令和７年度
北海道大学工学部
編入学試験（一般選抜）
学士入学試験

【数　　学】

試験時間　　９：３０～１１：３０

- 試験時間中、机の上に置けるものは、受験票、黒の鉛筆、黒のシャープペンシル、消しゴム、鉛筆削り、眼鏡、時計（計時機能のみ有するもの）のみです。
  これ以外のものを試験時間中、机の上に置いてはいけません。
- 携帯電話、スマートフォン等の電子機器類、及び時計のアラームは、試験時間中、使用してはいけません。
  これらの電子機器類は、あらかじめアラームの設定を解除して電源を切り、かばん等に入れなさい。

注　意

１．試験開始の合図があるまで、この問題紙を開いてはいけません。
２．問題紙は、このページを含めて５ページあります。
３．解答用紙は「数学１／８」から「数学８／８」までの８枚、草案用紙は３枚あります。
４．受験番号は、監督員の指示に従って、すべての解答用紙の指定された箇所に必ず記入しなさい。
５．解答はすべて、解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。なお、裏面を使用してはいけません。
６．必要以外のことを解答用紙に書いてはいけません。
７．解答用紙は８枚とも全部必ず提出しなさい。
８．問題紙の余白は下書きに使用しても差し支えありません。
９．この問題紙と草案用紙は回収しません。

令和７年度
北海道大学工学部
編入学試験（一般選抜）
学士入学試験

【数　　学】

令和７年度北海道大学工学部編入学試験（一般選抜）・学士入学試験問題【数学】

（注意）すべての問に対して、途中の計算手順など、解答に至る過程が分かるように記述すること。

問１．　以下の設問に答えなさい。

設問１．　実行列$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$と２次元実ベクトル$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$について、$\mathbf{x}$の$A$による変換で与えられるベクトル

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A\mathbf{x}$$

の成分y_1、y_2、および大きさ$|\mathbf{y}|$をa、b、x_1、x_2の式で表しなさい。ただしa、bの少なくとも一方は０ではないものとする。

設問２．　設問１の変換が、任意のベクトル$\mathbf{x}$の変換結果についてその大きさを不変とするときの条件をa、bの式で表せ。また、$a = \cos\theta$、$b = \sin\theta$（θは実数）がこの性質を満たしていることを示しなさい。

設問３．　設問１の行列Aとベクトル$\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$に関し、$a = \sqrt{3}$、$b = 1$、$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$のとき、ベクトル$\mathbf{y}$の大きさ$|\mathbf{y}|$を$x_1$、$x_2$の式で表しなさい。また、ベクトル$\mathbf{x}$とベクトル$\mathbf{y}$の成す角$\theta$を$0 \leqq \theta \leqq \pi$の範囲で求めなさい。ここで$\mathbf{0}$は零ベクトルである。

問２．　以下の設問に答えなさい。

設問１．x_1、x_2、x_3についての連立方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

が一意の解を持つ実数sの条件を示し、そのときの解をsの式で表しなさい。

設問２．以下のベクトル$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$が１次従属であるための条件をsの式で示しなさい。また、$\mathbf{c}$を$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$の線型結合で表しなさい。

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ s \end{pmatrix}$$

設問３．以下の行列Mのすべての固有値とそれぞれに対応する固有ベクトルを求めなさい。

$$M = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

設問４．設問３の行列Mについて、$P^{-1}MP$が対角行列となるような正則行列Pとその逆行列P^{-1}を求めなさい。

設問５．設問３の行列Mについて、M^5を求めなさい。

問３．　周期2πの周期関数$f(x) = f(x + 2\pi)$が、区間 $[-\pi, \pi)$ に対しては式(1)で定義されている。この周期関数$f(x)$を式(2)のようにフーリエ級数に展開する場合の各係数a_0、a_n、b_nを求めなさい。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \left(-\pi \leqq x < -\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \cos x & \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x < \pi\right) \end{cases} \tag{1}$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\} \tag{2}$$

問４．　以下の設問に答えなさい。

設問１．　次の微分方程式の一般解を求めなさい。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$$

設問２．　次の微分方程式の一般解を求めなさい。

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(x+y)^2}$$

設問３．　次の連立微分方程式の一般解を求めなさい。

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = x(t) + 2y(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = 2x(t) + y(t) + \sin t \end{cases}$$