令和３年度 応用物理学専攻 修士課程入学試験問題Ⅰ

（応用数学Ⅰ，力学，電磁気学）

令和2年8月25日 9:00～12:00

解答上の注意

(1) 答案用紙は問１，問２，問３それぞれ１枚である．

(2) 答案用紙には問題番号が記載されている．各問はその問題番号が記載された答案用紙に解答すること．裏面を使用しても良い．

(3) すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を明記すること．

(4) 試験終了後はすべての答案用紙を回収する．

問 1

[1] 完全微分方程式ではない $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ に対して，両辺に $\lambda=\lambda(x,y)$ を掛けた $\lambda P dx+\lambda Q dy=0$ が完全微分方程式になるとき，λ を積分因子とよぶ．以下の問いに答えよ．

（１）$\lambda\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)=Q\dfrac{\partial \lambda}{\partial x}-P\dfrac{\partial \lambda}{\partial y}$ が成り立つことを示せ．

（２）$\lambda=e^{-\int\psi(y)dy}$（$\psi(y)$ は y のみの関数）であれば，$\dfrac{1}{P}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)=\psi(y)$ であることを示しなさい．

（３）$(2y-\sin x)\,dx+(2x+2xy+\cos x)\,dy=0$ の一般解を求めなさい．

[2] 関数 $f(x)$ のフーリエ変換を $F(\alpha)=\mathcal{F}[f(x)]=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\alpha x}dx$ と定義する．ガウス関数 $g(x)=e^{-x^2}$ に関する以下の問いに答えよ．

（１）変数変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ を使って極座標 $r,\ \theta$ で積分を実行することにより，
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\pi$ が成り立つことを示せ．

（２）$f(x)$ の導関数のフーリエ変換に対し，$\mathcal{F}\left[\dfrac{d}{dx}f(x)\right]=i\alpha F(\alpha)$ が成り立つことを示せ．ただし $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$ とする．

（３）ガウス関数 $g(x)$ のフーリエ変換 $G(\alpha)=\mathcal{F}[g(x)]$ に対して微分方程式

$$\frac{d}{d\alpha}G(\alpha)=-\frac{\alpha}{2}G(\alpha)$$

が成り立つことを示し，つぎにこれを解くことによって $G(\alpha)$ を求めよ（任意定数は（１）より定まる）．

[3] 周期 2π の連続関数のフーリエ級数展開を $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\cdots$(A) のように表す．以下の問いに答えよ．

（１）関数 $g(x)=\begin{cases}\pi+x & (-\pi\le x\le 0)\\ \pi-x & (0<x\le\pi)\end{cases}$ のフーリエ級数を算出せよ．

（２）式 (A) の両辺に $f(x)$ を掛けた後，項別積分を利用することにより，パーセバルの等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

を導出せよ．

（３）等式 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$ を示せ．

令和３年度 応用物理学専攻 修士課程入学試験問題Ⅰ
（応用数学Ⅰ，力学，電磁気学）
令和2年8月25日 9:00～12:00

解答上の注意
(1) 答案用紙は問１，問２，問３それぞれ１枚である．
(2) 答案用紙には問題番号が記載されている．各問はその問題番号が記載された答案用紙に解答すること．裏面を使用しても良い．
(3) すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を明記すること．
(4) 試験終了後はすべての答案用紙を回収する．

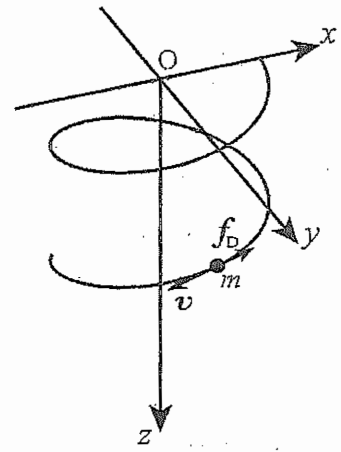
問２

3次元デカルト座標系（$xyz-$座標系）を考え，z軸を鉛直下向きに，xy平面を水平面内にとるとする。質量mの質点が，重力加速度gの下，螺旋（らせん）

$$x = \cos z, \quad \cdots ①$$
$$y = \sin z \quad \cdots ②$$

に沿って落下する場合を考える。質点が螺旋に沿って落下する際，運動方向に逆らって摩擦力f_{D}が働き，f_{D}は質点の速度vに対し，

$$f_{\mathrm{D}} = -2m\gamma v \quad \cdots ③$$



で表されるとする（γは正の定数）。時刻$t=0$において，質点が螺旋上の$z=0$位置に静かに置かれたとして，以下の問に答えよ。

(1) この質点に関するラグランジアンLを$m, g, z, \dot{z}$を用いて表せ。ただし，ここでは摩擦力は考慮しなくてよいものとし，$\dot{z} \equiv \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$は質点の速度の$z$方向成分を表すとする。

(2) 摩擦力を考慮したときのzに関する質点の運動方程式が

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial z}\right) = -2m\gamma\dot{z} \quad \cdots ④$$

と書けることを利用して，zが満たす2階の微分方程式を求めよ。

(3) $t=0$において$z=0$および$\dot{z}=0$であることを用い，zをtの関数として表せ。

(4) $t=0$の近傍および$t \gg \dfrac{1}{\gamma}$における振る舞い（傾きや曲率）に注意して，座標zのt依存性をグラフに示せ。

(5) $t=0$の近傍および$t \gg \dfrac{1}{\gamma}$における振る舞い（傾きや曲率）に注意して，速度$\dot{z}$のt依存性をグラフに示せ。

(6) 落下の際，質点には摩擦力が働いているので，質点の持つ力学的エネルギーは保存されない。質点が螺旋に沿って時刻$t=0$から$t=t_0$（t_0は正の定数）まで落下する際，質点が失う力学的エネルギーをΔEとする。「$t_0 \gg \dfrac{1}{\gamma}$の時間域では，$\Delta E$は$t_0$に対して線形に変化する」と見なせることを示せ。

令和３年度 応用物理学専攻 修士課程入学試験問題Ⅰ
（応用数学Ⅰ，力学，電磁気学）
令和2年8月25日 9:00～12:00

解答上の注意
(1) 答案用紙は問１，問２，問３それぞれ１枚である．
(2) 答案用紙には問題番号が記載されている．各問はその問題番号が記載された答案用紙に解答すること．裏面を使用しても良い．
(3) すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を明記すること．
(4) 試験終了後はすべての答案用紙を回収する．

問３

１．図１のように、真空中に辺の長さをa, bとする２枚の平行平板電極が間隔dで置かれている．電極間には誘電率ε_1の誘電体が隙間なく挿入されている．なお，真空の誘電率はε_0とする．

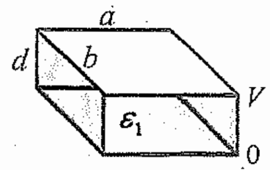


図１

(1) このコンデンサーの電気容量Cを書け．ただし，電極は十分大きく（$a,b \gg d$），電気容量への端の影響は無視できるとする．

(2) コンデンサーに電荷Qを充電し，電極間の電圧がVになった（図１）．このときコンデンサーに蓄えられたエネルギーは$U=\frac{1}{2}CV^2$で与えられる．この式から，コンデンサー内の単位体積当たりの静電エネルギーが$\frac{1}{2}\varepsilon_1 E^2$となることを示せ．ただし，$E$は誘電体内部の電場である．

(3) 次に，図２のように，コンデンサーを電圧Vの電池につなぎ，誘電体を電極の長さaの辺に沿って$x\ (>0)$だけ移動させる（電極と誘電体の摩擦は無視できる）．ただし，誘電体の左端は電極の両端から十分離れており，この近傍では電場は一様であるとする．この状態で誘電体に働く力Fを求めるために，これと釣り合う外力$F'=-F$により誘電体を微小量dxだけ仮想変位させると，外力のなす仕事は$-Fdx$となる．また，この変位に伴って電池から流れ込む電荷をdQとすると電池のなす仕事はVdQとなる．これらを用いてコンデンサーのエネルギーの増分dUを表せ．さらに，Cがxに依存する場合にも$U=\frac{1}{2}CV^2$が成立することに注意して，V一定の下では$dU=Fdx$となることを示せ．

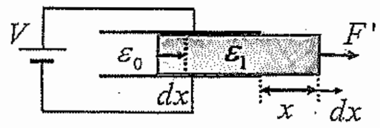


図２

(4) 以上の結果からFを求めよ．

２．図３のように，真空中に単位長さあたりn回巻きのソレノイドコイルがある．ソレノイドコイルの半径をa，長さをℓとする．ただし，ソレノイドコイルは，その外側では磁場が存在しないと近似できるほど長いと仮定する．

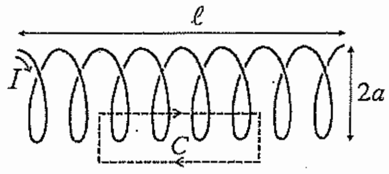


図３

(1) アンペールの法則の微分形は$\mathrm{rot}\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}$と書ける．ここで，$\boldsymbol{B}, \boldsymbol{j}, \mu_0$はそれぞれ磁束密度，電流密度，真空の透磁率である．この式からアンペールの法則の積分形$\oint_C \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{t}ds=\int_S \mu_0 \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}dS$を導け．ただし，左辺は閉曲線$C$に沿っての線積分，右辺は$C$を境界に持つ面$S$にわたる面積分であり，$\boldsymbol{t}$と$\boldsymbol{n}$はそれぞれ単位接線ベクトルと単位法線ベクトルである．

(2) アンペールの法則の積分形に図３の積分経路Cを適用し，ソレノイドコイルに電流Iが流れているときのコイル内部の磁束密度$\boldsymbol{B}$の大きさBを求めよ．

(3) このソレノイドコイルの自己インダクタンスLを求めよ．

(4) $\mu_0=1.3\times10^{-6}\ \mathrm{Hm^{-1}}$，$a=10\ \mathrm{mm}$，$n=1.0\ \mathrm{mm^{-1}}$として，このソレノイドコイルの単位長さ当たりの自己インダクタンスを計算せよ．

(5) 一般に電流Iが流れているときのコイルに蓄えられるエネルギーは$\frac{1}{2}LI^2$となることをファラデーの電磁誘導の法則から導け．さらに，この式を用いて，ソレノイドコイルの単位体積当たりの磁気エネルギーをBとμ_0によって表せ．

令和３年度 応用物理学専攻 修士課程入学試験問題II
（応用数学II，熱・統計力学，量子力学）
令和2年8月25日 13:00〜16:00

解答上の注意
(1) 答案用紙は問４，問５，問６それぞれ１枚である．
(2) 答案用紙には問題番号が記載されている．各問はその問題番号が記載された答案用紙に解答すること．裏面を使用しても良い．
(3) すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を明記すること．
(4) 試験終了後はすべての答案用紙を回収する．

問４

[1] 3次元空間におけるベクトル場 $\boldsymbol{A} = (x-y^3)\boldsymbol{i} + (x^3+y)\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$（単位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 軸方向で正の向きをもつ）について次の問いに答えよ。

(a) 4点 P(1, 0, 0), Q(0, 1, 0), R(-1, 0, 0), T(0, -1, 0) におけるベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の向きを、xy 平面上に各点を始点とする矢印で図示せよ。

(b) $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$ $(= \nabla \cdot \boldsymbol{A})$ および $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ $(= \nabla \times \boldsymbol{A})$ を求めよ。

(c) 任意の領域 V の表面 S に対して、ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の S 上での面積分 $\int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\, dS$（単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ は S 上の各点で S に垂直で外向き）は領域の体積に等しいことを示せ。

[2] 以下の各問いに答えよ。

(a) x と y を実数、i を虚数単位とするとき、複素数 $z = x + iy$ の正則関数である $w(z)$ の実部 $u(x, y)$ と虚部 $v(x, y)$ は、コーシー・リーマンの方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

を満たす。このことを使って、$u(x, y) = c_1$ と $v(x, y) = c_2$ が xy 平面上になす曲線群は、交点において直交していることを示せ。ここで、c_1 と c_2 は任意の実定数である。

(b) (a) における実関数 $u(x, y)$ と $v(x, y)$ は、それぞれ2次元のラプラス方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

を満たすことを示せ。

(c) $w(z) = z$ のとき、(a) の曲線群は $u(x, y) = x = c_1$ と $v(x, y) = y = c_2$ となり、その概略は図1のようになる。$u(x, y) = c_1$ と $v(x, y) = c_2$ をそれぞれ破線と実線で示した。今、$w(z) = z^2$ のとき、曲線群 $u(x, y) = c_1$ と $v(x, y) = c_2$ の概略を図示せよ。どちらの曲線群であるかを明記すること。

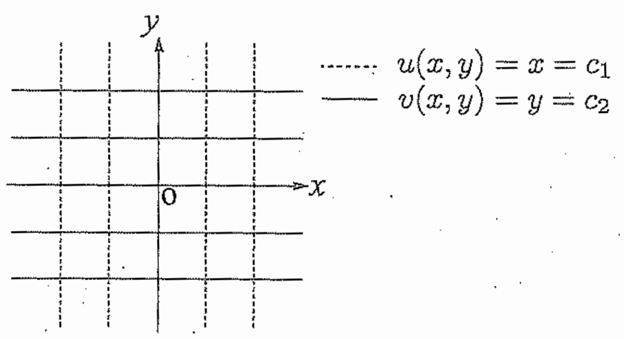


図1

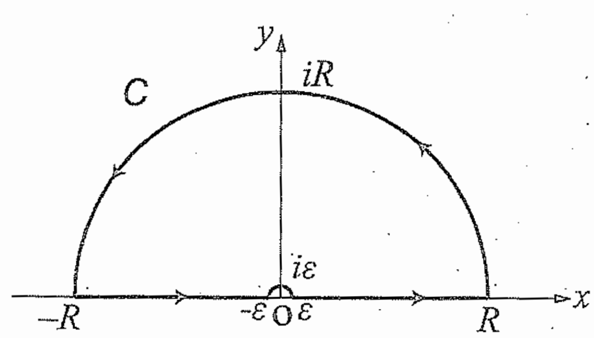


図2

[3] 複素数 z を実数 x, y を用いて $z = x + iy$ と表し複素平面（図2）の上の点 (x, y) に対応させる。図2に示す積分路 C に沿っての積分 $I = \oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz$ を利用して、$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ を求めよ。

令和３年度 応用物理学専攻 修士課程入学試験問題II
（応用数学II，熱・統計力学，量子力学）
令和2年8月25日 13:00～16:00

解答上の注意
(1) 答案用紙は問４，問５，問６それぞれ１枚である．
(2) 答案用紙には問題番号が記載されている．各問はその問題番号が記載された答案用紙に解答すること．裏面を使用しても良い．
(3) すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を明記すること．
(4) 試験終了後はすべての答案用紙を回収する．

問５

理想フェルミ気体の圧力 P の温度依存性を，温度 T，体積 V，化学ポテンシャル μ を一定とするグランドカノニカル分布により考える．ボルツマン定数を k_B，逆温度を $\beta = 1/(k_B T)$ と定義する．

(1) エネルギーが ε である１粒子状態の占有数の期待値（分布関数）を f，１粒子大分配関数を Ξ と定義すると

$$f(\varepsilon) = \frac{\sum_{n=0}^{1} n e^{-\beta n(\varepsilon-\mu)}}{\sum_{n=0}^{1} e^{-\beta n(\varepsilon-\mu)}} = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\log \Xi(\varepsilon),\ \Xi(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{1} e^{-\beta n(\varepsilon-\mu)},$$

の関係がある．分布関数 f の絶対零度（$T=0$）と有限温度（$T>0$）における ε 依存性の概形を図示せよ．説明に有用な漸近線を引き，$\varepsilon = \mu$ における値がわかるようにすること．

(2) 以下では，熱力学的極限により系の大きさが十分に大きく，自由粒子のエネルギー ε がゼロ以上の連続的な値を取り，状態密度が定数 A を用いて $D(\varepsilon) = A\sqrt{\varepsilon}$ と表される場合を考える．グランドポテンシャル $J = -PV$，全エネルギー E は以下のように表せる．

$$J = -PV = -\frac{1}{\beta}\int_0^\infty d\varepsilon D(\varepsilon)\log\Xi(\varepsilon),\ E = \int_0^\infty d\varepsilon D(\varepsilon)\varepsilon f(\varepsilon).$$

部分積分により (1) の f と Ξ の関係式を用いて，$PV = \frac{2}{3}E$ が成立することを示せ．

(3) 全粒子数は $N = \int_0^\infty d\varepsilon D(\varepsilon) f(\varepsilon)$ で与えられる．絶対零度において化学ポテンシャル μ はフェルミエネルギー ε_F に一致して，E と N の ε 積分は解析的に実行できる．１粒子あたりの体積を $v = V/N$ と定義すると，$Pv = C_1\varepsilon_F$ の比例関係が導かれる．比例定数 C_1 を求めよ．

(4) 密度一定（つまり，v 一定）における高温極限では古典理想気体として振る舞う．分布関数が $f \ll 1$ となり $f = e^{-\beta(\varepsilon-\mu)} = e^{-\beta\varepsilon}/z$ と近似できること，あるいは，古典理想気体の性質を利用して，$Pv = C_2 k_B T$ の比例関係が導かれる．比例定数 C_2 を求めよ．

(5) 不等式 $PV - Nk_BT > 0$ が成立することを示せ（左辺に PV と N の ε 積分による表式を代入して，関数 $g(x) = \log(1+x) - \frac{x}{1+x}$ が $x>0$ で $g(x)>0$ となることを証明することで結果が導かれる）．また，この性質と低温極限・高温極限の振る舞いが明確になるように，Pv の T 依存性の概形を図示せよ．ただし，単調で下に凸な関数であることを利用してよく，説明に有用な漸近線を引き，$T=0$ における値を記すこと．

(6) 低温極限において，古典理想気体は粒子が静止し圧力がゼロになるのに対し，理想フェルミ気体では絶対零度でも有限の圧力を示すことが，以上の結果から示された．この理由について量子統計性の観点から簡潔に説明せよ．

令和３年度 応用物理学専攻 修士課程入学試験問題ＩＩ
（応用数学ＩＩ，熱・統計力学，量子力学）
令和2年8月25日 13:00～16:00

解答上の注意
(1) 答案用紙は問４，問５，問６それぞれ１枚である．
(2) 答案用紙には問題番号が記載されている．各問はその問題番号が記載された答案用紙に解答すること．裏面を使用しても良い．
(3) すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を明記すること．
(4) 試験終了後はすべての答案用紙を回収する．

問６

ハミルトニアンが $\hat{H}$ で表される量子系のシュレーディンガー方程式

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

のある固有値 E_0 が 3 重縮退しており、このエネルギーに規格直交化された $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle$ の 3 つの固有状態が属しているとする。この系に摂動ポテンシャル $\lambda\hat{V}$ を加えた場合、エネルギー固有値 E_0 は $\varepsilon_0(\lambda)$ に変わり、固有状態は $|\phi_0(\lambda)\rangle$ になったとしよう。$\varepsilon_0(\lambda)$ と $|\phi_0(\lambda)\rangle$ を摂動論により求めることに関する以下の問に答えよ。

(1) 固有状態 $|\phi_0(\lambda)\rangle$ に対するシュレーディンガー方程式、

$$(\hat{H} + \lambda\hat{V})|\phi_0(\lambda)\rangle = \varepsilon_0(\lambda)|\phi_0(\lambda)\rangle \tag{a}$$

において、$\varepsilon_0(\lambda)$ と $|\phi_0(\lambda)\rangle$ を

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(\lambda) &= \varepsilon_0^{(0)} + \lambda\varepsilon_0^{(1)} + \lambda^2\varepsilon_0^{(2)} + \cdots \\ |\phi_0(\lambda)\rangle &= |\phi_0^{(0)}\rangle + \lambda|\phi_0^{(1)}\rangle + \lambda^2|\phi_0^{(2)}\rangle + \cdots \end{aligned} \tag{b}$$

のように λ でベキ展開する。(b) 式を (a) 式に代入して λ の 0 次の項を比較することにより、

$$\begin{cases} \varepsilon_0^{(0)} = E_0 \\ |\phi_0^{(0)}\rangle = c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle + c_3|\psi_3\rangle \qquad (c_1,\ c_2,\ c_3 \text{ は定数}) \end{cases} \tag{c}$$

であることを示せ。

(2) (b) 式を (a) 式に代入して λ の 1 次の項だけを抜き出すことにより、(c) 式の c_1, c_2, c_3 が、

$$\begin{pmatrix} \langle\psi_1|\hat{V}|\psi_1\rangle & \langle\psi_1|\hat{V}|\psi_2\rangle & \langle\psi_1|\hat{V}|\psi_3\rangle \\ \langle\psi_2|\hat{V}|\psi_1\rangle & \langle\psi_2|\hat{V}|\psi_2\rangle & \langle\psi_2|\hat{V}|\psi_3\rangle \\ \langle\psi_3|\hat{V}|\psi_1\rangle & \langle\psi_3|\hat{V}|\psi_2\rangle & \langle\psi_3|\hat{V}|\psi_3\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \varepsilon_0^{(1)} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

を満たすことを示せ。

(3) $\varepsilon_0^{(1)}$ を与える永年方程式の具体的な表式を示せ。

(4) $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle$ による $\hat{V}$ の行列要素が、実数 a および $b(\neq a)$ を用いて、

$$\begin{aligned} &\langle\psi_1|\hat{V}|\psi_1\rangle = \langle\psi_3|\hat{V}|\psi_3\rangle = a \\ &\langle\psi_1|\hat{V}|\psi_3\rangle = \langle\psi_3|\hat{V}|\psi_1\rangle = b \\ &\langle\psi_1|\hat{V}|\psi_2\rangle = \langle\psi_2|\hat{V}|\psi_1\rangle = \langle\psi_2|\hat{V}|\psi_3\rangle = \langle\psi_3|\hat{V}|\psi_2\rangle = \langle\psi_2|\hat{V}|\psi_2\rangle = 0 \end{aligned}$$

で与えられているとき、1 次摂動エネルギー $\varepsilon_0^{(1)}$ を計算し、縮退が解けることを示せ。また、$|\phi_0^{(0)}\rangle$ を無摂動状態 $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle$ を使って表せ。

(5) 無摂動ハミルトニアン $\hat{H}$ が 3 準位のみからなる量子系を表している場合、(4) で求めた固有エネルギーの変化量 $\varepsilon_0^{(1)}$ と $|\phi_0^{(0)}\rangle$ は、厳密解に一致することを示せ。