と (3) から，このケーブルの単位長さあたりのキャパシタンス C を求めよ．

(5) このケーブルの内導体，外導体にそれぞれ $+z$, $-z$ 方向の電流を流すと，Biot-Savart の法則によって誘電体部分には磁場が生じ，ケーブルは単位長さあたり $L=\dfrac{\mu}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a}$ のインダクタンスを持つことが分かる．また (4) からこのケーブルは単位長さあたりキャパシタンス C を持つ．ケーブルの抵抗や誘電体損失は無視できるとして，内外導体間に交流電圧をかけたとき，このケーブルはどのような等価回路で近似できるか，インダクタンスを L, キャパシタンスを C として等価回路を描け．

(6) このケーブルに使われている誘電体の透磁率，誘電率はそれぞれ $\mu=\mu_0$, $\varepsilon=2.25\varepsilon_0$ である．$\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ を計算し，単位も付して数値で答えよ．ここで μ_0, ε_0 は真空の透磁率と誘電率である．

図 1 の同軸円筒型ケーブルの誘電体部分を伝播する電磁波を考えよう．誘電率 ε, 透磁率 μ の等方的で均質な分散性のない線形媒質中を時間的に角周波数 ω で正弦波振動し，$+z$ 方向に伝播する平面波において，$x-y$ 平面上での電位 φ の変化は，Maxwell 方程式から直角座標系 (x,y,z) で式 (A) で与えられる．

$$\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial y^2}=0 \tag{A}$$

(7) 図 1 の同軸円筒型ケーブルの誘電体部分を伝播する電磁波に適用するために，式 (A) を円柱座標系 (r,θ,z) に変換したとき，

$$\frac{\partial^2\varphi(r,\theta)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi(r,\theta)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi(r,\theta)}{\partial\theta^2}=0 \tag{B}$$

となることを示せ．ここで r,θ はそれぞれ動径方向，方位角方向の変数であり，両座標系間には $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$ の関係がある．

(8) $\varphi(r,\theta)=R(r)T(\theta)$ と変数分離を使って，式 (B) の解 $\varphi(r,\theta)$ を求めよ．境界条件は，導体面上で θ に無関係に $T(\theta)$ が一定であることであり，ここでは $\varphi(a/2,\theta)=V_o$ (V_o は定数），$\varphi(b/2,\theta)=0$ とする．

2024 年 4 月入学/2023 年 10 月入学 応用物理学専攻修士課程入学試験問題 II
(応用数学 II, 熱・統計力学, 量子力学)
2023 年 8 月 22 日 13:00～16:00

解答上の注意
(1) 問題用紙はこのページを含め 3 枚である。答案用紙は問 4, 問 5, 問 6 それぞれ 1 枚である。草案用紙は 3 枚である。
(2) 答案用紙には問題番号が記載されている。各問はその問題番号が記載された答案用紙に解答すること。裏面を使用してもよい。
(3) すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を明記すること。
(4) 試験終了後はすべての答案用紙を回収する（草案用紙は持ち帰ること)。

問 4

[1] 積分

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ikx}}{x^2+a^2}dx$$

を計算するために、複素数 z の関数

$$f(z)=\frac{ze^{ikz}}{z^2+a^2}$$

の積分

$$\int_C f(z)dz$$

を考える。ここで、k と a は実数で、$a>0$ とする。また、C は積分路を表す。以下の問いに答えよ。

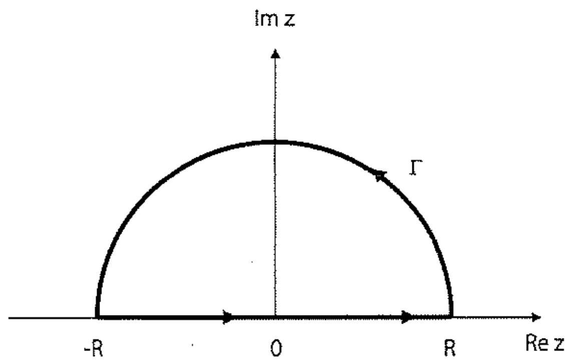
(1) $f(z)$ の特異点を全て求め、それぞれにおける留数を計算せよ。

(2) $k>0$ の場合、積分路 C として、右図に示す経路を考える。

(a) 半径 R の半円の円弧 Γ 上の $f(z)$ の積分が $\mathrm{R}\to\infty$ において 0 となることを証明し、次式を示せ。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ikx}}{x^2+a^2}dx=\lim_{R\to\infty}\int_C f(z)dz \qquad \text{(i)}$$

(b) (i)式と留数の定理を用いて、I の値を求めよ。



(3) $k<0$ の場合に対して、適切な積分路 C を選び I の値を求めよ。その積分路を選んだ理由も説明すること。

[2] ベクトル場 $\boldsymbol{A}=7x\boldsymbol{i}-z\boldsymbol{k}$ の面積分

$$I=\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$$

を考える。ただし、S は原点を中心とする半径 2 の球面とし、$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x,y,z 方向の単位ベクトルである。

(1) 極座標を用いて、S 上の点を

$$\boldsymbol{r}=2\sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i}+2\sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j}+2\cos\theta\,\boldsymbol{k}$$

と表し、ベクトル面積素

$$d\boldsymbol{S}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\varphi}d\theta d\varphi$$

を求めよ。

(2) (1)の結果を用いて I を計算せよ。

(3) $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$ を計算せよ。

(4) (3)の結果とガウスの定理を利用して I の値を求めよ。

2024年4月入学/2023年10月入学 応用物理学専攻修士課程入学試験問題 II
(応用数学 II, 熱・統計力学, 量子力学)
2023年8月22日 13:00〜16:00

解答上の注意

(1) 問題用紙はこのページを含め3枚である。答案用紙は問4, 問5, 問6それぞれ1枚である。草案用紙は3枚である。

(2) 答案用紙には問題番号が記載されている。各問はその問題番号が記載された答案用紙に解答すること。裏面を使用してもよい。

(3) すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を明記すること。

(4) 試験終了後はすべての答案用紙を回収する（草案用紙は持ち帰ること）。

問5

理想気体の示す量子統計性について考える。系の 1 粒子が取りうる量子状態の指標をjと書き、そのエネルギーをε_jと書く。大分配関数Ξは量子状態jを占有する粒子数をn_jとして、以下のように計算される。

$$\Xi = \prod_j \sum_{n_j} e^{(\mu-\varepsilon_j)n_j/k_B T}$$

ただし、Tは系の温度, k_Bはボルツマン定数, μは化学ポテンシャルである。

1) ボース粒子系とフェルミ粒子系のそれぞれに対して、n_jについての和を計算し、それぞれの大分配関数Ξを求めよ。

2) 平均粒子数Nは、以下の式のように大分配関数Ξを用いて計算され、また各状態jを占有する平均粒子数(分布関数)$f(\varepsilon_j)$の和として書くことができる。

$$N = k_B T\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\Xi\right) = \sum_j f(\varepsilon_j)$$

このときボース粒子系では$f(\varepsilon_j) = \left(e^{\frac{\varepsilon_j-\mu}{k_B T}} - 1\right)^{-1}$、フェルミ粒子系では$f(\varepsilon_j) = \left(e^{\frac{\varepsilon_j-\mu}{k_B T}} + 1\right)^{-1}$となることを示せ。

3) 2) の結果からボース粒子系では$\mu \leqq 0$となることを説明せよ。ただし、基底状態のエネルギーを 0 とする。

4) 粒子の質量をmとする。自由粒子の状態密度関数を考えることによって、量子状態jについての和を以下のようなエネルギーεについての積分に近似することができる。

$$N = \sum_j f(\varepsilon_j) \approx \frac{V(2m)^{\frac{3}{2}}}{(2\pi)^2\hbar^3}\int_0^\infty \sqrt{\varepsilon}f(\varepsilon)d\varepsilon$$

ただしVを系の体積、$\hbar$をプランク定数/2πとしている。これを用いて、Nがμの増加関数であることを示せ。

5) ボース粒子系を考える。V, Tが与えられたとき 4)の積分（ただし基底状態を含んでいない）には最大値$N_{\max}$がある。このとき系の平均粒子数Nが$N_{\max}$より多くなると、$(N - N_{\max})$個のマクロな数の粒子が基底状態を占有するようになる。この現象を、ボーズ・アインシュタイン凝縮(BEC)と呼ぶ。このときの BEC 相転移温度を、N, Vの関数として求めよ。必要なら以下の公式を用いてよい。

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1}dx \approx 1.3\sqrt{\pi}$$

6) 高温低密度の極限において、ボース粒子とフェルミ粒子の分布は一致し、古典的な分布となる。このことを、化学ポテンシャルμを用いて説明せよ。

7) 高温低密度の極限において、古典的な理想気体の状態方程式が成立することを導け。ただし、以下の熱力学関数の関係式を用いよ。ここでPは系の圧力である。

$$PV = k_B T\ln\Xi$$

2024 年 4 月入学/2023 年 10 月入学 応用物理学専攻修士課程入学試験問題 II
(応用数学 II, 熱・統計力学, 量子力学)
2023 年 8 月 22 日 13:00〜16:000

解答上の注意

(1) 問題用紙はこのページを含め 3 枚である。答案用紙は問 4, 問 5, 問 6 それぞれ 1 枚である。草案用紙は 3 枚である。

(2) 答案用紙には問題番号が記載されている。各問はその問題番号が記載された答案用紙に解答すること。裏面を使用してもよい。

(3) すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を明記すること。

(4) 試験終了後はすべての答案用紙を回収する（草案用紙は持ち帰ること)。

問 6

無限に深い井戸型ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (|x| < a) \\ \infty & (x \leq -a \text{ および } x \geq a) \end{cases}$$

を有する 1 次元量子系に閉じ込められた質量 m の単一粒子の運動量分布について考える。このことを考えるため、以下の問に答えよ。必要であれば公式、

$$\cos\theta_1 \cos\theta_2 = \frac{1}{2}\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \cos(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

を用いよ。

(1) この粒子の座標表示での波動関数を $\psi(x)$ としたとき、$|x| < a$ において $\psi(x)$ が満たすべきシュレーディンガー方程式を書き下せ。また、波動関数 $\psi(x)$ は $x = -a$ および $x = a$ でどのような値を取るかを答えよ。

(2) 問 (1) のシュレーディンガー方程式を解くことにより、エネルギー固有値 E_n、および最低エネルギー固有値 E_1 に属する固有波動関数 $\psi_1(x)$ を求めよ。ただし、$n = 1, 2, 3, \cdots$ であり、$E_1 < E_2 < E_3 < \cdots$ とする。また、波動関数は規格化しなくてよい。

(3) 座標表示での波動関数 $\psi_n(x)$、すなわち $\langle x|n\rangle$ から位置の分布関数 $|\psi_n(x)|^2$ が得られるように、運動量表示での波動関数 $\langle p|n\rangle$ が得られれば粒子の運動量の分布関数を求めることができる。ここで、$|n\rangle$ はこの系のハミルトニアンの固有値 E_n に属する固有ベクトル、$|x\rangle$ および $|p\rangle$ はそれぞれ位置演算子および運動量演算子の固有ベクトルである。演算子 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle\langle x|\, dx$ が恒等演算子であることを利用して、運動量表示での波動関数 $\langle p|n\rangle$ を $\langle x|n\rangle$ によって表せ。

(4) 運動量演算子の固有値 p に属する固有ベクトル $|p\rangle$ に対し、座標表示での固有関数 $\langle x|p\rangle$ を求めよ。ただし、固有関数は規格化しなくてよい。

(5) エネルギー固有値 E_1 に属する固有状態にある粒子の運動量の分布関数を求めよ。ただし、分布関数は規格化されている必要は無い。