2023 年 4 月入学/2022 年 10 月入学 応用物理学専攻修士課程入学試験問題 I
（応用数学 I，力学，電磁気学）
2022 年 8 月 23 日 9:00〜12:00

解答上の注意

(1) 問題用紙はこのページを含め 3 枚である。答案用紙は問 1，問 2，問 3 それぞれ 1 枚である。草案用紙は 3 枚である。

(2) 答案用紙には問題番号が記載されている。各問はその問題番号が記載された答案用紙に解答すること。裏面を使用してもよい。

(3) すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を明記すること。

(4) 試験終了後はすべての答案用紙を回収する（草案用紙は持ち帰ること）。

問 1

1. 常微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t) - a^2 f(t) = g(t) \tag{1}$$

に関して以下の問に答えよ．ただし，a は正の数である．

(a) 絶対可積分な関数 $h(t)$ のフーリエ変換 $\tilde{H}(\omega)$ を以下のように定義する．

$$\tilde{H}(\omega) = \mathcal{F}[h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

$\mathcal{F}[e^{-a|t|}]$ を求めよ．

(b) $h(t)$ が n 回 (n は自然数) の微分演算に対しても絶対可積分であるとした時

$$\mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}h(t)\right] = (-\mathrm{i}\omega)^n \tilde{H}(\omega)$$

が成立することを部分積分を用いて示せ．

(c) $g(t) = \delta(t)$ ($\delta(t)$: デルタ関数) とした場合の微分方程式 (1) の解を $f_1(t)$ とし，そのフーリエ変換を $\tilde{F}_1(\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)]$ とする．(b) を用いて，$\tilde{F}_1(\omega)$ を ω, a を用いて表せ．

(d) (c) より $f_1(t)$ を求めよ．

(e) $g(t) \neq 0$ の時，以下の式で定義される $f_2(t)$ が微分方程式 (1) の解となることを示せ．

$$f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau$$

2. 変数係数の常微分方程式

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = 2x^3 e^x \tag{2}$$

の一般解について以下の問に答えよ．なお，$x > 0$ とする．

(a) まず右辺を 0 とした常微分方程式

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = 0$$

の解を求めよう．$x = e^t$ として変数変換を行って x を消去し，t に関する微分方程式を求めよ．

(b) (a) で求めた微分方程式の一般解を求めよ．さらにその一般解を x を変数とする形式に書き換えよ．

(c) 微分方程式 (2) の一般解を求めよ．

2023 年 4 月入学/2022 年 10 月入学 応用物理学専攻修士課程入学試験問題 I
(応用数学 I, 力学, 電磁気学)
2022 年 8 月 23 日 9:00〜12:00

解答上の注意

(1) 問題用紙はこのページを含め 3 枚である。答案用紙は問 1, 問 2, 問 3 それぞれ 1 枚である。草案用紙は 3 枚である。

(2) 答案用紙には問題番号が記載されている。各問はその問題番号が記載された答案用紙に解答すること。裏面を使用してもよい。

(3) すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を明記すること。

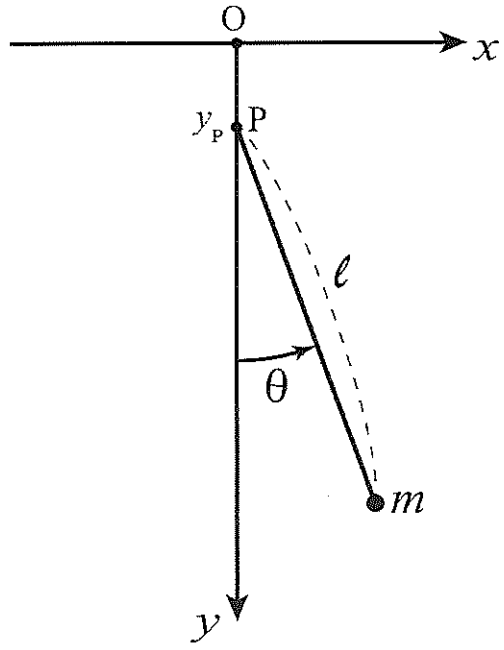
(4) 試験終了後はすべての答案用紙を回収する（草案用紙は持ち帰ること）。

問 2

質量の無視できる，長さ ℓ の糸の先に質量 m の質点をつけた単振子を考える。水平方向に x 軸を，鉛直下向きに y 軸をとり，重力加速度 g の下，振子は xy 面内で振動するものとする。振子の支点は y 軸に沿って動き，その y 座標 y_{p} が時刻 t の関数 $f(t)$ を用いて

$$y_{\mathrm{p}} = f(t) \qquad \cdots ①$$

と表されるとするとき，以下の問に答えよ。ただし，糸はたわまないとし，質点の座標を (x, y) とする。また，振子と y 軸の正の向きとのなす角を θ とし，$t = 0$ のとき，$\theta = \theta_0$ (θ_0 は正の定数) の位置から静かに質点を放したとする。



(1) 質点の x, y 座標をそれぞれ $\ell, \theta, f(t)$ を用いて表せ。

(2) x 軸を基準とするとき，質点の位置エネルギー U を $m, g, \ell, f(t)$ を用いて表せ（y 軸の向きに注意せよ）。

(3) 質点の運動エネルギー T を $m, \ell, \theta, f(t)$ を用いて表せ。なお，必要に応じて $\dot{\theta} \equiv \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$, $f'(t) \equiv \dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$ を用いてよい。

(4) ラグランジアン L を求め，オイラー・ラグランジュ方程式から振子の角度 θ が満たす微分方程式を求めよ。

(5) いま，振子の支点が $f(t) = \dfrac{1}{2}\beta t^2$ にしたがって動くとする。$|\theta| \ll 1$ とみなせるとして，初期条件に注意し θ を t の関数として表せ。ただし，β は $0 < \beta < g$ を満たす定数とする。

(6) つぎに，振子の支点が，正定数 ω および $|a/\ell| \ll 1$ となるような正定数 a に対して，$f(t) = a \sin \omega t$ にしたがって動く場合を考える。$|\theta| \ll 1$ とみなせるとし，θ を以下のように分解する。

$$\theta = \phi + \frac{a}{\ell} u, \qquad \cdots ②$$

ただし，ϕ は

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{\ell}\phi = 0 \qquad \cdots ③$$

を満たす t の関数で，$t = 0$ のとき，$\phi = \theta_0$, $\dot{\phi} = 0$ とする。このとき，t の関数 u の満たす微分方程式が

$$\ddot{u} + \frac{g}{\ell} u = -\omega^2 \phi \sin \omega t \qquad \cdots ④,$$

すなわち，

$$\ddot{u} + \frac{g}{\ell} u = -\omega^2 \theta_0 \sin \omega t \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right) \qquad \cdots ④',$$

となることを示せ（a/ℓ の高次の項は無視してよい）。

(7) (6) の場合，振子の振幅は小さいながらも，時間 t とともに大きくなっていく場合（共鳴）がある。このための条件を記し，θ が有する共鳴項を t の関数としてグラフに示せ。

2023 年 4 月入学/2022 年 10 月入学 応用物理学専攻修士課程入学試験問題 I
（応用数学 I，力学，電磁気学）
2022 年 8 月 23 日 9:00〜12:00

解答上の注意

(1) 問題用紙はこのページを含め 3 枚である。答案用紙は問 1，問 2，問 3 それぞれ 1 枚である。草案用紙は 3 枚である。

(2) 答案用紙には問題番号が記載されている。各問はその問題番号が記載された答案用紙に解答すること。裏面を使用してもよい。

(3) すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を明記すること。

(4) 試験終了後はすべての答案用紙を回収する（草案用紙は持ち帰ること）。

問 3

以下のマックスウェル方程式に従うような一様で等方的な媒質中（誘電率 ε、透磁率は真空の透磁率 μ_0）の電磁場を考える．ここで t は時刻、∇ は位置ベクトル $\mathbf{r}$ に対するベクトル微分演算子である．以下の問いに答えよ．

$$\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=0,\quad \nabla\cdot\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=0,\quad \nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=-\mu_0\frac{\partial\mathbf{H}(\mathbf{r},t)}{\partial t},\quad \nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t}$$

（1）媒質中の電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ の満たす波動方程式 $\left(\nabla^2-\varepsilon\mu_0\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=0$ を導出せよ．ベクトルの恒等式 $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}$ は証明せずに用いてよい．

（2）（1）の波動方程式に対して、実定数ベクトル $\mathbf{E}_0$、波数ベクトル $\mathbf{k}$ と角周波数 $\omega>0$ で複素表示される平面波解 $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_0\exp\left[i\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t\right)\right]$ を考える．3 つのベクトル $\mathbf{k}$、$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$、$\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ が互いに直交することを示せ．

（3）媒質の複素誘電率を $\varepsilon=|\varepsilon|\,e^{i\theta}$ と表す（θ は実数）．$\theta\neq0$ のとき、（2）の平面波解における電場は減衰する．電場の大きさが e^{-1} となる伝播距離 L を ω、μ_0、$|\varepsilon|$、θ を用いて表せ．計算を簡単にするため平面波解の $\mathbf{k}$ を z 軸方向に取り、$k(=|\mathbf{k}|)$ と ω の分散関係を利用せよ．

（4）媒質の誘電率が真空の誘電率 ε_0 に近似可能であるとき、（2）の電磁場に対して磁場（磁束密度）と電場の振幅比 $|\mathbf{B}(\mathbf{r},t)|\,/\,|\mathbf{E}(\mathbf{r},t)|$ を計算し、数値で表せ．ここで $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\mu_0\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$、$c=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=3.0\times10^8\mathrm{m/s}$ である．

（5）分極ベクトル $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)=(\varepsilon-\varepsilon_0)\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ によって生じる分極電流密度 $\mathbf{j}_P(\mathbf{r},t)=\dfrac{\partial\mathbf{P}(\mathbf{r},t)}{\partial t}$ を考える．角周波数 $\omega>0$ の空間的に一様な交流電場 $\mathbf{E}(t)=\mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t}$（$\mathbf{E}_\omega$ は実定数ベクトル）により発生する分極電流に対して、電場との比例関係 $\mathbf{j}_P(t)=\sigma\mathbf{E}(t)$（$\sigma$ は電気伝導率）が成り立つと仮定する．このとき誘電率 ε を ω、ε_0、σ で表せ．

（6）（5）で電気伝導率 σ を $\sigma=\sigma_1+i\sigma_2$ のように実部と虚部に分離する（σ_1、σ_2 は実数）．時間項を実数表示した電場 $\mathbf{E}(t)=\mathbf{E}_\omega\cos\omega t$ と分極電流 $\mathbf{j}_P(t)=\mathbf{E}_\omega\left(\sigma_1\cos\omega t+\sigma_2\sin\omega t\right)$ を用いて、単位時間当たりの電場の損失エネルギー $Z_t(t)=\mathbf{E}(t)\cdot\mathbf{j}_P(t)$ を表した後、周期 $T=2\pi/\omega$ における時間平均 $\langle Z_t\rangle=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T Z_t(t)dt$ を求めよ．また $\langle Z_t\rangle$ が複素誘電率 $\varepsilon=\varepsilon_1+i\varepsilon_2$ の虚数成分 ε_2 で表せることを示せ（ε_1、ε_2 は実数）．

（7）分極を形成する束縛電子に対して振動子モデルを仮定し、分極ベクトル $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$ の周波数依存性を共鳴周波数 $\omega_0>0$ と減衰定数 $\gamma>0$ を用いて $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)=\dfrac{A}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ と表す（A は実定数）．ε_0 が実数であることに注意して、ε_1 と ε_2 を ω の関数として表せ．

（8）媒質中の電磁場に対する損失エネルギーの周波数特性を $\alpha(\omega)=\dfrac{\varepsilon_2\omega}{A}$ と定義する．（7）の結果をもとに $\alpha(\omega)$ の最大値 $\alpha^{\max}$ に対して $\alpha^{\max}/2$ となる $\omega^{\pm}$ $(\omega^+>\omega^->0)$ を ω_0 と γ で表し、$\Delta\omega=\omega^+-\omega^-$ を求めよ．

2023 年 4 月入学/2022 年 10 月入学 応用物理学専攻修士課程入学試験問題 II
（応用数学 II, 熱・統計力学, 量子力学）
2022 年 8 月 23 日 13:00～16:00

解答上の注意

(1) 問題用紙はこのページを含め 3 枚である。答案用紙は問 4 と問 5 がそれぞれ 1 枚，問 6 が 2 枚である。草案用紙は 3 枚である。

(2) 答案用紙には問題番号が記載されている。各問はその問題番号が記載された答案用紙に解答すること。裏面を使用してもよい。

(3) すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を明記すること。

(4) 試験終了後はすべての答案用紙を回収する（草案用紙は持ち帰ること）。

問 4

[I] 3 次元座標系のx, y, z軸の正の向きを持つ単位ベクトルをそれぞれ$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$とする。

1．スカラー場$\phi = e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}}$の勾配(= grad ϕ)を求めよ。ただしσは定数であり、$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$である。

2．ベクトル場$\boldsymbol{A} = xy^2z^3\boldsymbol{i} + (y^4z - x)\boldsymbol{j} + \cos(x)\boldsymbol{k}$の発散(= div $\boldsymbol{A}$)と回転(= rot $\boldsymbol{A}$)を求めよ。

3．図 1 のように、式$6x + 3y + 2z = 6$で示される平面は、x, y, z軸とそれぞれ点A(1,0,0)，点B(0,2,0)，点C(0,0,3)で交わる。3 点 ABC を頂点とする三角形の面をSとする。

1) ベクトル場$\boldsymbol{B} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$の面$S$における面積分$\iint_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$を求めよ。ただし、$\boldsymbol{n}$は面$S$に垂直な単位ベクトルで、各成分は正である。

2) ベクトル場$\boldsymbol{C} = z^2\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + y^2\boldsymbol{k}$の面$S$における面積分$\iint_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{n}\,dS$をストークスの定理を用いて線積分へと変換し、その値を求めよ。

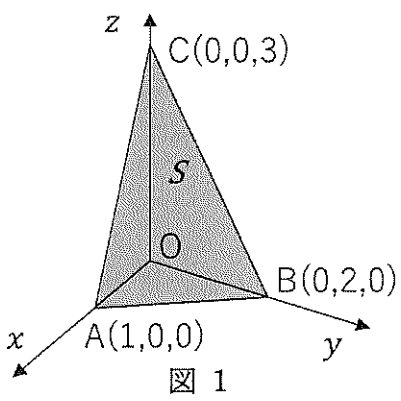


図 1

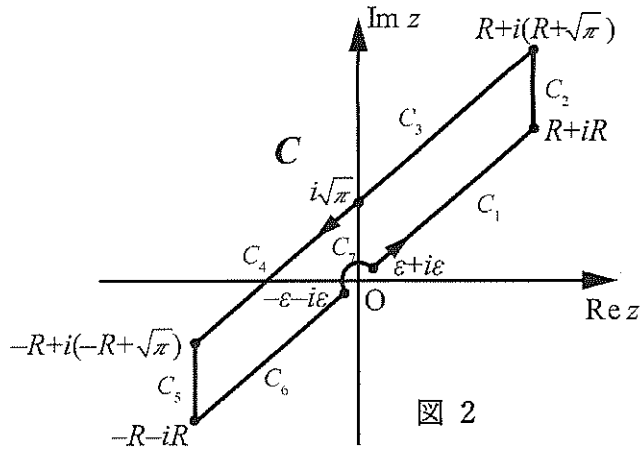


図 2

[II]ガウス積分$\int_0^\infty \exp(-x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$を示したい。複素数$z$の関数 $f(z) = \frac{\exp\left(i\frac{z^2}{2}\right)}{\exp(-\sqrt{\pi}z) - 1}$ を図 2 に示す複素平面上の径路 C に沿って矢印方向に周回積分することにより示そう。径路 C は$R + iR$, $R + i(R + \sqrt{\pi})$, $-R + i(-R + \sqrt{\pi})$, $-R - iR$を頂点する平行四辺形である。ただし、R, εは正の実数で、径路上の原点 O は特異点であるため、O を中心とする半径εの半円周で迂回するものとする。

1) Cを図 2 に示す径路C_1～C_7に区分する。各径路の始点と終点は図中に点(・)で示してある。C_1上の複素数を$z = (1+i)x$、C_3とC_4上の複素数を$z = (1+i)x + \sqrt{\pi}i$、C_6上の複素数を$z = -(1+i)x$（ただしxは実数）と表した時の径路C_1、C_3、C_4、C_6上の積分を、xを変数とした積分形で表せ。ただしC_1とC_6での積分は積分区間が$[\varepsilon, R]$、C_3, とC_4での積分は積分区間が$[0, R]$となるようにそれぞれを表せ。

2) 径路C_7での積分を$z = \sqrt{2}\varepsilon\exp(i\theta)$（$\theta$は実数）として、$\theta$を変数とした積分形で表せ。

3) $\frac{z\exp\left(i\frac{z^2}{2}\right)}{\exp(-\sqrt{\pi}z) - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ とテーラー展開したときのa_0を求めよ。

4) $\varepsilon \to 0$ としたときの径路C_7での積分の値を求めよ。

5) $\varepsilon \to 0$、$R \to \infty$としたときの径路Cにおける積分から、$\int_0^\infty \exp(-x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ となることを示せ。ただし、C_2、C_5上の積分は 0 であることを利用してよい。

2023 年 4 月入学/2022 年 10 月入学 応用物理学専攻修士課程入学試験問題 II
(応用数学 II, 熱・統計力学, 量子力学)
2022 年 8 月 23 日 13:00〜16:00

解答上の注意

(1) 問題用紙はこのページを含め 3 枚である。答案用紙は問 4 と問 5 がそれぞれ 1 枚，問 6 が 2 枚である。草案用紙は 3 枚である。

(2) 答案用紙には問題番号が記載されている。各問はその問題番号が記載された答案用紙に解答すること。裏面を使用してもよい。

(3) すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を明記すること。

(4) 試験終了後はすべての答案用紙を回収する（草案用紙は持ち帰ること）。

問 5

N 個の粒子からなる巨視的な系が温度 T の熱浴に接して熱平衡にあるとする。各粒子は空間の各点に固定されていて互いに区別できるとする。また粒子間の相互作用は無視できるとする。

[A] まず，エネルギーが 0 と ε である 2 つの量子状態のいずれかを各粒子が取る場合を考え，これをモデル A とよぶ。ここで $\varepsilon > 0$ とする。モデル A について次の (A1) から (A5) の問に答えよ。ただし，ボルツマン定数を用いる場合は k_{B} と記せ。

(A1) 1 個の粒子の分配関数 z を T の関数として表せ。

(A2) 系のヘルムホルツの自由エネルギー F を T の関数として表せ。

(A3) 系の内部エネルギー E を T の関数として表せ。

(A4) $k_{\mathrm{B}}T \ll \varepsilon$ となる低温領域において成り立つ E の近似式をもとに，$\log \dfrac{E}{N\varepsilon}$ の温度依存性の概略を図示せよ。

(A5) $k_{\mathrm{B}}T \gg \varepsilon$ となる高温領域では，温度の上昇とともに E は温度によらない値に漸近する。その値を式で表せ。

[B] 次に，エネルギーが $n\varepsilon$ (n は 0 以上の整数, $\varepsilon > 0$) である無限個の量子状態のいずれかを各粒子が取る場合を考え，これをモデル B とよぶ。モデル B について次の (B1) から (B3) の問に答えよ。

(B1) E を T の関数として表せ。

(B2) $k_{\mathrm{B}}T \gg \varepsilon$ となる高温領域において成り立つ E の近似式をもとに，E の温度依存性の概略を図示せよ。

(B3) モデル B において，$k_{\mathrm{B}}T \gg \varepsilon$ となる高温領域での E の温度依存性がモデル A と異なる理由を説明せよ。

2023 年 4 月入学/2022 年 10 月入学 応用物理学専攻修士課程入学試験問題 II
(応用数学 II, 熱・統計力学, 量子力学)
2022 年 8 月 23 日 13:00〜16:00

解答上の注意

(1) 問題用紙はこのページを含め 3 枚である。答案用紙は問 4 と問 5 がそれぞれ 1 枚，問 6 が 2 枚である。草案用紙は 3 枚である。

(2) 答案用紙には問題番号が記載されている。各問はその問題番号が記載された答案用紙に解答すること。裏面を使用してもよい。

(3) すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を明記すること。

(4) 試験終了後はすべての答案用紙を回収する（草案用紙は持ち帰ること）。

問 6

(A)

ハミルトニアン $\hat{H}_1 = \omega \hat{s}_z$ に従うスピンの時間発展を考える．ここで，ω は正の定数としてスピン演算子 $\hat{s} = (\hat{s}_x, \hat{s}_y, \hat{s}_z)$ は以下の交換関係を満たす．

$$[\hat{s}_x, \hat{s}_y] = \hat{s}_x\hat{s}_y - \hat{s}_y\hat{s}_x = i\hbar\hat{s}_z,\ [\hat{s}_y, \hat{s}_z] = i\hbar\hat{s}_x,\ [\hat{s}_z, \hat{s}_x] = i\hbar\hat{s}_y.$$

(a1)：ハイゼンベルグ描像により演算子が時間発展するとして議論する．演算子 $\hat{A}$ の時間発展はハイゼンベルグ方程式 $\frac{d}{dt}\hat{A} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{H}_1]$ に従う．時間に依存しない規格化された状態 $|\psi\rangle$ $(\langle\psi|\psi\rangle = 1)$ にあるときの演算子の期待値を $\langle\hat{A}\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$ と定義する．スピンの期待値 $\langle\hat{s}\rangle = (\langle\hat{s}_x\rangle, \langle\hat{s}_y\rangle, \langle\hat{s}_z\rangle)$ が以下の運動方程式

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{s}_x\rangle = -\omega\langle\hat{s}_y\rangle,\ \frac{d}{dt}\langle\hat{s}_y\rangle = +\omega\langle\hat{s}_x\rangle,\ \frac{d}{dt}\langle\hat{s}_z\rangle = 0.$$

に従うことを示し，時刻 $t = 0$ に $\langle\hat{s}\rangle = (S\sin\theta\cos\phi, S\sin\theta\sin\phi, S\cos\theta)$（$S$, θ, ϕ は実数）であるとして，任意の時刻 t における $\langle\hat{s}\rangle$ を求めよ．

(a2)：次に，シュレディンガー描像により状態が時間発展するとして計算する．スピン $\frac{1}{2}$ の基底として $\hat{s}_z$ を対角化する規格化された状態 $|+\rangle$, $|-\rangle$ を選ぶ．これらの状態に対するスピン演算子の作用は，$\hat{s}_\pm = \hat{s}_x \pm i\hat{s}_y$（複号同順）として，以下のように定義される．

$$\hat{s}_z|+\rangle = +\frac{\hbar}{2}|+\rangle,\ \hat{s}_z|-\rangle = -\frac{\hbar}{2}|-\rangle,\ \hat{s}_+|+\rangle = 0,\ \hat{s}_+|-\rangle = \hbar|+\rangle,\ \hat{s}_-|+\rangle = \hbar|-\rangle,\ \hat{s}_-|-\rangle = 0.$$

時刻 t における状態 $|\psi(t)\rangle$ はシュレディンガー方程式 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}_1|\psi(t)\rangle$ に従う．時刻 $t = 0$ において規格化された状態 $|\psi(0)\rangle = \cos\alpha|+\rangle + e^{i\beta}\sin\alpha|-\rangle$（$\alpha$, β は実数）にあるとして，$|\psi(t)\rangle$ による期待値 $\langle\psi(t)|\hat{s}|\psi(t)\rangle$ を計算し，(a1) で $S = \frac{\hbar}{2}$ とした結果と一致する α, β を一組求めよ．

(a3)：このハミルトニアン $\hat{H}_1$ によるスピンの期待値のベクトルが示す時間発展の振る舞いについて簡潔に説明せよ．

(B)

次のハミルトニアン $\hat{H}_2$ で表される 2 つのスピン $\hat{s}_1$ と $\hat{s}_2$（共にスピン $\frac{1}{2}$ とする）が相互作用している系を考える．

$$\hat{H}_2 = 2J\hat{s}_1\cdot\hat{s}_2 = 2J(\hat{s}_{1x}\hat{s}_{2x} + \hat{s}_{1y}\hat{s}_{2y} + \hat{s}_{1z}\hat{s}_{2z}) = J\left[(\hat{s}_{1+}\hat{s}_{2-} + \hat{s}_{1-}\hat{s}_{2+}) + 2\hat{s}_{1z}\hat{s}_{2z}\right].$$

ここで，J は定数で，異なるスピンの演算子は交換可能であるとする．また，以下では $\hbar = 1$ とする．2 スピン状態の基底を，$\hat{s}_{nz}$（$n = 1, 2$）を対角化する基底 $|\pm\rangle_n$ の直積により，以下のように表す．

$$|++\rangle = |+\rangle_1|+\rangle_2,\ |+-\rangle = |+\rangle_1|-\rangle_2,\ |-+\rangle = |-\rangle_1|+\rangle_2,\ |--\rangle = |-\rangle_1|-\rangle_2.$$

これらの状態に対してハミルトニアン $\hat{H}_2$ を作用させることを考える．例えば，$|++\rangle$ と $|+-\rangle$ に対しては，$n = 1, 2$ として，$\hat{s}_{n+}|+\rangle_n = \hat{s}_{n-}|-\rangle_n = 0$ となることに注意すると，次のようになる．

$$\hat{H}_2|++\rangle = J\left[2(\hat{s}_{1z}|+\rangle_1)(\hat{s}_{2z}|+\rangle_2)\right] = 2J\left(\frac{1}{2}\right)^2|+\rangle_1|+\rangle_2 = \frac{J}{2}|++\rangle,$$

$$\hat{H}_2|+-\rangle = J\left[(\hat{s}_{1-}|+\rangle_1)(\hat{s}_{2+}|-\rangle_2) + 2(\hat{s}_{1z}|+\rangle_1)(\hat{s}_{2z}|-\rangle_2)\right] = J\left[|-\rangle_1|+\rangle_2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)|+\rangle_1|-\rangle_2\right] = J|-+\rangle - \frac{J}{2}|+-\rangle$$

(b1)：残る 2 つの基底 $|-+\rangle$ と $|--\rangle$ に対する $\hat{H}_2$ の作用 $\hat{H}_2|-+\rangle$ と $\hat{H}_2|--\rangle$ を上記の計算にならって求めよ．

(b2)：$|1\rangle = |--\rangle$ と定義し，これに演算子 $\hat{S} = \hat{s}_1 + \hat{s}_2$ に対する $\hat{S}_+ = \hat{s}_{1+} + \hat{s}_{2+}$ を続けて作用させ，$|2\rangle = \hat{S}_+|1\rangle$, $|3\rangle = \hat{S}_+|2\rangle$ と定義する．さらに，これらの 3 状態と直交する状態のひとつを $|4\rangle$ とする．4 状態 $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$, $|4\rangle$ がすべて $\hat{H}_2$ の固有状態であることを示し，それぞれの固有値を求めよ．

(b3)：恒等式，$2\hat{s}_1\cdot\hat{s}_2 = \hat{S}\cdot\hat{S} - \hat{s}_1\cdot\hat{s}_1 - \hat{s}_2\cdot\hat{s}_2$，から，4 状態 $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$, $|4\rangle$ がすべて $\hat{S}\cdot\hat{S}$ の固有状態であることがわかる．演算子 $\hat{S}\cdot\hat{S}$ に対する，それぞれの状態の固有値を求めよ．