

令和4年度 北海道大学大学院工学院修士課程

機械宇宙工学専攻, 人間機械システムデザイン専攻,  
エネルギー環境システム専攻, 量子理工学専攻

機械・宇宙航空工学系研究室群

## 試験問題

# 材料力学, 機械力学・制御工学

試験日：令和3年8月24日（火）

時 間：9:00～12:00

「材料力学」, 「機械力学・制御工学」ともに問1および問2の両方を解答せよ。  
なお, 各問は別の答案用紙に解答し, 問の番号を明記せよ.

### 注意事項

1. 試験開始の合図があるまで問題用紙の中を見てはいけません。
2. 携帯電話, スマートフォンは電源を切りなさい。時計のアラームも使用してはいけません。
3. 受験中, 机上には受験票, 鉛筆(黒), シャープペンシル(黒), 消しゴム, 鉛筆削り, 眼鏡, 計時機能だけの時計および電卓以外は置くことができません。
4. 答案用紙, 草案紙上欄に科目名, 問の番号(答案用紙のみ)および受験番号を記入しなさい。なお, 専攻名は記入不要です。  
また, 問題用紙下欄に受験番号を記入しなさい。
5. 答案用紙は裏面を用いても構いません。ただし「裏面に続く」と明記しなさい。
6. 問題用紙の印刷不鮮明, 答案用紙の汚れ等に気付いた場合は, 手を挙げて監督員に申告しなさい。
7. 問題用紙の余白は利用しても構いませんが切り離してはいけません。
8. 試験終了後, 問題用紙, 答案用紙および草案紙はすべて提出しなさい。

受験番号	
------	--

科 目 名	材料力学
-------	------

問1および問2の両方を解答しなさい。

なお、各問は別の答案用紙に解答し、問の番号を明記しなさい。

問1 図1に示すように、左端を剛体壁に固定され、右端が自由である直線はりがある。はりの長さは $L$ 、縦弾性係数は $E$ であり、はりの断面は全長に渡って一様である。はりの右端に重さ $W$ （質量に重力加速度を乗じた値）の物体を高さ $h$ から落下させるととき、以下の問いに答えなさい。

- (1) このはりの断面が幅 $a$ 、高さ $b$ の長方形であるとき、断面二次モーメントおよび断面係数を求めなさい。ただし、導出過程も明記すること。
- (2) 物体の落下ではなく、静荷重として集中荷重 $W$ をはりの右端に作用させた際の、最大たわみ $v_{st}$ を求めなさい。また、最大曲げ応力 $\sigma_{st}$ と $v_{st}$ の関係を求めなさい。ただし、本問以降では、はりの断面二次モーメントを $I$ 、断面係数を $Z$ としなさい。
- (3) 静荷重として集中荷重 $W$ をはりの右端に作用させた際、はりに貯えられる弾性ひずみエネルギー $U$ を、 $v_{st}, E, I, L$ を用いて表しなさい。
- (4) 物体を落下させたときのはりの最大たわみを $v_{dy}$ とする。最大たわみとはりに貯えられる弾性ひずみエネルギーの関係は静荷重の場合と同様であり、物体がした仕事は、すべてはりの弾性ひずみエネルギーに変わったとして、 $v_{dy}$ を、 $v_{st}$ および $h$ を用いて表し、 $v_{dy}$ と $v_{st}$ のどちらが大きいか答えなさい。
- (5) 最大曲げ応力と最大たわみの関係が静荷重の場合と同様であるとし、物体の落下により生じる最大曲げ応力 $\sigma_{dy}$ を、 $v_{st}, h, E, I, Z, L$ を用いて表しなさい。また、 $\sigma_{dy}$ と $\sigma_{st}$ のどちらが大きいか答えなさい。

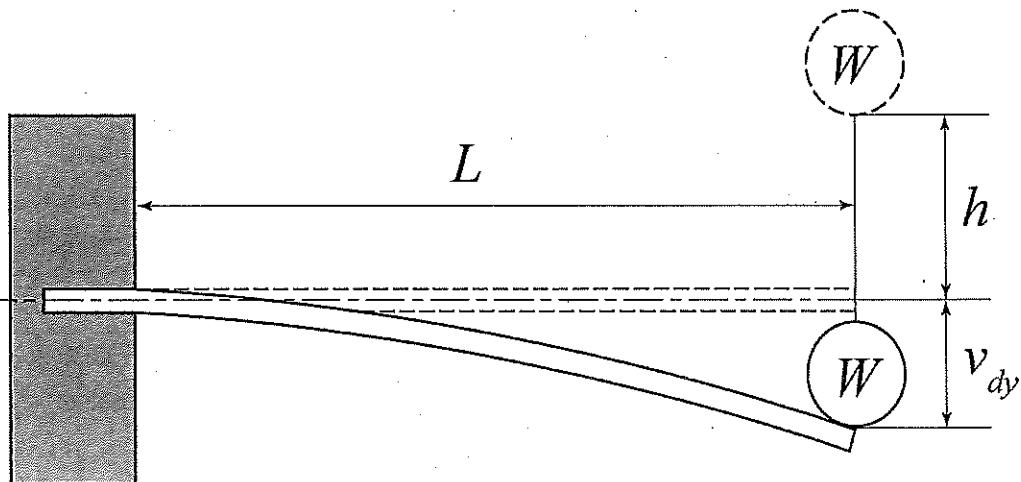


図1

問2 以下の(1), (2)を答えなさい。

(1) 内半径 $R$ , 肉厚 $t$ の薄肉球殻 ( $R \gg t$ ) に内圧 $p$ を作用させた。薄肉球殻の縦弾性係数を $E$ , ポアソン比を $\nu$ とし, 球殻の自重を無視するものとして, 以下の問い合わせに答えなさい。

- (1-1) 円周応力は,  $pR/(2t)$ となることを示しなさい。
- (1-2) 薄肉球殻が内圧で変形するとき, 半径応力は円周応力に比較して小さいとして無視できる。その理由を説明しなさい。
- (1-3) 円周ひずみを,  $p, R, t, E, \nu$ を用いて表しなさい。
- (1-4) 内圧による容積の増加量を,  $p, R, t, E, \nu$ を用いて表しなさい。

(2) 直径 $d$ , 長さ $L$ の真直丸棒について, 図2に示すように左端の横断面を剛体壁に固定支持し, 右端にねじりモーメントを作用させた。このとき, 丸棒表面のせん断応力は $\tau$ であった。丸棒の横弾性係数を $G$ として, 以下の問い合わせに答えなさい。

- (2-1) 丸棒表面のせん断ひずみを,  $\tau, G$ を用いて表しなさい。
- (2-2) 図2のように, 丸棒の中心軸OPを含む平面OPQRが, ねじりによってOPQ'Rとなつたとき, 右端面のねじれ角 $\angle QPQ'$ の大きさを,  $d, L, \tau, G$ を用いて表しなさい。
- (2-3) 任意の横断面において, 中心軸から距離 $r$ の位置に作用するせん断応力を,  $\tau, d, r$ を用いて表しなさい。
- (2-4) 横断面に作用するねじりモーメントの大きさを,  $\tau, d$ を用いて表しなさい。
- (2-5) ねじれ角 $\angle QPQ'$ とねじりモーメントの比を,  $d, L, G$ を用いて表しなさい。

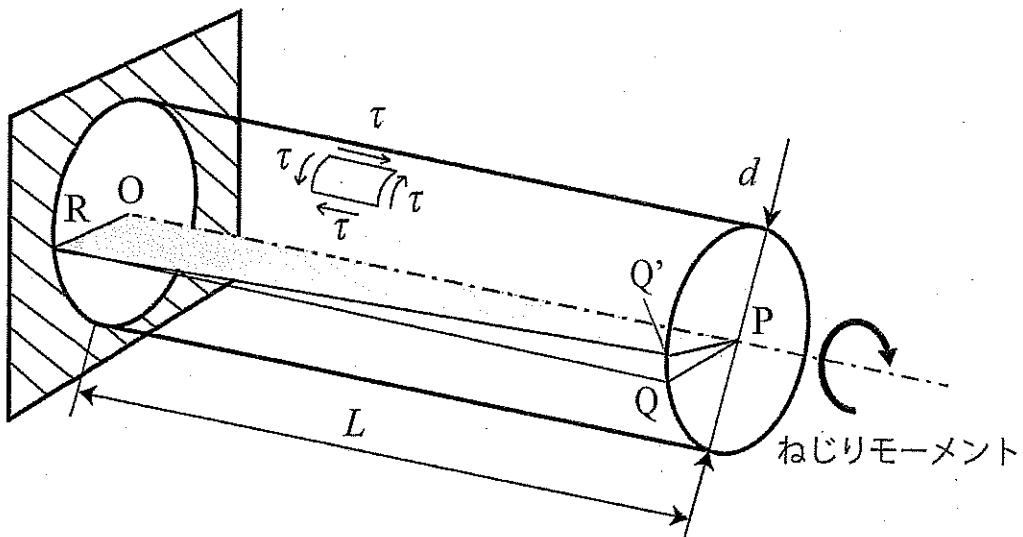


図2

問 1 および問 2 の両方を解答しなさい。

なお、各問は別の答案用紙に解答し、問の番号を明記しなさい。

問 1 図 1 のように、回転軸 P を有する一边の長さが  $a$ 、質量  $M$  の一様な正方形板がある。この回転軸は、対角線 BD 上で正方形板の図心 O から B 方向に  $s$  離れた点 P を通り、正方形板と垂直である。この正方形板の対角線 AC が鉛直方向となる状態で、点 A から水平方向、点 B から鉛直方向にそれぞれね定数  $k_1$  および  $k_2$  のばねが配置され、点 E および点 F において壁に接続している。このとき、この系はつりあい状態にあり正方形板は静止している。ここで微小角  $\theta$  だけ回転させ、静かに手を離すと正方形板は振動を始めた。振動の振幅は十分小さいものとして、以下の問い合わせに答えなさい。

- (1) 正方形板の回転軸 P まわりの慣性モーメントを導出しなさい。
- (2) 正方形板の運動方程式を求めなさい。
- (3) 正方形板の運動の固有振動数を求めなさい。

次に、図 2 のように、この正方形板の点 D に質量  $m$  を取り付け、図 1 と同様に点 A から水平方向、点 B から鉛直方向にそれぞれね定数  $k_1$  および  $k_2$  のばねが配置され、点 E および点 F において壁に接続している。このとき、この系はつりあい状態にあり静止している。ここで微小角  $\theta$  だけ回転させ、静かに手を離すとこの系は振動を始めた。振動の振幅は十分小さいものとして、以下の問い合わせに答えなさい。

- (4) 回転軸 P まわりのこの系の慣性モーメントを求めなさい。
- (5) この系を微小角  $\theta$  だけ回転させ、静かに手を離すと正方形板は振動を始めた。この運動の固有振動数が、(3) で求めた固有振動数の 0.5 倍となるときの  $m$  を求めなさい。

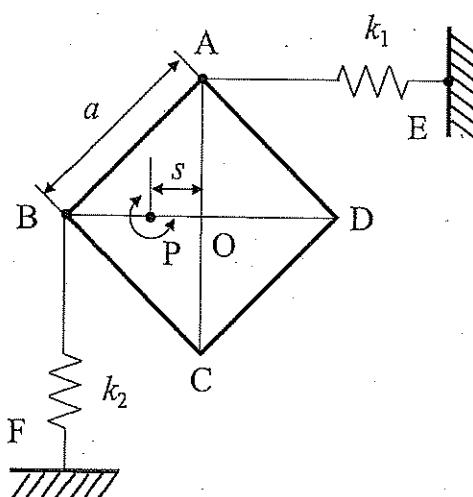


図 1

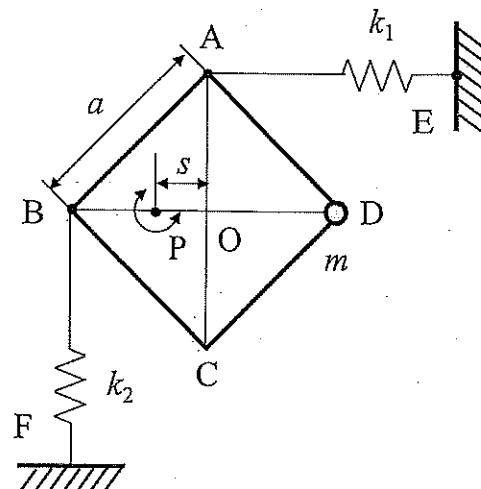


図 2

問2 次の(1), (2)に答えなさい。

(1) 入力信号 $u(t)$ に対し、出力 $x(t)$ が $x(t) = u(t - L)$ となる要素をむだ時間要素という。ここで、 $L$ [s] ( $> 0$ )は一定のむだ時間を表す。以下の問いに答えなさい。

(1-1) むだ時間要素の伝達関数 $G_D(s) = X(s)/U(s)$ は、

$$G_D(s) = e^{-sL}$$

で与えられる。これを導きなさい。ここで、 $s$ はラプラス演算子、 $X(s)$ は $x(t)$ のラプラス変換、 $U(s)$ は $u(t)$ のラプラス変換である。

(1-2)  $L = 0.001$  s のとき、むだ時間要素のボード線図を角周波数が 0~2000 rad/s の範囲で描きなさい。ここで、横軸の角周波数 [rad/s] はリニアスケール（線形目盛）としなさい。

(1-3) 一般に、むだ時間要素はフィードバック制御系の特性を悪化させる性質をもつが、その理由を述べなさい。

(2) は次ページに記されている。

(2) 図3のフィードバック制御系について、以下の問い合わせに答えなさい。ただし、 $G(s)$ は次式で表される。

$$G(s) = \frac{bc}{s^2 + as + b}$$

ここで、 $a$ 、 $b$ および $c$ は定数、 $s$ はラプラス演算子である。

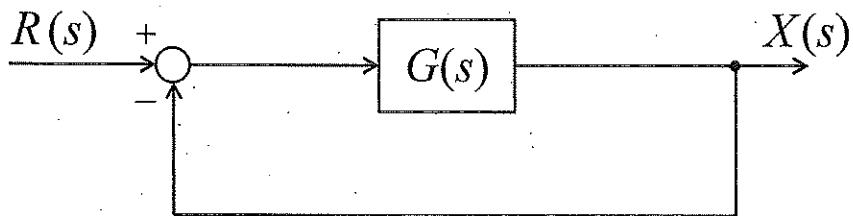


図3

(2-1) 閉ループ系の伝達関数 $X(s)/R(s)$ を $a$ 、 $b$ 、 $c$ および $s$ を用いて求めなさい。

(2-2)  $b = 2$ 、 $c = 1$ のとき、(2-1)で求められた閉ループ伝達関数の周波数応答において、角周波数 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ で位相が $30^\circ$ 遅れた。このときの $a$ を求めなさい。さらに、 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ におけるこの周波数応答の振幅比を求めなさい。

(2-3) あらためて $a = 0$ 、 $b = 100$ 、 $c = 899$ とする。このとき、開ループ系における $G(s)$ の極(特性根)を求めなさい。さらに、 $G(s)$ の周波数応答 $G(j\omega)$ におけるゲイン交差周波数 $\omega_c$  [rad/s]を求めなさい。ただし、ゲイン交差周波数とは $|G(j\omega)| = 1$ となる周波数のことである。

(2-4) (2-3)において、開ループ系の周波数応答 $G(j\omega)$ から位相余裕を求めなさい。さらに、閉ループ系の伝達関数 $X(s)/R(s)$ における極を求めなさい。

(2-5) (2-4)の結果から、フィードバック制御系(閉ループ系)における特性の問題点を説明し、それを解決するためには(2-3)における開ループ系の特性にどのような改善が必要か述べなさい。さらに、それを実現するための方法を述べなさい。

令和4年度 北海道大学大学院工学院修士課程

機械宇宙工学専攻、人間機械システムデザイン専攻、  
エネルギー環境システム専攻、量子理工学専攻

機械・宇宙航空工学系研究室群

試験問題

流体力学、熱力学

試験日：令和3年8月24日（火）

時 間：13：30～16：30

「流体力学」、「熱力学」とともに問1および問2の両方を解答せよ。  
なお、各問は別の答案用紙に解答し、問の番号を明記せよ。

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで問題用紙の中を見てはいけません。
2. 携帯電話、スマートフォンは電源を切りなさい。時計のアラームも使用してはいけません。
3. 受験中、机上には受験票、鉛筆（黒）、シャープペンシル（黒）、消しゴム、鉛筆削り、眼鏡、計時機能だけの時計および電卓以外は置くことができません。
4. 答案用紙、草案紙上欄に科目名、問の番号（答案用紙のみ）および受験番号を記入しなさい。なお、専攻名は記入不要です。  
また、問題用紙下欄に受験番号を記入しなさい。
5. 答案用紙は裏面を用いても構いません。ただし「裏面に続く」と明記しなさい。
6. 問題用紙の印刷不鮮明、答案用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に申告しなさい。
7. 問題用紙の余白は利用しても構いませんが切り離してはいけません。
8. 試験終了後、問題用紙、答案用紙および草案紙はすべて提出しなさい。

受験番号	
------	--

科 目 名	流体力学
-------	------

問 1 および問 2 の両方を解答しなさい。  
なお、各問は別の答案用紙に解答し、問の番号を明記しなさい。

### 問 1

二次元非圧縮渦なし流れは、複素速度ポテンシャル  $f(z)$  を用いて表すことができる。ここで  $z$  は複素数である。複素速度ポテンシャルの実部は速度ポテンシャルであり、虚部は流れ関数である。二次元平面の流れに対して垂直方向に単位長さを考える。流体の密度を  $\rho$  として、以下の問いに答えなさい。

(1) 原点にわき出しを持つ流れの複素速度ポテンシャルは以下の式①で与えられる。

$$f(z) = m \log z \quad ①$$

ここで、  $m$  はわき出しの強さと呼ばれ、正の実定数である。

(1-1)  $z = re^{i\theta}$  として式①の速度ポテンシャルと流れ関数を求めなさい。

(1-2) このわき出しの体積流量を求めなさい。

(2)  $x$  軸上の点  $x = a$  と  $x = -a$  に、強さ  $m$  の二つのわき出しを持つ流れの複素速度ポテンシャルは以下の式②で与えられる。ここで、  $m$  と  $a$  は正の実定数である。

$$f(z) = m \log(z - a) + m \log(z + a) \quad ②$$

(2-1)  $z = x + iy$  として  $y$  軸上の速度分布を求めなさい。

(2-2)  $y$  軸上における最小圧力の値をベルヌーイの定理を用いて求めなさい。ここで、無限遠の圧力は一様に  $p_0$  とする。

(3) 原点に強さ  $m$  のわき出しを持つ流れと速度  $U$  の一様流を重ね合わせた複素速度ポテンシャルは以下の式③で与えられる。ここで  $m$  と  $U$  は正の実定数である。

$$f(z) = m \log z + Uz \quad ③$$

(3-1) この流れは  $x$  軸上によどみ点を持つ。 $z = x + iy$  としてよどみ点の位置を求めなさい。

(3-2) 原点を含むように单一閉曲線  $C$  を取り、以下の式④を用いることでわき出しに働く力を求めることができる。

$$F_x - iF_y = \frac{i}{2} \rho \int_C \left( \frac{df}{dz} \right)^2 dz \quad ④$$

ここで、  $F_x$ ,  $F_y$  は  $x$  方向の力および  $y$  方向の力である。 $F_x$ ,  $F_y$  の値を求めなさい。

ヒント：一般に、整数  $n$  を用いた複素関数  $g(z) = z^n$  について、原点を含む单一閉曲線  $C$  に沿った積分を考えると、 $n = -1$  を除いた整数の場合の積分はゼロとなる。また、 $n = -1$  の積分については、单一閉曲線  $C$  を半径  $r$  の円  $z = re^{i\theta}$  として考えなさい。

## 問2

密度 $\rho$ と粘性係数 $\mu$ の非圧縮粘性流体について、体積流量 $Q$ 一定の定常層流・軸対称な円管内流れを考える。以下の問い合わせに答えなさい。

(1) この流れを記述する運動方程式は以下で与えられる。

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = -\frac{\alpha}{\mu} \quad (1)$$

式①を適切な境界条件のもとに解いて、管軸 $x$ 方向速度の半径 $r$ 方向分布、

$$u(r) = \frac{\alpha}{4\mu} (R^2 - r^2) \quad (2)$$

を導きなさい。ここで、 $\alpha$ と $R$ は正定数であり、それぞれ圧力勾配 $(-dp/dx)$ と円管半径である。

(2) 式②から $Q$ を求める式を導出し、管断面平均流速 $U$ が最大流速の半分となることを示しなさい。

(3) 壁面に働くせん断応力 $\tau_w$ と $Q$ との関係式を導きなさい。

(4) 図1のように同じ長さ $\ell$ で異なる直径( $D_1 > D_2$ )の円管が接合されている。各円管部での圧力勾配がそれぞれ一定であるとする。それぞれの区間で(1)から(3)までの関係が成り立ち、接合部での流れの損失が無視できるとして、 $Q$ が与えられたときの管全体( $L = 2\ell$ )に働く圧力損失 $\Delta p (= \Delta p_1 + \Delta p_2)$ に対する各円管部の寄与分、すなわち $\Delta p_1/\Delta p$ および $\Delta p_2/\Delta p$ を求めなさい。

(5) (4)において円管の代表径 $D$ を $D^2 = (D_1^2 + D_2^2)/2$ と定義する場合、 $\Delta p$ と $L$ に対する見かけの管摩擦係数 $\lambda$ を求めなさい。なお速度には代表径 $D$ での管断面平均流速 $U$ を用いて、レイノルズ数 $Re = \rho U D / \mu$ 、および、 $\gamma = D_1^2/D^2$ を含む形で表しなさい。ここで、 $1 < \gamma < 2$ である。

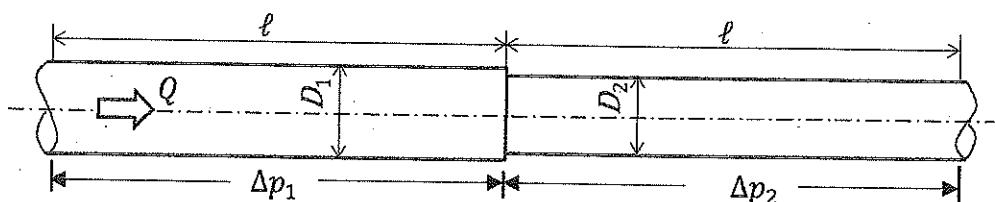


図1

科 目 名	熱力学
-------	-----

問1および問2の両方を解答しなさい。

なお、各問は別の答案用紙に解答し、問の番号を明記しなさい。

問1 下記の4つの可逆過程からなる理想気体の熱サイクルについて以下の問いに答えなさい。なお、有効数字3桁(4桁まで計算して3桁で記載)で答えなさい。ただし、 $T_H = 500\text{K}$ ,  $T_L = 300\text{K}$ , 状態1および2における比体積をそれぞれ $v_1 = 0.556\text{ m}^3/\text{kg}$ ,  $v_2 = 1.39\text{ m}^3/\text{kg}$ , 定圧・定容比熱をそれぞれ $c_p = 0.850\text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)}$ ,  $c_v = 0.661\text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)}$ とする。

過程 (1→2) 等温膨張過程 溫度  $T_H[\text{K}]$  の熱源から等温で熱量  $q_H[\text{J/kg}]$  を受ける

過程 (2→3) 断熱膨張過程 断熱状態で膨張する

過程 (3→4) 等温圧縮過程 溫度  $T_L[\text{K}]$  の熱源に等温で熱量  $q_L[\text{J/kg}]$  を放出する

過程 (4→1) 断熱圧縮過程 断熱状態で圧縮して1の状態へ戻る

(1)  $q_H[\text{J/kg}]$  および  $q_L[\text{J/kg}]$  をそれぞれ求めなさい。

(2) 過程 (1→2) における比エントロピー変化  $\Delta s_{1\rightarrow 2}[\text{J/(kg}\cdot\text{K)}]$  および過程 (3→4) における比エントロピー変化  $\Delta s_{3\rightarrow 4}[\text{J/(kg}\cdot\text{K)}]$  を求めなさい。

(3)  $p-v$ 線図および $T-s$ 線図に、このサイクルを図示しなさい。なお、両図とも等温線( $T_H$ および $T_L$ )を明記し、各状態を示す数字1~4を記入すること。

(4) このサイクルから取り出すことができる仕事  $I[\text{J/kg}]$  を、(1)で求めた  $q_H[\text{J/kg}]$  および  $q_L[\text{J/kg}]$  から求めなさい。また、このサイクルの熱効率  $\eta[-]$  を求めなさい。

(5) 高温熱源(温度 $T_H$ )および低温熱源(温度 $T_L$ )が与えられた場合、このサイクルが理論最大熱効率を与えることを示しなさい。

問2 図1に示す理想的なブレイトンサイクルと理想的なランキンサイクルで構成される複合サイクルがあり、図2はこの複合サイクルの  $T-s$  線図を示している。各図中の1~5の数字はブレイトンサイクルの作動流体の状態を、6~9の数字はランキンサイクルの作動流体の状態を示す。複合サイクルでは、図1中の燃焼器において圧縮空気と燃料を混合して燃焼させ、高圧高温の燃焼ガスを用いてガスタービンを回転させて動力を得るとともに、廃熱回収ボイラにおいて燃焼ガスから熱を回収して蒸気タービンを回転させて動力を得ることで、総合効率を高めている。空気および燃焼ガスは比熱が一定の理想気体として扱い、比熱比  $\kappa = c_p/c_v = 1.40$  とし、以下の問い合わせに答えなさい。なお、有効数字3桁（4桁まで計算して3桁で記載）で答えなさい。

- (1) ブレイトンサイクルの圧力比が20.0、圧縮機入口温度  $T_1$  が300 K、ガスタービン入口温度  $T_3$  が1900 Kの場合、圧縮機出口温度  $T_2$  [K]、ガスタービン出口温度  $T_4$  [K]、およびブレイトンサイクルの理論熱効率  $\eta_B$  [-]をそれぞれ求めなさい。
- (2) 蒸気タービン入口における比エンタルピー  $h_7$  は3457 kJ/kg、比エントロピー  $s_7$  は7.236 kJ/(kg·K)である。また、蒸気タービン出口圧力における飽和液の比エンタルピー  $h_8$  は137.8 kJ/kg、比エントロピー  $s_8$  は0.4763 kJ/(kg·K)、乾き飽和蒸気の比エンタルピー  $h_9$  は2561 kJ/kg、比エントロピー  $s_9$  は8.394 kJ/(kg·K)である。このとき、蒸気タービン出口湿り蒸気の乾き度  $x_8$  [-]、比エンタルピー  $-h_8$  [kJ/kg]、およびランキンサイクルの理論熱効率  $\eta_R$  [-]をそれぞれ求めなさい。ただし、給水ポンプの動力は無視できるものとする。
- (3) 廃熱回収ボイラでは温度  $T_4$  [K]の燃焼ガスが温度  $T_5$  [K]まで低下し、温度低下分のエンタルピー落差は全て蒸気に伝えられるものとする。複合サイクル全体の理論熱効率  $\eta_C$  [-]を、圧縮機出口温度  $T_2$  [K]、燃焼器出口温度  $T_3$  [K]、ガスタービン出口温度  $T_4$  [K]、燃焼ガスの廃熱回収ボイラ出口温度  $T_5$  [K]、ブレイトンサイクルの理論熱効率  $\eta_B$  [-]、およびランキンサイクルの理論熱効率  $\eta_R$  [-]を使って表しなさい。
- (4) 燃焼ガスの廃熱回収ボイラ出口温度  $T_5$  を520 Kとした場合の複合サイクル全体の理論熱効率  $\eta_C$  [-]を、(1)、(2)で求めた値、および(3)で求めた式を使って求めなさい。

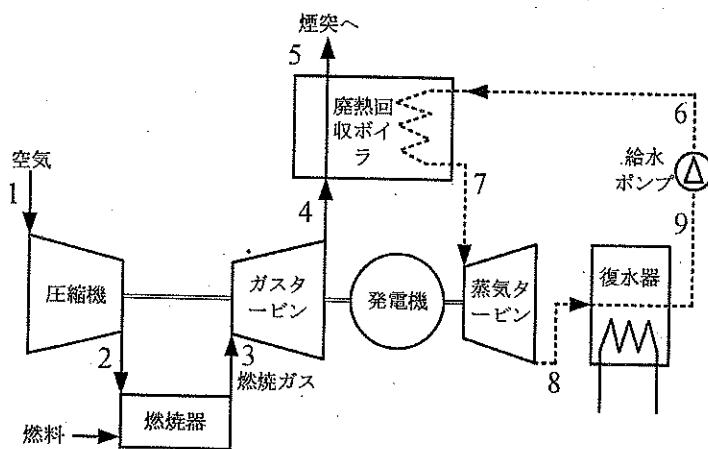
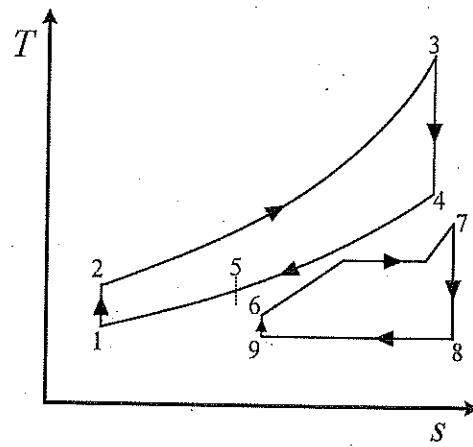


図1 複合サイクルの構成

図2 複合サイクルの  $T-s$  線図