

2023年4月入学・2022年10月入学
北海道大学大学院工学院修士課程

機械宇宙工学専攻、人間機械システムデザイン専攻、
エネルギー環境システム専攻、量子理工学専攻

応用量子科学系研究室群

専門科目試験問題

応用数学

試験期日：2022年8月23日（火）
時 間：9:00～12:00

全4問の全てに解答せよ。答案用紙は問題ごとに別の用紙(2枚一組)を使用し、全ての用紙に問題の番号を明記せよ。また、ホッチキス止めをはずさず提出すること。

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題用紙をひらいてはいけません。
2. 携帯電話、スマートフォン、時計のアラームは使用を禁止するので、電源を切り、身につけないこと。
3. 受験中、机上には、受験票、鉛筆（黒）、シャープペンシル（黒）、消しゴム、鉛筆削り、眼鏡、計時機能だけの時計および電卓以外は置くことができません。
4. 全ての答案用紙、草案紙上欄に科目名、受験番号を記入し、問題用紙に受験番号を記入しなさい。
5. 2枚一組の答案用紙が不足した場合は裏面を用いても良い。ただし「裏面に続く」と明記すること。
6. 問題用紙の印刷不鮮明、答案用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に知らせなさい。
7. 問題用紙の余白等は利用してもよいが、切り離してはいけません。
8. 試験終了後、問題用紙、答案用紙、草案紙は全て提出のこと。

受験番号	
------	--

科 目 名	応用数学
-------	------

問1 微分方程式について以下の設間に答えなさい。ただし、 y', y'' はそれぞれ y の x に関する 1 階、2 階の導関数とする。

(1) 以下の微分方程式の一般解を求めなさい。

$$(1-1) \quad xy' + 2y = 0$$

$$(1-2) \quad y' - y = e^{2x}$$

$$(1-3) \quad y'' - 3y' + 2y = 3x^2e^x$$

(2) 以下の微分方程式に関する設間に答えなさい。

$$(2x + x^2 + e^{-x}y)dx + (xe^{-x} + 2e^{-x}y)dy = 0 \quad (i)$$

(2-1) 式 (i) が完全微分方程式ではないことを示しなさい。

(2-2) 式 (i) に積分因子として x の関数を乗じて完全微分方程式を求め、式 (i) の一般解を求めなさい。

(3) 以下の曲線群に関する設間に答えなさい。

$$x^2 + y^2 + 2Cy = 0 \quad (C \text{ は任意定数}) \quad (ii)$$

(3-1) 曲線群 (ii) の任意定数 C を消去して 1 階の微分方程式を求めなさい。

(3-2) 曲線群 (ii) の傾きが y' であることを利用して、(ii) に直交する曲線群の微分方程式を求めなさい。

(3-3) 曲線群 (ii) に直交する曲線群を求めなさい。

(次頁に続く)

応用数学

問2 ベクトル解析に関する以下の設問に答えなさい。ただし各設問において、 \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} はデカルト座標系 (x, y, z) における x, y, z の各方向の単位ベクトルとする。

- (1) ベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ が $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{0}$ の関係を満たすとき、 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{C} \times \mathbf{A}$ が成り立つことを証明しなさい。また、この逆が成り立つかどうかを考察し、成り立つならば証明し、成り立たないならば反例を挙げなさい。
- (2) 時刻 t に $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}(t \cos(t)\mathbf{i} + t \sin(t)\mathbf{j} + \sqrt{3}t\mathbf{k})$ に位置する粒子の加速度ベクトルのうち、粒子の速度方向に沿った成分の大きさを求めなさい。
- (3) スカラー関数 $\phi(x, y, z) = xy^2 + yz^3$ について、点 $P(2, -1, 1)$ におけるベクトル $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ 方向の方向微分を求めなさい。
- (4) 任意の定数ベクトル \mathbf{A} に対し

$$\nabla \cdot \left[\frac{1}{r} (\mathbf{A} \times \mathbf{r}) \right] = 0$$

が成り立つことを証明しなさい。ここで $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$ である。

- (5) 曲面 $S : z = f(x, y)$ を xy 平面上に正射影して得られる領域を D , S の単位法線ベクトルを \mathbf{n} とする。
- (5-1) ベクトル面積素 $d\mathbf{S}$ は以下のようにあらわされることを証明しなさい。

$$d\mathbf{S} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dx dy \quad (\text{i})$$

- (5-2) 式 (i) よりベクトル面積素 $d\mathbf{S}$ と \mathbf{k} との内積は $dx dy$ となる。これを用いてベクトル場 \mathbf{A} の曲面 S に沿った面積分について、以下の等式が成り立つことを証明しなさい。

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_D \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{k}|} dx dy \quad (\text{ii})$$

- (5-3) 式 (ii) を用いて以下の面積分を求めなさい。

$$\int_S (2xi - yj + zk) \cdot d\mathbf{S} \quad S : z = 1 - x - y, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

- (6) 原点を中心とした xy 平面上の半径 1 の円を S とし、 C をその境界線とする。ベクトル場 $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ に対してストークスの定理

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

が成り立つことを証明しなさい。

(次頁に続く)

応用数学

問3 以下の設間に答えなさい。ただし、 z は複素数であり、 i は虚数単位を、 e は自然対数の底をあらわす。

(1) 次の設間に答えなさい。導出の仕方も簡単に説明しなさい。

(1-1) $\frac{z^2}{z-i}$ について、 $z=1$ に中心を持つ半径 3 の円に沿った反時計方向の積分を求めなさい。

(1-2) $z^4 + b^4 = 0$ ($b > 0$) の解 z を求めなさい。

(1-3) 関数 $w = z^4$ が、正則関数であるかどうかを式を用いて示しなさい。もし正則関数であるなら、 w の z に関する微分を示しなさい。正則関数でなければ、どのような条件を付加すれば、正則関数になるかについて答えなさい。

(1-4) 定積分 $\int_0^\infty \frac{1}{x^4 + b^4} dx$ ($b > 0$) を計算し、 b を用いてあらわしなさい。

(2) 正則関数 $f(z) = u + vi$ について、 z を極座標表示 $z = re^{i\theta}$ ($r > 0$) であらわしたときに、この極座標を用いたコーシー・リーマンの方程式が

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad r \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial u}{\partial \theta},$$

であらわされることを証明しなさい。なお、デカルト座標表示 $z = x + iy$ においては、コーシー・リーマンの方程式が成り立つことが示されているものとする。

応用数学

問4 以下の設間に答えなさい。

- (1) 実数変数 t に関する実関数 $f(t)$ は, $t < 0$ において $f(t) = 0$ で, $t \geq 0$ において区別的に連続であり, かつ, 次のラプラス変換が有界な関数である。

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \quad (s: \text{複素数})$$

(1-1) $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ とするとき, 以下の関係を証明しなさい。

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s+a)$$

(1-2) 次の関数のラプラス変換を求めなさい。

$$f(t) = t e^{-at}$$

- (2) 複素数値関数 $a(x)$ のフーリエ変換とその逆変換を, それぞれ,

$$A(k) = \int_{-\infty}^{\infty} a(x) e^{-ikx} dx, \quad a(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{+ikx} dk$$

と定義するとき, 以下の設間に答えなさい。

- (2-1) ディラックの δ 関数のフーリエ変換と逆変換を求め, 以下の二つの関係を証明しなさい。

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x_0)} dk, \quad \delta(k - k_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k-k_0)x} dx$$

(2-2) 上の δ 関数に関する関係を用いて, 以下の関係を証明しなさい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |a(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |A(k)|^2 dk$$

- (3) 二次元デカルト座標系の $|x| < d$, かつ, $y \geq 0$ の領域において, 次の偏微分方程式と条件を満足する実関数 $f(x, y)$ を考える。

$$\nabla^2 f(x, y) + k^2 f(x, y) = 0 \quad (k: \text{実数}),$$

$$f(\pm d, y) = 0, \quad f(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi}{d}x\right), \quad |f(x, y)| \leq 1.$$

$x \neq 0$ における $f(x, y)$ は k に応じて, y の増加とともに減衰する関数, あるいは, 振動する関数としてあらわされる。それぞれの場合の $f(x, y)$ を k の条件とともに示しなさい。

2023年4月入学・2022年10月入学
北海道大学大学院工学院修士課程

機械宇宙工学専攻、人間機械システムデザイン専攻、
エネルギー環境システム専攻、量子理工学専攻
応用量子科学系研究室群

専門科目試験問題

電磁気学、材料科学、原子物理・原子炉工学

試験期日：2022年8月23日（火）
時 間：13：30～16：30

電磁気学、材料科学、原子物理・原子炉工学の3科目各3問、計9問から3問を選択し、それぞれ別の答案用紙に解答せよ。

なお、各問題は別の答案用紙に解答し、科目名と問題の番号を明記せよ。
ホッチキス止めをはずさずに提出すること。

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題用紙をひらいてはいけません。
2. 携帯電話、スマートフォン、時計のアラームは使用を禁止するので、電源を切り、身につけないこと。
3. 受験中、机上には、受験票、鉛筆（黒）、シャープペンシル（黒）、消しゴム、鉛筆削り、眼鏡、計時機能だけの時計および電卓以外は置くことができません。
4. 答案用紙、草案紙上欄に科目名、受験番号を記入し、問題用紙に受験番号を記入しなさい。
5. 答案用紙は裏面を用いても良い。ただし「裏面に続く」と明記すること。
6. 問題用紙の印刷不鮮明、答案用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に知らせなさい。
7. 問題用紙の余白等は利用してもよいが、切り離してはいけません。
8. 試験終了後、問題用紙、答案用紙、草案紙は全て提出のこと。

受験番号	
------	--

科 目 名	電磁気学
-------	------

問 1 誘電率が ϵ_0 である真空中に配置された、一様に帯電した薄い円板が作る電界に関する以下の問い合わせに答えなさい。

- (1) 図 1 のように、円板(半径 a [m])を置いたとする。その円板に正の電荷密度 σ [$C m^{-2}$]で電荷が一様に分布している場合、円板の中心軸(z 軸とする)に沿った位置の点Pにおける電場 \vec{E} 、および無限遠方を基準とした静電ポテンシャル V を求めなさい。ただし、円板の中心を原点とし、点Pのz座標を z [m] とする。

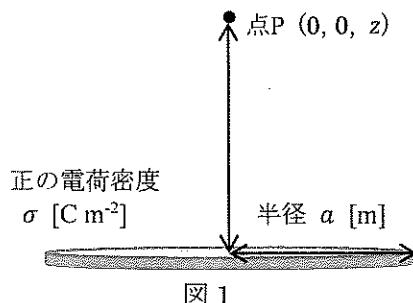


図 1

- (2) 次に図 2 のように 2 つの円板(ともに半径 a [m])を正対させた場合を考える。円板 A には正の電荷密度 σ [$C m^{-2}$]、円板 B には負の電荷密度 $-\sigma$ [$C m^{-2}$] で電荷が一様に分布している。円板間の間隔は d [m] である。2 つの円板の中心軸に沿った位置の点Pにおける電場 \vec{E} 、および無限遠方を基準とした静電ポテンシャル V を求めなさい。ただし、円板 A の中心と B の中心の中点を原点とし、点Pのz座標を z [m] とする。

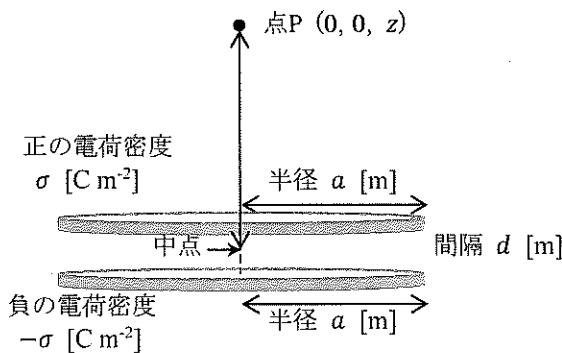


図 2

- (3) 以上で求めた式を用いて、半径 a [m]、間隔 d [m] がともに距離 z [m] に比べて非常に小さい場合の点Pにおける静電ポテンシャルを求めなさい。ただし円板 A、B の持つ電荷をそれぞれ Q [C], $-Q$ [C] とする。

ヒント：まず、 a が z に比べて非常に小さい場合に V がどのようにあらわされるかを解く。導出途中、次の $|\epsilon| \ll 1$ のときの近似式

$$(1 + \epsilon)^{\alpha} \sim 1 + \alpha\epsilon + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \epsilon^2 \text{ を利用するとよい。}$$

電磁気学

問 2 半径 a の一様に帯電した薄い円板が中心軸の周りに一定の角速度で回転しているときに作られる磁場に関して以下の小間に答えなさい。

- (1) デカルト座標系 (x, y, z) で xy 平面に置かれた円板の中心が座標原点にあり、全電荷が $+Q$ 、回転角速度が $+\omega$ であるとき、 z 軸上の点 $P(0, 0, z)$ の磁場 $\mathbf{H}(0, 0, z)$ は z 成分のみ H_z を持ち、次式で与えられることを示しなさい。

$$H_z(0, 0, z) = \frac{\omega Q}{2\pi a^2} |z| \left[\frac{|z|}{\sqrt{z^2 + a^2}} + \frac{\sqrt{z^2 + a^2}}{|z|} - 2 \right]$$

- (2) 中心位置が $z = \pm d/2$ で、全電荷が、 $\pm Q$ の円板の回転角速度がそれぞれ $\pm\omega$ （複号同順）であるような、二枚の回転円板系について以下の小間に答えなさい。

- (a) この回転円板系の全電流を求めなさい。
- (b) この回転円板系の全磁気モーメントを求めなさい。
- (c) この回転円板系の z 軸上の点 $P(0, 0, z)$ での磁場 $H_z(0, 0, z)$ を求めなさい。
- (d) 観測位置が十分遠方 $|z| \gg d, a$ での z 軸上の点 $P(0, 0, z)$ での磁場 $H_z(0, 0, z)$ を答えなさい。

問 3 (x, y, z) のデカルト座標系において、図 3 に示すように、1 辺の長さが $2a$ の正方形コイル ABCD が、辺 AB は x 軸上にあり、辺 BC は y 軸に平行に置かれている。以下で、「コイルの位置」は辺 AB の中点 M の座標 x_M を意味する。以下の小間に答えなさい。ただし、コイルの電気抵抗は R とする。

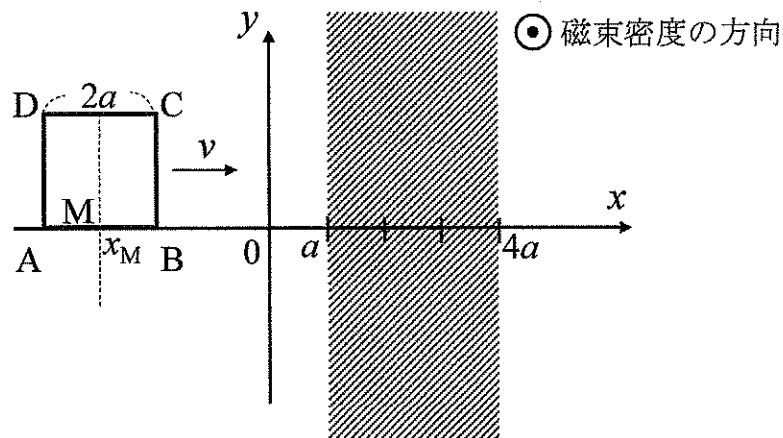


図 3

- (1) $a \leq x \leq 4a$ (図 3 のハッチング部分) に、 $+z$ 方向の一様な磁束密度 $B(x) = B_0$ が存在する場合を考える。コイルを xy 平面上で x 軸に沿って速さ v で $+x$ 方向に $x_M = 5a$ まで移動させた。時刻 $t = 0$ はコイルの位置 x_M が原点を通過した時刻とする。このとき、以下の問い合わせに答えなさい。ただし、コイルの自己誘導は無視するものとする。
- (1-1) コイルの断面を貫く磁束 Φ の時間変化 $\Phi(t)$ を答えなさい。
 - (1-2) コイルに誘導起電力が生じる時間帯を答えなさい。
 - (1-3) (1-2) で答えた時間帯で生じる誘導起電力の大きさ、および、向き(右回り、または、左回り)を答えなさい。
 - (1-4) コイルが $x_M = 5a$ に到達するまでに抵抗で消費されるジュール熱を答えなさい。
- (2) 次に、 $a \leq x \leq 4a$ に $+z$ 方向の磁束密度 $B(x) = B_0(x/a - 1)$ が存在する場合を考える。コイルを(1)と同様に運動させるととき、以下の問い合わせに答えなさい。ただし、時刻 $t = 0$ はコイルの位置 x_M が原点を通過した時刻とし、コイルの自己誘導は無視するものとする。
- (2-1) コイルの断面を貫く磁束 Φ の時間変化 $\Phi(t)$ を $0 \leq t \leq 3a/v$ について答えなさい。
 - (2-2) 抵抗で消費されるジュール熱が(1-4)で求めた値の $2/3$ 倍となる時刻を答えなさい。

科 目 名	材料科学
-------	------

問 1 以下の問いに答えなさい。

- (1) 原子が三次元的に無限に並んでいる結晶の一部を模擬し、25個の半径 r の剛体球を平面上に5個×5個に並べた。これを第1層とする。この上に、図1のように、25個の剛体球を第1層と同様に5個×5個に並べた。この結晶構造の最小単位を図1中に点線で示した。この結晶構造の名称、格子定数、および充填率を答えなさい。
- (2) 図2と図3は(1)と同様に結晶の一部を模擬し、それぞれ、半径 r の剛体球を3層積み重ねた上面図と鳥瞰図である。第1層と第3層のニ次元平面の位置関係は同じである。この結晶構造の名称、最小単位の底辺の長さ及び平面に垂直な方向の高さを答えなさい。
- (3) ミラー指数で使用される記号の $< \quad >$ と $[\quad]$ は結晶の何をあらわすのか答えなさい。
- (4) 金属が半導体やセラミックスと比較して熱伝導特性に優れる理由を簡潔に答えなさい。
- (5) 半導体は温度が上がると電気抵抗は下がる。その理由を半導体のエネルギー-band構造を図示して説明しなさい。また、電子のエネルギーのフェルミーディラック分布は、温度が上がるとどのように変化するかを図示しなさい。
- (6) 図4は完全結晶の二次元格子の模式図である。この結晶にせん断応力を加え、すべり変形が起こることを考える。その時に生じる刃状転位の移動の様子を図示しなさい。なお、図示の際は、刃状転位を生じさせた上で、変形中および変形後の様子について示すこと。
- (7) 結晶粒サイズが等しい多結晶中に母相より硬い微小な析出物が形成し、この析出物が一定の数密度で均一に粒内に存在する場合、せん断変形に対して析出物がどの様な効果を示すか簡潔に答えなさい。

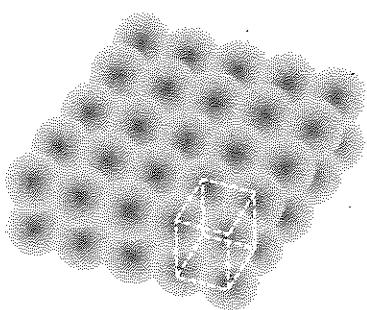


図1 結晶構造のモデルと最小単位（点線）

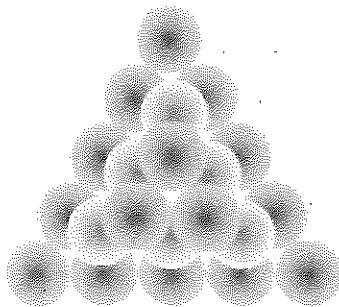


図2 半径 r の剛体球を3層積み重ねた上面図

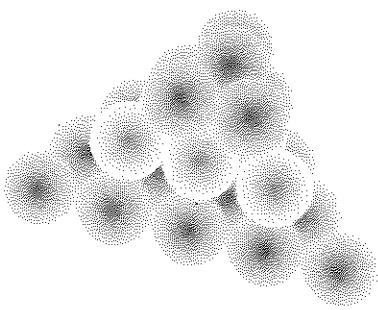


図3 半径 r の剛体球を3層積み重ねた鳥瞰図

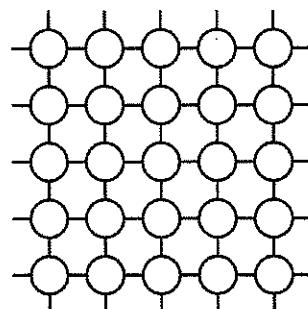


図4 変形前の二次元結晶格子

問2 一辺の長さが 50 mm の銅製立方体試料の一面を、放射性トレーサである ^{65}Zn を微量含む塩化亜鉛溶液に接触させ、その接触面を亜鉛でメッキした。次に、この銅製試料を 1,000°C の電気炉中に 10 日間入れて、熱処理を加えた。次の問い合わせに答えなさい。

(1) 電気炉中での熱処理によって銅試料中に拡散した亜鉛の濃度分布 $c(x, t)$ を計算で求めたい。亜鉛メッキ層は極めて薄いこと、亜鉛原子は銅試料の中心部に到達していないこと、また亜鉛の拡散は銅試料中の亜鉛濃度に依存せず一定と仮定した時の、Fick の第2法則を示すとともに、初期条件および境界条件を答えなさい。なお、メッキした面を $x = 0$ とおき、そこからの銅試料の深さ方向の距離を x とする。また、 t は拡散時間である。

(2) (1) における Fick の第2法則、初期条件および境界条件から、亜鉛の濃度分布として次式を得た。

$$C(x, t) = \frac{\alpha}{2\sqrt{Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

$x = 1, 2, 3$ mm の位置における ^{65}Zn の放射能濃度が、それぞれ 426, 72.4, 3.8 kBq g⁻¹ であった時の銅試料中の亜鉛の拡散係数を求め、その計算過程も含めて解答しなさい。ただし、加熱および冷却に要する時間は無視できるものとする。

(3) 実在の結晶は完全なものではなく、室温においても原子空孔などの欠陥を含んでいる。銅試料の温度を室温から 1,000°Cまで上げた場合、欠陥の数はどのように変化するか。そのように考えた理由とともに答えなさい。

(4) 金属材料に陽電子を照射すると、電子-陽電子対消滅による消滅ガンマ線が試料中で発生する。温度を 1,000°Cとした銅試料に陽電子を照射した場合、室温の銅試料の場合と比べて、発生タイミングが遅れた消滅ガンマ線が多数測定された。この理由を説明しなさい。

(5) (3) における欠陥の数の変化により、銅試料中の亜鉛の拡散係数はどのように変化するか。そのように考えた理由とともに答えなさい。

(6) (2) の結果をもとに 900°Cにおける銅試料中の亜鉛の拡散係数を求め、その計算過程も含めて解答しなさい。ただし、銅試料中の亜鉛の拡散の活性化エネルギーを $1.91 \times 10^5 \text{ J mol}^{-1}$ 、気体定数を $8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ 、ボルツマン定数を $1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ とする。

問3 組成 X_1 および X_2 の A 元素と B 元素からなる 2 元系の合金を作成し、合金を 200°C で保持して X 線回折測定（使用した X 線の波長 λ ： $\lambda = 1.541 \text{ \AA}$ ）を行ったところ、図 1 および図 2 のようなプロファイルを得た。

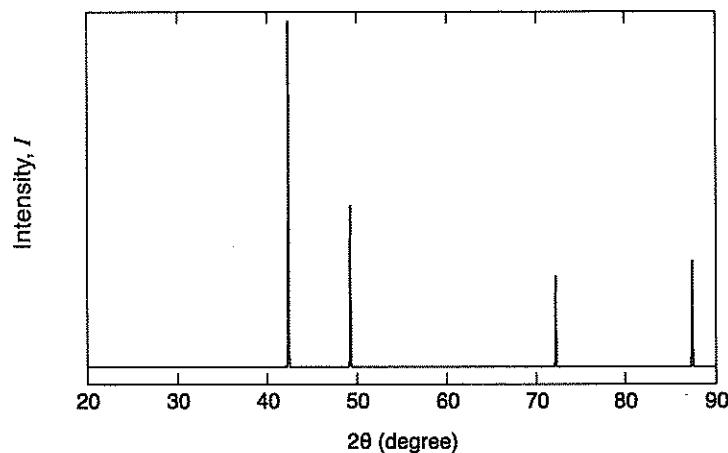


図 1 組成 X_1 の A-B 2 元系合金の 200°C における X 線回折プロファイル

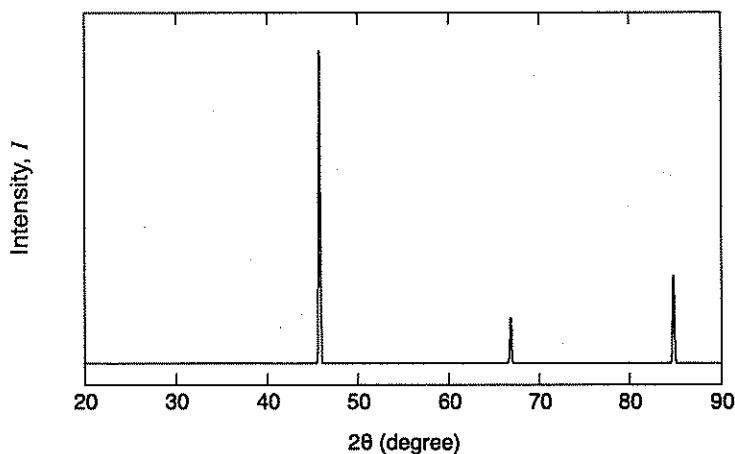


図 2 組成 X_2 の A-B 2 元系合金の 200°C における X 線回折プロファイル

X 線粉末回折実験において $\{h k l\}$ 面の面間隔を d_{hkl} とすると Bragg 条件 $2d_{hkl} \sin \theta = \lambda$ を満たしても結晶構造によって出現しないピークがある。例えば、面心立方構造 (fcc) では、 hkl が全て偶数もしくは全て奇数の時のみ、ピークが出現する。このことは単位胞内の座標 (u_n, v_n, w_n) にある N 個の原子により散乱された波 (X 線) を足し合わせた構造因子 F を考えることで求められる。構造因子 F は以下の式で記述できる。

$$F = \sum_{n=1}^N f_n \exp(2\pi i(hu_n + kv_n + lw_n))$$

ここで i は虚数単位、 f_n は n 番目の原子の原子散乱因子である。

以下の問い合わせに答えなさい。

- (1) 体心立方構造 (bcc) では単位胞内に 2 個の原子が含まれる。それぞれの座標(u_1, v_1, w_1)および(u_2, v_2, w_2)を示し、体心立方構造を持つ物質からの回折ピーク強度 $I = |F|^2$ がゼロとはならない場合の hkl が満たす条件を示しなさい。同種原子なので、 $f_h = f$ として良い。
- (2) 立方晶系における $\{hkl\}$ 面の面間隔 d_{hkl} と格子定数 a との関係を示しなさい。
- (3) 図 1 について、各ピーク位置を読み取り、対応する面間隔 d を求めなさい。図 1 のプロファイルにより面間隔が最大となる面が観測できていると考えて、観測された構造が fcc か bcc かを判定し、格子定数 a を求めなさい。その際、最大面間隔との比を考察すると良い。出現したピークについて、 2θ が小さいものから順にピークに対応する $\{hkl\}$ を答えなさい。
- (4) 図 2 についても (3) と同様に各ピーク位置を読み取り、対応する面間隔 d を求めなさい。図 2 のプロファイルにより面間隔が最大となる面が観測できていると考えて、観測された構造が fcc か bcc かを判定し、格子定数 a を求めなさい。出現したピークについて、 2θ が小さいものから順にピークに対応する $\{hkl\}$ を答えなさい。
- (5) 組成 X_1 および X_2 は図 3 に示した状態図中の①～③のどの組成に相当する合金から得られたか、答えなさい。なお、純物質 A は fcc 構造、純物質 B は bcc 構造を有するとする。

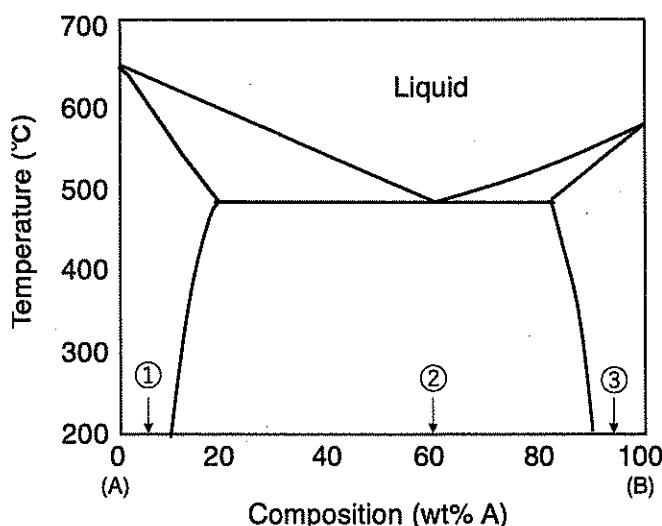


図 3 A-B 2 元系状態図

科 目 名	原子物理・原子炉工学
-------	------------

問1 以下の問い合わせに答えなさい。

(1) 実効中性子増倍率が k , 中性子生成時間が Λ の原子炉について, 時刻 t における中性子密度を $n(t)$, 遅発中性子先行核密度を $C(t)$ と記述したとき, これらが以下の微分方程式を満足するものとする。

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} n(t) + \lambda C(t) \quad (1)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{\beta}{\Lambda} n(t) - \lambda C(t) \quad (2)$$

ここで, ρ は反応度, β は遅発中性子割合, λ は遅発中性子先行核の崩壊定数を示す。なお, Λ , β , λ は, 一般的な軽水型原子炉での値を想定する。

(1-1) 仮に, 遅発中性子とその先行核が存在しない, すなわち $\beta = 0$ としたときの $n(t)$ を答えなさい。なお, $n(0) = n_0$ とする。

(1-2) 原子炉が臨界定常状態にあるとき, n と C の間に成り立つ関係式を答えなさい。

(1-3) $\rho \neq \beta$ であるとき, 式(1), (2)の一般解として $n(t) = C_1 \exp(w_1 t) + C_2 \exp(w_2 t)$ が得られる。ここで, $w_1 = -\frac{\beta - \rho}{\Lambda}$, $w_2 = \frac{\lambda \rho}{\beta - \rho}$ とする。中性子密度が n_0 で臨界定常状態の原子炉に対して, $t = 0$ で正の反応度 ρ (ただし $\rho < \beta$) が印加されたときの, $n(t)$ の時間変化の概略を図示しなさい。また, この反応度を印加して時間が十分に経過したとき, 中性子密度が 2 倍になるのに要する時間を答えなさい。

(2) エネルギーが E の中性子が軽水素と 1 回弹性散乱したとき, 散乱後に中性子が E' と $E' + dE'$ の間のエネルギーを持つ確率 $P(E')dE'$ が, $E' < E$ に対しては $P(E')dE' = \frac{1}{E} dE'$, それ以外では

$P(E')dE' = 0$ と与えられるものとする。

(2-1) エネルギー E_0 の中性子が, 軽水素と 1 回弹性散乱したあとに E_1 と $E_1 + dE_1$ の間のエネルギーを持つ確率 $P(E_1)dE_1$ を答えなさい。また, E_1 の平均を答えなさい。

(2-2) エネルギー E_0 の中性子が, 軽水素と 2 回続けて弹性散乱したあとに E_2 と $E_2 + dE_2$ の間のエネルギーを持つ確率 $P(E_2)dE_2$ を答えなさい。

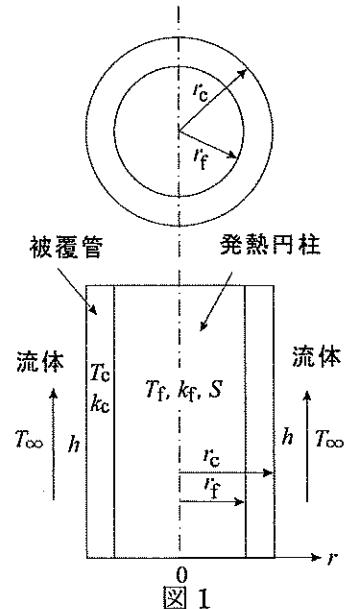
(3) 原子炉において, 遅発中性子が果たす役割を答えなさい。

(4) 軽水型原子炉において, 炉心内の軽水が果たす役割を答えなさい。

問2 図1のように、一様な内部発熱をする半径 r_f [m]の円柱が、厚さ $(r_c - r_f)$ [m]の被覆管で覆われ、被覆管周囲が温度 T_∞ [K]の流体で冷却されている。ただし、時間的に定常で、発熱円柱と被覆管は完全に密着しており、熱は半径方向のみに移動するものとする。また、円柱の内部発熱量を S [$\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$]、円柱内の温度を T_f [K]、熱伝導率を k_f [$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$]、被覆管内の温度を T_c [K]、熱伝導率を k_c [$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$]、被覆管外表面と流体間の熱伝達率を h [$\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$]、発熱円柱表面から被覆管内を通り流体に伝わる軸方向単位長さ当たりの熱を Q_L [$\text{W} \cdot \text{m}^{-1}$]とする。以下の問い合わせに答えなさい。なお、発熱円柱内、被覆管内の熱伝導方程式はそれぞれ式(1)、(2)で与えられる。

$$\frac{k_f}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT_f}{dr} \right) + S = 0 \quad (1)$$

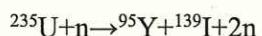
$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT_c}{dr} \right) = 0 \quad (2)$$



- (1) 発熱円柱の表面温度を T_{w1} とおいて、発熱円柱内の温度分布を与える式を求めなさい。
- (2) S と Q_L の間に成り立つ関係を求めなさい。
- (3) 発熱円柱の中心温度を T_{fc} とするとき、 $(T_{fc} - T_{w1})$ を Q_L と k_f を用いて表しなさい。
- (4) 被覆管の内表面温度を T_{w1} 、外表面温度を T_{w2} とおいて、被覆管内の温度分布を与える式を求めなさい。
- (5) 被覆管内の任意の半径位置 r における熱流束を $q_c(r)$ とすると $Q_L = 2\pi r q_c(r)$ となることに留意して、 $(T_{w1} - T_{w2})$ を Q_L 、 k_c 、 r_f 、 r_c を用いて表しなさい。
- (6) 被覆管外表面温度と流体温度の差 $(T_{w2} - T_\infty)$ を Q_L 、 h 、 r_c を用いて表しなさい。
- (7) 上記の(3)、(5)、(6)の解より T_{w1} 、 T_{w2} を消去して、発熱円柱中心温度と流体温度の差 $(T_{fc} - T_\infty)$ を Q_L 、 k_f 、 k_c 、 r_f 、 r_c 、 h を用いて表しなさい。

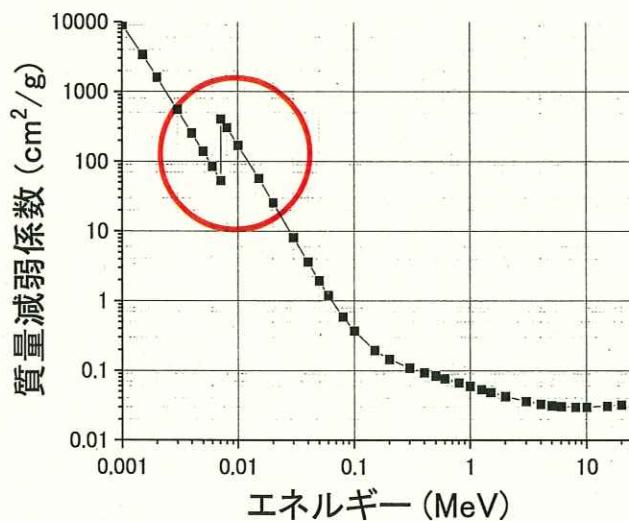
問3 2011年3月11日に発生した東北地方太平洋沖地震により、福島第一原子力発電所では送電線の破損により外部からの電源供給が断たれた。地震直後、原子炉は緊急停止したものの、津波により非常用発電機、原子炉冷却用海水ポンプ等の破損が発生した。その結果、崩壊熱の除去が行えなくなり、最終的に炉心融解に至った。原子炉格納容器内の圧力を下げるための大気ベントに加え、水・ジルコニウム反応により発生した水素による爆発も加わり、核分裂生成物の中でも特に揮発性の高い¹³¹Iや¹³⁷Csが原子炉建屋外に大量に放出され広域汚染に至っている。以下の問い合わせに答えなさい。なお1年は365日としてよい。

(1) 核分裂反応の例として下記の反応により発生するエネルギーを有効数字4桁で求めなさい。



なお、²³⁵U、⁹⁵Y、¹³⁹I、nの質量はそれぞれ235.0439299(20)u、94.912821(8)u、138.92610(3)u、1.00866491588(49)uであり、1u = 931.5 MeVとする。

(2) 代表的な核分裂生成物である¹³⁷Csは662 keVのγ線を放出する。このγ線を遮蔽するため鉄を使用する場合、γ線の強度を1/5まで減らすには何cmの厚さの鉄が必要か有効数字2桁で計算しなさい。計算に当たって下図に示す鉄の質量減弱係数を使うこと。鉄の密度は7.874 g/cm³とする。



(3) 鉄の質量減弱係数のエネルギー依存性において、上図中の○で囲まれた不連続な構造が生じる理由を150字程度で説明しなさい。

(4) 事故で放出された¹³¹Iと¹³⁷Csの半減期はそれぞれ8.0197日と30.17年である。¹³¹Iと¹³⁷Csの当初の放射能がそれぞれ1.00 MBqであった場合、それぞれの1年後の放射能を有効数字3桁で求めなさい。

- (5) 上記の ^{137}Cs を回収し、質量を測定したところ 5.00 g であった。このとき回収した ^{137}Cs の放射能を有効数字 3 衔で求めなさい。
- (6) ^{137}Cs は放射崩壊によりその全量が $^{137\text{m}}\text{Ba}$ に変換されるものとする。時刻 t における、 ^{137}Cs , $^{137\text{m}}\text{Ba}$ の個数をそれぞれ $N_1(t)$, $N_2(t)$ としたとき、これらが従う微分方程式を書きなさい。なお、 ^{137}Cs と $^{137\text{m}}\text{Ba}$ の個数の変動は各々の放射崩壊のみによって起こるものとし、 ^{137}Cs と $^{137\text{m}}\text{Ba}$ の崩壊定数をそれぞれ λ_1 , λ_2 とする。
- (7) 事故から時間が経過するに従い、 $^{137\text{m}}\text{Ba}$ の ^{137}Cs に対する個数の比は一定値に漸近する。 ^{137}Cs と $^{137\text{m}}\text{Ba}$ の半減期をそれぞれ 30.17 年と 2.55 分としたとき、この比を有効数字 2 衔で求めなさい。